暑期大專生專題研究計畫—以幾何分析的方法了解近代幾何問題

李國瑋
國立彰化師範大學數學系

NCTS USRP
110年7月16日

- 本專題研究計畫會從以下文章繼續延伸一些後續的問題:

  Gage, Michael E.: Curve shortening on surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **23** (1990), no. 2, 229–256.

曲面上的曲線縮短流 (Curve shortening flow on surfaces)

本專題是要探討簡單封閉曲線族 $\{\gamma_t(u)\}_{t\in[0,\varepsilon)}$ 在可定向曲面 (M^2,g) 上以曲線縮短流 的方式變動。數學上是指映射 $\mathbf{X}(u,t):[0,2\pi]\times[0,\varepsilon)\to M^2$, 其中 $\mathbf{X}(0,t)=\mathbf{X}(2\pi,t)$ 並且滿足偏微分方程式:

$$\begin{cases} (\mathbf{X}_t(u,t))^{\perp}=k(u,t)\mathbf{N}(u,t) \\ \mathbf{X}(u,0)=\gamma_0(u), \end{cases}$$

其中 $k(u,t)$ 表示曲線 $\gamma_t(u)$ 在 u 處的 測地曲率 (geodesic curvature)。記曲線單位切向量 $\mathbf{T}(u,t)=\frac{\mathbf{X}_u(u,t)}{\|\mathbf{X}_u(u,t)\|}$, 則 $\mathbf{N}(u,t)\in T_{\gamma_t(u)}M$ 表示與曲面定向一致的單位法向量。而 $(\cdot)^{\perp}$ 表示在切平面上的向量投影到法向量的部份。

符號設定

欲研究曲線在曲面上的變動, 此時, 利用黎曼幾何關於聯絡 (connection) ∇ 的術語表示子流形的共變微分會比較容易觀察出一些幾何性質。給定 $p \in \gamma_t(u)$, 因為 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 形成一組定義在切平面 T_pM^2 上的單位正交基底 (orthonormal frame), 所以

$$\nabla_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \overset{\text{定義}}{=\!=} \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix},$$

記 $\mathbf{V} = \mathbf{X}_t = k\mathbf{N}$, 並引進符號 $U = \|\mathbf{X}_u\|$, 得到 $\mathbf{X}_u = U\mathbf{T}$, 則向量場 $\mathbf{X}_t = \mathbf{V}$ 和 $\mathbf{X}_u = U\mathbf{T}$ 來自於映射的微分, 故有 $[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_u] = [\mathbf{V}, U\mathbf{T}] \equiv 0$。

曲線弧長的演化方程式為 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\int_{\gamma_t} k^2 \,\mathrm{d}s$

因為 $L(t) = \int_{\gamma_t} \mathrm{d}s = \int_I \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}u = \int_I \langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}u$, 計算

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = \int_I \mathbf{V} \langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}u = \int_I \frac{\langle \nabla_{\mathbf{V}}(U\mathbf{T}), U\mathbf{T} \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}u = \int_I \frac{\langle \nabla_{U\mathbf{T}}\mathbf{V}, U\mathbf{T} \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}u$$

$$= \int_I \left(U\mathbf{T} \left(\frac{\langle \mathbf{V}, U\mathbf{T} \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{\langle \mathbf{V}, \nabla_{U\mathbf{T}}(U\mathbf{T}) \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}} + \frac{\langle \mathbf{V}, U\mathbf{T} \rangle \langle \nabla_{U\mathbf{T}}(U\mathbf{T}), U\mathbf{T} \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}u,$$

因為 $\langle \mathbf{V}, U\mathbf{T} \rangle \equiv 0$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = \int_I -\frac{\langle \mathbf{V}, \nabla_{U\mathbf{T}}(U\mathbf{T}) \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}u = \int_I -\frac{\langle \mathbf{V}, U(\mathbf{T}(U)\mathbf{T} + U\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}) \rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}u$$

$$= \int_I -\frac{\langle k\mathbf{N}, U^2 \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} \rangle}{U} \,\mathrm{d}u = \int_I -\frac{\langle k\mathbf{N}, U^2 k\mathbf{N} \rangle}{U} \,\mathrm{d}u = \int_I -k^2 U \,\mathrm{d}u = \int_{\gamma_t} -k^2 \,\mathrm{d}s\text{。}$$

由此可知此偏微分方程式會導致曲線弧長遞減, 故稱曲線縮短流。

定理 (Gage, 1990)

給定半徑為 $R=\frac{1}{C}$ 的球 $\mathbb{S}^2(R)\subset\mathbb{R}^3$, 考慮曲線 γ_0 是一條將球的表面積等分的簡單封閉光滑正則曲線, 若全空間曲率 (total space curvature) $\int_{\gamma_0} w(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{定義}}{=\!=} \int_{\gamma_0}((k(s))^2+C^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s<3\pi$, 則對於以 γ_0 為初始曲線的曲線縮短流會有以下結果:

(A) 長時間存在性 (long time existence): 映射 $\mathbf{X}(u,t)$ 在 $t\in[0,\infty)$ 都有定義而且滿足偏微分方程式。

(B) 收斂性 (convergence): 曲線經過曲線縮短流將收斂到大圓。換言之, 映射 $\mathbf{X}(u,t)$ 對於 t 可找到數列 t_n, 對於 n 取極限下的曲線 $\gamma_\infty(u) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty}\gamma_{t_n}(u)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{X}(u,t_n)$ 存在, 並且曲線 $\gamma_\infty(u)$ 在 $\mathbb{S}^2(R)$ 上的軌跡是 $\mathbb{S}^2(R)$ 與空間中通過坐標中心的平面之交集。

(C) 網球定理 (Tennis Ball Theorem): 對任何 $t\in[0,\infty)$, 曲線 $\gamma_t(u)$ 至少有四個反曲點 (points of inflection)。也就是說, 曲線 $\gamma_t(u)$ 的測地曲率 $k_t(u)$ 產生變號的地方至少有四個。

技術層面 (以收斂性為例)

關於曲線縮短流收斂性的部份, 證明的過程分成以下幾個步驟:

(1) 證明 $\lim_{t\to\infty} \|k\|_2(t) = 0$ 再證 $\lim_{t\to\infty} \|k\|_1(t) = 0$。

(2) 證明 $\|k_s\|_2^2(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上有界。

(3) 證明 $\lim_{t\to\infty} \|k\|_\infty(t) = 0$。

(4) 對於 $l = 0, 1, \ldots, n-2$, 若有 $\lim_{t\to\infty} \|k^{(l)}\|(t) = 0$, 則 $\|k^{(n)}\|(t) = \int_{\gamma_t} (k^{(n)})^2 \, \mathrm{d}s$ 有界。

(5) 完成曲線縮短流收斂性的論述。

問題集

- 3π 條件有沒有可能放寬? 因為真正的網球曲線的全曲率經數學軟體模擬之後是 $14.255 > 3\pi$。
- 曲線不自交的定理的討論。
- 曲線縮短流與幾何不等式的關聯性。
- 曲線縮短流過渡至均曲率流 (mean curvature flow) 之問題發展。
- 曲線縮短流與影像處理的應用與發展。

Langford, Mathew: Curvature flows and applications, PPT file, 2013.

https://maths-people.anu.edu.au/~langford/CurvatureFlowsandApplications.pdf