暑期大專生專題研究計畫—曲線縮短流理論

李國瑋
國立彰化師範大學數學系

NCTS USRP
110年7月28日

介紹

- 本演講將介紹球面上的曲線縮短流理論, 主要理論、定理與證明是以下面文章為主:

  Gage, Michael E.: Curve shortening on surfaces. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **23** (1990), no. 2, 229–256.

- 上述文章中是討論更一般的情況, 但這裡先做一些簡化, 討論大空間具有正的常數曲率的情況。

球面上的曲線縮短流—初始曲線

考慮 $\mathbb{S}^2(R) \subset \mathbb{R}^3$, 而 $\gamma_0 : u \in [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2(R)$ 是落在 $\mathbb{S}^2(R)$ 上的一條簡單封閉光滑正則曲線 (simple closed smooth regular curve), 即

- $\gamma_0(0) = \gamma_0(2\pi)$。 (封閉)
- 若 $\gamma_0(u) = (x(u), y(u), z(u))$, 則 $x(u), y(u), z(u) \in C^\infty((0, 2\pi))$。至於曲線在 $\gamma_0(0)$ 與 $\gamma_0(2\pi)$ 處, 要求 $\lim\limits_{u \to 0^+} \gamma_0^{(n)}(u) = \lim\limits_{u \to 2\pi^-} \gamma_0^{(n)}(u)$ 對所有 $n \in \mathbb{N}$。 (光滑)
- 對所有 $u \in [0, 2\pi]$ 都有 $\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \gamma_0(u) \right\| \neq 0$。 (正則)
- 對所有 $u_1, u_2 \in [0, 2\pi), u_1 \neq u_2$ 都有 $\gamma_0(u_1) \neq \gamma_0(u_2)$。 (簡單)

曲線縮短流

考慮映射 $\mathbf{X}:(u,t)\in[0,2\pi]\times[0,\varepsilon)\to\mathbb{S}^2(R)$ 使得固定 $t_0\in[0,\varepsilon)$ 之下，$\gamma_{t_0}(u)\overset{\text{定義}}{=\!=}\mathbf{X}(u,t_0)$ 都是在 $\mathbb{S}^2(R)$ 上的一條封閉曲線。於是 $\{\gamma_t(u)\}_{t\in[0,\varepsilon)}$ 在幾何圖形來看是一族曲線隨 t 變化下在球面上變動。

曲線族 $\{\gamma_t(u)\}_{t\in[0,\varepsilon)}$ 在球 $\mathbb{S}^2(R)$ 的 曲線縮短流 (curve shortening flow) 是指映射 $\mathbf{X}(u,t)$ 滿足以下偏微分方程式:

$$\begin{cases}(\mathbf{X}_t(u,t))^{\perp}=k(u,t)\mathbf{N}(u,t)\\ \mathbf{X}(u,0)=\gamma_0(u),\end{cases}$$

其中 $k(u,t)$ 表示 $\gamma_t(u)$ 在 u 處的測地曲率，而 $\mathbf{N}(u,t)\in T_{\gamma_t(u)}\mathbb{S}^2(R)$ 表示與球面定向一致且與曲線切向量 $\mathbf{T}(u,t)=\frac{\mathbf{X}_u(u,t)}{\|\mathbf{X}_u(u,t)\|}$ 垂直的單位法向量；換言之，法向量 $\mathbf{N}$ 的選取是讓有序基底 $\{\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{X}\}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中滿足右手定則。而 $(\cdot)^{\perp}$ 表示在切平面上的向量投影到法向量的部份。

三個疑問

(1) 偏微分方程式為什麼可以解?

這個問題在數學上稱為偏微分方程式的短時間存在性 (short time existence); 若能說明映射 $\mathbf{X}(u,t)$ 在初始曲線 $\gamma_0(u)=\mathbf{X}(u,0)$ 上的任何一點 p, 都存在一個鄰域還有一組新的變數使得將曲線縮短流這個偏微分方程式限制在這個鄰域上用新的變數表達會是一個正定的拋物型偏微分方程式 (positive definite parabolic partial differential equation); 這麼一來, 再根據初始曲線對於參數的緊緻性 (可以用有限個區段拼貼) 以及標準的偏微分方程式理論就能得知短時間存在性。

三個疑問

(2) 為什麼這個偏微分方程式會稱為曲線縮短流?

這裡要從偏微分方程式對應到的幾何意義繼續觀察, 若用 $L(t)$ 表示曲線 $\gamma_t(u)$ 的長度 (length), 可以推導出曲線長度的演化方程式 (evolution equation) 為 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\int_{\gamma_t} (k(s,t))^2 \,\mathrm{d}s$, 其中 s 是弧長參數 (arc length parameter)。而 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \leq 0$ 這個結果告知曲線的長度隨 t 變化而遞減, 所以這個幾何流會造成曲線縮短的現象。事實上, 可以更進一步地分析得知: 若曲線 $\gamma_t(u)$ 處處沿著 $k(u,t)\mathbf{N}(u,t)$ 的方向及大小變動時, 曲線長度遞減的程度會最大。所以在一族曲線的長度泛函 (functional of length) 的意義下, $k(u,t)\mathbf{N}(u,t)$ 為負的梯度向量。

三個疑問

(3) 偏微分方程式與幾何分析之間如何過渡?

曲線縮短流中, 我們對於初始封閉曲線採用 $\gamma_0 : u \in [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2(R)$ 的方式定義, 若以拓樸學來說, 一條封閉曲線應該是用 $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^2(R)$ 的方式理解它, 因為 $\mathbb{S}^1$ 可以直接詮釋封閉的現象。

而現在參數的定義域是使用 $[0, 2\pi]$ 閉區間表達, 此時就必須顧慮到曲線被端點 $u = 0$ 與 $u = 2\pi$ 映射時的現象, 故要求對所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 都有 $\lim_{u \to 0^+} \gamma_0^{(n)}(u) = \lim_{u \to 2\pi^-} \gamma_0^{(n)}(u)$。採用 $u \in [0, 2\pi]$ 的方式呈現封閉曲線, 主要用意是這樣可以直接和偏微分方程式的理論有所對應, 現今偏微分方程式理論, 其函數的定義域都是以歐氏空間中的某個子集合為考量。

主要定理

定理 (Gage, 1990)

給定半徑為 $R = \frac{1}{C}$ 的球 $\mathbb{S}^2(R) \subset \mathbb{R}^3$, 考慮曲線 γ_0 是一條將球的表面積等分的簡單封閉光滑正則曲線, 若曲線的全空間曲率 (total space curvature) $\int_{\gamma_0} w(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{定義}}{=\!=} \int_{\gamma_0} ((k(s))^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s < 3\pi$, 則對於以 γ_0 為初始曲線的曲線縮短流會有以下結果:

(A) 長時間存在性 (long time existence): 映射 $\mathbf{X}(u,t)$ 在 $t \in [0,\infty)$ 都有定義而且滿足偏微分方程式。

(B) 收斂性 (convergence): 曲線經過曲線縮短流之下將收斂到大圓 (great circle)。換言之, 映射 $\mathbf{X}(u,t)$ 對於 t 可找到數列 t_n, 對於 n 取極限下的曲線 $\gamma_\infty(u) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \gamma_{t_n}(u) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}(u,t_n)$ 存在, 並且 $\gamma_\infty(u)$ 在 $\mathbb{S}^2(R)$ 上的軌跡是 $\mathbb{S}^2(R)$ 與空間中通過坐標中心的平面之交集。

證明思路

- 將幾何量的演化方程式算出，用偏微分方程式與幾何的手法得到對於方程式的解的行為，將結果解讀回幾何的意義。
- 原始演化方程式可能無法直接推論出結果，需要發揮想像與創造力嘗試。
- 偏微分方程式的理論日趨成熟下，許多手法都可以拿來解決幾何問題。

符號設定

引進聯絡 (connection) ∇ 表示子流形的共變微分。給定 $p \in \gamma_t(u)$, 因為 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ 形成一組定義在切平面 $T_p\mathbb{S}^2(R)$ 上的單位正交基底, 所以

$$\nabla_{\mathbf{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \xlongequal{\text{定義}} \begin{bmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix},$$

記 $\mathbf{V} = \mathbf{X}_t = k\mathbf{N}$, 並引進符號 $U = \|\mathbf{X}_u\|$, 得到 $\mathbf{X}_u = U\mathbf{T}$。

- $[\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_u] = [\mathbf{V}, U\mathbf{T}] \equiv 0$。
- $[\mathbf{V}, \mathbf{T}] = -\frac{U_t}{U}\mathbf{T} = k^2\mathbf{T}$。
- $\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{T} = k_s\mathbf{N}$。
- $\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{N} = -k_s\mathbf{T}$。

函數時間與空間 (弧長參數) 微分互換的結果

若 f 是一個定義在 $\gamma_t(u)$ 上的函數, 由

$$[\mathbf{V}, \mathbf{T}] = k^2 \mathbf{T}$$

得到

$$[\mathbf{V}, \mathbf{T}](f) = (\mathbf{VT} - \mathbf{TV})(f) = k^2 \mathbf{T}(f) \Rightarrow f_{st} = f_{ts} + k^2 f_s。$$

結論: 流形上的函數在時間與空間 (弧長參數) 微分互換之下總是會多出曲率有關的量。

測地曲率的演化方程式 $k_t = k_{ss} + k^3 + Kk$

因為

$$k_t = \frac{\partial}{\partial t}\langle k\mathbf{N}, \mathbf{N}\rangle = \mathbf{V}\langle \mathbf{V}, \mathbf{N}\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V}, \mathbf{N}\rangle + \langle \mathbf{V}, \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{N}\rangle = \langle \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V}, \mathbf{N}\rangle$$

而

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V} &= \nabla_{\mathbf{V}}(k\mathbf{N}) = \nabla_{\mathbf{V}}\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{T}}\nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{T} + \nabla_{[\mathbf{V},\mathbf{T}]}\mathbf{T} + R(\mathbf{V},\mathbf{T})\mathbf{T} \\ &= \nabla_{\mathbf{T}}(k_s\mathbf{N}) + k^2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + kR(\mathbf{N},\mathbf{T})\mathbf{T} \\ &= k_{ss}\mathbf{N} - kk_s\mathbf{T} + k^3\mathbf{N} + kR(\mathbf{N},\mathbf{T})\mathbf{T},\end{aligned}$$

所以

$$k_t = \langle \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{V}, \mathbf{N}\rangle = \langle k_{ss}\mathbf{N} - kk_s\mathbf{T} + k^3\mathbf{N} + kR(\mathbf{N},\mathbf{T})\mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle = k_{ss} + k^3 + Kk,$$

其中 $K = \langle R(\mathbf{N},\mathbf{T})\mathbf{T}, \mathbf{N}\rangle$ 表示球面 $\mathbb{S}^2(R)$ 的高斯曲率。

曲線弧長的演化方程式 $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -\int_{\gamma_t} k^2\,\mathrm{d}s$

因為 $L(t) = \int_{\gamma_t} \mathrm{d}s = \int_I \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_I \langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T} \rangle^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_I U\,\mathrm{d}u$, 則

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = \int_I \mathbf{V}\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \int_I \frac{\langle \nabla_{\mathbf{V}}(U\mathbf{T}), U\mathbf{T}\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}u = \int_I \frac{\langle \nabla_{U\mathbf{T}}\mathbf{V}, U\mathbf{T}\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_I \left(U\mathbf{T}\left(\frac{\langle \mathbf{V}, U\mathbf{T}\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{\langle \mathbf{V}, \nabla_{U\mathbf{T}}(U\mathbf{T})\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}} + \frac{\langle \mathbf{V}, U\mathbf{T}\rangle\langle \nabla_{U\mathbf{T}}(U\mathbf{T}), U\mathbf{T}\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{3}{2}}} \right)\mathrm{d}u,$$

因為 $\langle \mathbf{V}, U\mathbf{T}\rangle \equiv 0$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = \int_I -\frac{\langle \mathbf{V}, \nabla_{U\mathbf{T}}(U\mathbf{T})\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}u = \int_I -\frac{\langle \mathbf{V}, U(\mathbf{T}(U)\mathbf{T} + U\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T})\rangle}{\langle U\mathbf{T}, U\mathbf{T}\rangle^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_I -\frac{\langle k\mathbf{N}, U^2\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T}\rangle}{U}\,\mathrm{d}u = \int_I -\frac{\langle k\mathbf{N}, U^2 k\mathbf{N}\rangle}{U}\,\mathrm{d}u = \int_I -k^2 U\,\mathrm{d}u = \int_{\gamma_t} -k^2\,\mathrm{d}s。$$

曲率積分的演化方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_t} k\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t} Kk\,\mathrm{d}s$

證明.

直接計算得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_t} k\,\mathrm{d}s &= \int_{\gamma_t} (k_t + k(-k^2))\,\mathrm{d}s \\ &= \int_{\gamma_t} (k_{ss} + k^3 + Kk + k(-k^2))\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t} Kk\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 得知 $\int_{\gamma_t} k_{ss}\,\mathrm{d}s = 0$。 □

函數 $w = (k^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$ 滿足以下演化方程式

引理

函數 $w = (k^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$ 表示曲線 $\gamma_t(s)$ 視為 $\mathbb{R}^3$ 的空間曲線的曲率。則

$$\begin{aligned} w_t &= w_{ss} - \frac{C^2 w_s^2}{w(w^2 - C^2)} + w(w^2 - C^2) \\ &= w_{ss} - \frac{C^2 k_s^2}{w^3} + w(w^2 - C^2)。 \end{aligned}$$

注意到上述演化方程式的兩種表示法中，其關係式為 $\frac{w_s^2}{w^2 - C^2} = \frac{k_s^2}{w^2}$。而使用後者表達之用意在於我們可以看出此方程式是處處有定義的 (沒有退化)。

曲線全曲率 $\int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s$ 是隨時間遞減的函數。

證明.

因為 $\int_{\gamma_t} w_{ss}\,\mathrm{d}s = 0$ 以及 $w^2 - C^2 = k^2$, 計算

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s &= \int_{\gamma_t}\left(w_{ss} - \frac{C^2 w_s^2}{w(w^2 - C^2)} + w(w^2 - C^2) - k^2 w\right)\mathrm{d}s \\
&= -\int_{\gamma_t}\frac{C^2 w_s^2}{w(w^2 - C^2)}\,\mathrm{d}s \le 0,
\end{aligned}
$$

所以曲線的全曲率 $\int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s$ 是一個隨著時間而遞減的函數。 □

兩個幾何量 $k_\theta^*(t)$ 與 $w_\theta^*(t)$

給定 $\theta > 0$, 觀察曲線 $\gamma_t(u) : u \in [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2(R) \subset \mathbb{R}^3$,

(A) 若存在一個區間 I 使得 $\int_{\gamma_t(I)} |k(s,t)|\, \mathrm{d}s \geq \theta$, 記

$$k_\theta^*(t, I) = \sup\{m \in \mathbb{R} \,|\, |k(u,t)| > m \text{ 對所有 } u \in I\},$$

並定義 $k_\theta^*(t) = \sup_I \{k_\theta^*(t, I)\}$。

若不存在區間 I 使得 $\int_{\gamma_t(I)} |k(s,t)|\, \mathrm{d}s \geq \theta$; 也就是說, 如果 $\int_{\gamma_t} |k(s,t)|\, \mathrm{d}s < \theta$, 則定義 $k_\theta^*(t) = \min\{|k(u,t)| \,|\, u \in [0, 2\pi]\}$。

兩個幾何量 $k^*_\theta(t)$ 與 $w^*_\theta(t)$

給定 $\theta > 0$, 觀察曲線 $\gamma_t(u) : u \in [0, 2\pi] \to \mathbb{S}^2(R) \subset \mathbb{R}^3$,

(B) 若存在一個區間 I 使得
$\int_{\gamma_t(I)} \frac{(k(s,t))^2}{w(s,t)} \,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t(I)} \frac{(k(s,t))^2}{((k(s,t))^2+C^2)^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}s > \theta$, 記

$$w^*_\theta(t, I) = \sup\{m \in \mathbb{R} \,|\, |w(u,t)| > m \text{ 對所有 } u \in I\},$$

並定義 $w^*_\theta(t) = \sup\limits_I \{w^*_\theta(t, I)\}$。

若不存在區間 I 使得 $\int_{\gamma_t(I)} \frac{(k(s,t))^2}{w(s,t)} \,\mathrm{d}s > \theta$, 也就是說, 如果
$\int_{\gamma_t(I)} \frac{(k(s,t))^2}{w(s,t)} \,\mathrm{d}s \le \theta$, 則定義 $w^*_\theta(t) = \min\{|w(u,t)| \,|\, u \in [0, 2\pi]\}$。

證明流程

假設曲線縮短流這個偏微分方程式對 t 而言解的範圍是 $[0,T)$, 則

(A1) 由 $\int_{\gamma_0} w(s)\,\mathrm{d}s < 3\pi$ 這個假設, 證明 $w_\pi^*(t)$ 在 $t \in [0,T)$ 有上界。

(A2) 由 $w_\pi^*(t)$ 在 $t \in [0,T)$ 有界, 得到 $\int_{\gamma_t} w \cdot \ln(\frac{w}{C})\,\mathrm{d}s$ 在 $t \in [0,T)$ 有界。

(A3) 任給 $\theta \in (0,\pi]$, 證明 $k_\theta^*(t)$ 在 $t \in [0,T)$ 有界; 這個上界與 θ 有關。

(A4) 由 $k_\theta^*(t)$ 在 $t \in [0,T)$ 有界, 證明 $\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s$ 在 $t \in [0,T)$ 有界。

(A5) 證明 $\int_{\gamma_t} k_s^2\,\mathrm{d}s$ 在 $[0,T)$ 上有界。

(A6) 證明 $\|k\|_\infty(t) \stackrel{\text{定義}}{=\!=} \max_{u\in[0,2\pi]} |k(u,t)|$ 在 $[0,T)$ 上有界。

(A7) 證明對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\|k^{(n)}\|_\infty(t) \stackrel{\text{定義}}{=\!=} \max_{u\in[0,2\pi]} |k^{(n)}(u,t)|$ 在 $[0,T)$ 有界。

(A8) 完成曲線縮短流長時間存在性的論述。

測地曲率積分隨曲線縮短流之下始終為零

若 γ_0 是一條簡單封閉光滑正則曲線, 並且將球的表面積等分, 觀察封閉曲線及其包圍的一個區域 $D(0)$, 因為球 $\mathbb{S}^2(R)$ 的半徑為 R, 其高斯曲率為 $K=\frac{1}{R^2}=C^2$, 由高斯-伯內定理 (Gauss-Bonnet Theorem) 知:

$$\int_{\gamma_0} k\,\mathrm{d}s+\frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2+0=2\pi\cdot 1\Rightarrow\int_{\gamma_0} k\,\mathrm{d}s=0,$$

由演化方程得知:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_t} k\,\mathrm{d}s=\int_{\gamma_t} Kk\,\mathrm{d}s=K\int_{\gamma_t} k\,\mathrm{d}s。$$

記 $f(t)=\int_{\gamma_t} k\,\mathrm{d}s$ 是定義在 $[0,T)$ 上的函數, 由微分方程式 $f'(t)=Kf(t)$ 的解 $f(t)=c\,\mathrm{e}^{Kt}$ 必須滿足初始條件 $f(0)=0$ 得到 $c=0$; 也就是說, 在曲線縮短流之下, 都有 $f(t)=\int_{\gamma_t} k\,\mathrm{d}s\equiv 0$。

面積等分隨曲線縮短流之下繼續保持

現觀察區域 $D(0)$ 在曲線縮短流之下面積改變的關係式。記 $D(t)$ 是封閉曲線 γ_t 所圍住的區域, 記 $A(t)$ 是區域 $D(t)$ 的面積。由曲面面積的一階變分公式 (first variation formula of surface area) 得知:

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t} = -\int_{\gamma_t} \langle k\mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \mathrm{d}s = -\int_{\gamma_t} k \, \mathrm{d}s = 0,$$

所以 $A(t) \equiv c_1$ 為常數, 又因為初始曲線 γ_0 將球 $\mathbb{S}^2(R)$ 分成表面積相同的兩個區域, 即

$$A(0) = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2 = 2\pi R^2,$$

得到 $A(t) \equiv 2\pi R^2$; 也就是說, 面積等分這個性質隨著曲線縮短流之下將一直保持。

等周不等式的一般情形

定理 (Bernstein-Schmidt)

若曲線 γ 是一條在球面 $\mathbb{S}^2(R)$ 上的簡單封閉曲線, 記曲線周長為 L, 而 $K=\frac{1}{R^2}$ 為球面的高斯曲率, 曲線圍住的區域面積為 A, 則

$$4\pi A \leq L^2 + KA^2。$$

透過等周不等式 (isoperimetric inequality) 得知對所有 $t \in [0,T)$,

$$(L(t))^2 \geq A(t)(4\pi - KA(t)) = 2\pi R^2\left(4\pi - \frac{1}{R^2}\cdot 2\pi R^2\right) = 2\pi R^2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi^2}{C^2},$$

於是

$$L(t) \geq \frac{2\pi}{C}。$$

這表示將球表面積等分的曲線之長度隨曲線縮短流之下有一個正的下界。

根據上確界 (Supremum) 的性質, 對任意 $\varepsilon > 0$, 現取一個區間 I 使得 $\int_{\gamma_t(I)} |k|\,\mathrm{ds} = \pi$, 而且對所有 $u \in I$ 都有 $|k(u,t)| > k_\pi^*(t,I) - \varepsilon$, 由此得知

$$\pi = \int_{\gamma_t(I)} |k|\,\mathrm{ds} > \int_{\gamma_t(I)} (k_\pi^*(t,I) - \varepsilon)\,\mathrm{ds} = (k_\pi^*(t,I) - \varepsilon) \cdot L(\gamma_t(I))$$

於是

$$L(\gamma_t(I)) < \frac{\pi}{k_\pi^*(t,I) - \varepsilon} \Rightarrow L(\gamma_t - \gamma_t(I)) > \frac{2\pi}{C} - \frac{\pi}{k_\pi^*(t,I) - \varepsilon},$$

因為 $w(s,t) = ((k(s,t)^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$, 所以

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_t} w\,\mathrm{ds} &= \int_{\gamma_t(I)} w\,\mathrm{ds} + \int_{\gamma_t - \gamma_t(I)} w\,\mathrm{ds} \geq \int_{\gamma_t(I)} |k|\,\mathrm{ds} + \int_{\gamma_t - \gamma_t(I)} |C|\,\mathrm{ds} \\ &\geq \pi + C\left(\frac{2\pi}{C} - \frac{\pi}{k_\pi^*(t,I) - \varepsilon}\right) = 3\pi - \frac{C\pi}{k_\pi^*(t,I) - \varepsilon},\end{aligned}$$

得到

$$\frac{C\pi}{k_\pi^*(t,I) - \varepsilon} \geq 3\pi - \int_{\gamma_t} w\,\mathrm{ds},$$

證明 $k^*_\pi(t,I)$ 經曲線縮短流之下是一個均勻有界的量

現將這個不等式進行改寫, 則得到

$$\frac{k^*_\pi(t,I)-\varepsilon}{C\pi} \le \frac{1}{3\pi - \int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s},$$

再經整理之後就有

$$k^*_\pi(t,I) \le \varepsilon + \frac{C\pi}{3\pi - \int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s}。$$

因為 $\int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s$ 遞減有下界, 所以

$$k^*_\pi(t,I) \le \varepsilon + \frac{C\pi}{3\pi - \int_{\gamma_t} w\,\mathrm{d}s} \le \varepsilon + \frac{C\pi}{3\pi - \int_{\gamma_0} w\,\mathrm{d}s} \overset{記}{=} C_1,$$

於是 $k^*_\pi(t,I)$ 經曲線縮短流之下是一個均勻有界的量, 而且 $k^*_\pi(t) = \sup\limits_I \{k^*_\pi(t,I)\}$ 是一個有界的量。

證明 $w_\pi^*(t)$ 在曲線縮短流之下也是有界的量

函數 $k_\theta^*(t)$ 與 $w_\theta^*(t)$ 之間滿足以下關係:

$$k_\theta^*(t) \geq ((w_\theta^*(t))^2 - C^2)^{\frac{1}{2}} \quad 或 \quad (k_\theta^*(t))^2 + C^2 \geq (w_\theta^*(t))^2。$$

特別地, 取 $\theta = \pi$ 之下, 可得 $(w_\pi^*(t))^2 \leq (k_\pi^*(t))^2 + C^2$; 也就是說, 只要 $k_\pi^*(t)$ 有上界, 則 $w_\pi^*(t)$ 也有上界。
假設 $k_\theta^*(t) < ((w_\theta^*(t))^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}$, 則存在一個區間 I 使得 $\int_{\gamma_t(I)} \frac{k^2}{w}\,\mathrm{d}s \geq \theta$ 而且 $w_\theta^*(t, I) > ((k_\theta^*(t))^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}$, 所以存在 $m' \in \mathbb{R}$ 使得

$$((k(u,t))^2 + C^2)^{\frac{1}{2}} = |w(u,t)| > m' > ((k_\theta^*(t))^2 + C^2)^{\frac{1}{2}},$$

得到

$$(k(u,t))^2 > (m')^2 - C^2 > (k_\theta^*(t))^2,$$

矛盾。因此 $k_\theta^*(t) \geq ((w_\theta^*(t))^2 - C^2)^{\frac{1}{2}}$。

證明 $\int_{\gamma_t} w \cdot \ln(\frac{w}{C})\, \mathrm{d}s$ 在 $t \in [0, T)$ 有界

命題

若在 $[0, T)$ 上 $w_\pi^*(t) \leq C_1$, 則 $\int_{\gamma_t} w \cdot \ln(\frac{w}{C})\, \mathrm{d}s$ 在 $[0, T)$ 上有界。也就是說, 我們有以下估計式:

$$\int_{\gamma_t} w \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right) \mathrm{d}s \leq C_2,$$

其中 $C_2 = C_2(\gamma_0)$ 是一個只與初始曲線 γ_0 有關的常數。

$\int_{\gamma_t} w \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right)\, \mathrm{d}s$ 的演化方程式

因為 $k^2 = w^2 - C^2$, 首先求得關於 $\int_{\gamma_t} w \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right)\, \mathrm{d}s$ 的演化方程式:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_t} w \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right)\, \mathrm{d}s &= \int_{\gamma_t} -\frac{w_s^2}{w} - \frac{C^2 w_s^2}{w(w^2 - C^2)} \cdot \left(\ln\left(\frac{w}{C}\right) + 1\right) + w(w^2 - C^2)\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} -\frac{w_s^2 w}{w^2 - C^2} - \frac{C^2 w_s^2}{w(w^2 - C^2)} \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right) + w(w^2 - C^2)\, \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\gamma_t} -\frac{w_s^2 w}{w^2 - C^2} + w(w^2 - C^2)\, \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

關於這個演化方程, 我們需要想辦法利用前面的負項 $-\frac{w_s^2 w}{w^2 - C^2}$ 去控制後面的正項 $w(w^2 - C^2)$。

維廷格不等式 (Wirtinger's Inequality)

引理

假設 $f(x) \in C^\infty((0,\pi)) \cap C^0([0,\pi])$, 而且滿足 $f(0) = f(\pi) = 0$ 以及 $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$ 與 $\lim_{x\to\pi^-} f'(x)$ 皆存在, 則

$$\int_0^\pi (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \le \int_0^\pi (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x,$$

等號成立的時候若且唯若 $f(x) = a\sin x$, 其中 $a \in \mathbb{R}$。

注意到上述的維廷格不等式在伸縮變換之下會對應到不同的常數; 也就是說,

$$\int_{x=0}^{x=\delta} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \le \frac{\delta^2}{\pi^2} \int_{x=0}^{x=\delta} \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x。$$

固定 $t \in [0,T)$, 現將曲線 $\gamma_t(u)$ 的參數 u 分成兩部份 $[0,2\pi] = E \cup J$, 其中集合 E 滿足 $E = \{u | w(u,t) > w^*_\theta(t)\}$, 而且可以表示成可數多個不自交的開區間之聯集 $E = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$, 而集合 J 是 E 對於 $[0,2\pi]$ 的補集。
引進變數變換

$$\mathrm{d}\theta = \frac{w^2 - C^2}{w}\,\mathrm{d}s = \frac{k^2}{w}\,\mathrm{d}s,$$

於是對所有 I_i 都有

$$\int_{\gamma_t(I_i)} -\frac{w_s^2 w}{w^2 - C^2}\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t(I_i)} -w_\theta^2\,\mathrm{d}\theta$$
$$\int_{\gamma_t(I_i)} w(w^2 - C^2)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t(I_i)} w^2\,\mathrm{d}\theta$$

因為在 $\gamma_t(I_i)$ 上, 函數 w 的邊界值是 w_π^*, 所以利用維廷格不等式 (Wirtinger's Inequality) 得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_t(I_i)} -\frac{w_s^2 w}{w^2 - C^2} + w(w^2 - C^2)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t(I_i)} (-w_\theta^2 + w^2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\gamma_t(I_i)} (-w_\theta^2 + (w - w_\pi^*)^2 + 2ww_\pi^* - w_\pi^*)\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_{\gamma_t(I_i)} (2ww_\pi^* - w_\pi^*)\,\mathrm{d}\theta \leq \int_{\gamma_t(I_i)} 2ww_\pi^*\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2w_\pi^* \int_{\gamma_t(I_i)} w\,\mathrm{d}\theta = 2w_\pi^* \int_{\gamma_t(I_i)} k^2\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

至於 $w \le w_\pi^*$ 的部份, 我們有

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_t(J)} -\frac{w_s^2 w}{w^2 - C^2} + w(w^2 - C^2)\,\mathrm{d}s &\le \int_{\gamma_t(J)} w(w^2 - C^2)\,\mathrm{d}s \\ &\le \int_{\gamma_t(J)} w_\pi^* \cdot k^2\,\mathrm{d}s \le 2w_\pi^* \int_{\gamma_t(J)} k^2\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

將上述結果合併, 則有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma_t} w \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right)\,\mathrm{d}s \le 2w_\pi^* \int_{\gamma_t} k^2\,\mathrm{d}s \le 2C_1 \int_{\gamma_t} k^2\,\mathrm{d}s = -2C_1\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t},$$

所以兩邊對於 t 積分之後則有

$$\left[\int_{\gamma_t} w\cdot\ln\left(\frac{w}{C}\right)\,\mathrm{d}s\right]\Bigg|_0^t \leq \Big[-2C_1L(t)\Big]\Big|_0^t,$$

也就是說,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_t} w\cdot\ln\left(\frac{w}{C}\right)\,\mathrm{d}s &\leq \int_{\gamma_0} w\cdot\ln\left(\frac{w}{C}\right)\,\mathrm{d}s+2C_1(L(0)-L(t))\\ &\leq \int_{\gamma_0} w\cdot\ln\left(\frac{w}{C}\right)\,\mathrm{d}s+2C_1L(0)\overset{\text{記}}{=}C_2,\end{aligned}$$

其中 $C_2=\int_{\gamma_0} w\cdot\ln\left(\frac{w}{C}\right)\,\mathrm{d}s+2C_1L(0)$ 是一個在給定初始曲線 γ_0 之下就可以完全確定的常數。

給定 $\theta \in (0,\pi]$, 則 $k_\theta^*(t)$ 在 $t \in [0,T)$ 有界

命題

若在 $[0,T)$ 上 $w_\pi^*(t) \le C_1$, 給定 $\theta \in (0,\pi]$, 則 $k_\theta^*(t) \le C\,\mathrm{e}^{\frac{C_2}{\theta}}$。

若有一個區間 I 使得 $\int_{\gamma_t(I)} |k|\,\mathrm{d}s \ge \theta$, 任取某一個 $m > 0$ 使得對所有 $u \in I$ 都有 $|k(u,t)| > m$, 則

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_t(I)} w \cdot \ln\left(\frac{w}{C}\right) \mathrm{d}s &= \int_{\gamma_t(I)} w \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{k^2+C^2}}{C}\right) \mathrm{d}s \ge \int_{\gamma_t(I)} w \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C}\right) \mathrm{d}s \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C}\right) \cdot \int_{\gamma_t(I)} \sqrt{k^2+C^2}\,\mathrm{d}s \\
&\ge \ln\left(\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C}\right) \cdot \int_{\gamma_t(I)} |k|\,\mathrm{d}s \ge \ln\left(\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C}\right) \cdot \theta。
\end{aligned}$$

由前面的討論知道

$$\ln\left(\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C}\right)\cdot\theta \leq C_2 \Rightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C}\right) \leq \frac{C_2}{\theta}$$

於是

$$\frac{\sqrt{m^2+C^2}}{C} \leq \mathrm{e}^{\frac{C_2}{\theta}} \Rightarrow m \leq \sqrt{m^2+C^2} \leq C\,\mathrm{e}^{\frac{C_2}{\theta}},$$

對於 m 取上確界之下則有

$$k_\theta^*(t,I) \leq C\,\mathrm{e}^{\frac{C_2}{\theta}},$$

最後再對於區間 I 取上確界則有 $k_\theta^*(t) \leq C\,\mathrm{e}^{\frac{C_2}{\theta}}$。

若 $k_\theta^*(t)$ 在 $t \in [0,T)$ 有界, 則 $\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s$ 在 $t \in [0,T)$ 有界

引理

若在 $[0,T)$ 上 $w_\pi^*(t) \le C_1$, 則存在 $C_5 = C_5(\gamma_0), C_6 = C_6(\gamma_0)$ 使得

$$\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s \le (C_5 + C_6 T)^4。$$

首先計算

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s\right) &= \int_{\gamma_t} \left(6k^5 k_t + k^6(-k^2)\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} \left(6k^5(k_{ss} + k^3 + Kk) + k^8\right)\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} \left(-30k^4k_s^2 + 5k^8 + 6Kk^6\right)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

關於這個演化方程式, 其困難點在於它具有高次項 k^8 與 $6Kk^6$。

至於要如何克服這個困難, 選取 $\delta_0 > 0$ 滿足 $\frac{\delta_0^2}{\pi^2} = \frac{20}{49}$, 由維廷格不等式 (Wirtinger's Inequality) 得知: 對於 $\int_{\gamma_t(I)} \mathrm{d}\theta \leq \delta_0$ 都有

$$\int_{\gamma_t(I)} f^2 \, \mathrm{d}\theta \leq \frac{\delta_0^2}{\pi^2} \int_{\gamma_t(I)} f_\theta^2 \, \mathrm{d}\theta,$$

令 $C_3 = \max(\sqrt{6K}, k^*_{\delta_0}([0,T)))$, 其中 $C_3 = C_3(\gamma_0)$。特別注意到: 因為 δ_0 為常數, 所以由 (A3) 的結論知道: $k^*_{\delta_0}([0,T)) \leq C\mathrm{e}^{\frac{C_2}{\delta_0}}$, 此上界只與初始曲線 γ_0 有關。現將曲線分成三個部份: $\mathbb{S}^1 = I_+ \cup I_- \cup J$, 其中 $I = I_+ \cup I_- = \{u | k(u,t) > C_3\} \cup \{u | k(u,t) < -C_3\}$, 而 J 是 I 對於 $\mathbb{S}^1$ 的補集。

先討論集合 I_+ 上的情況, 因為 $k(u,t) > C_3$ ，而且 $\mathrm{d}\theta = k\mathrm{d}s$ ，所以

$$\int_{\gamma_t(I_+)} (-30k^4k_s^2 + 5k^8 + 6Kk^6)\,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 5k^7 + 6Kk^5\right)\mathrm{d}\theta$$
$$\le \int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 5k^7 + (C_3)^2k^5\right)\,\mathrm{d}\theta$$
$$\le \int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 5k^7 + k^2k^5\right)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6k^7\right)\,\mathrm{d}\theta,$$

由維廷格不等式 (Wirtinger's Inequality), 將不等式繼續改寫而得

$$\int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6k^7\right)\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6(k^{\frac{7}{2}} - (C_3)^{\frac{7}{2}})^2 + 12(C_3)^{\frac{7}{2}}k^{\frac{7}{2}} - 6(C_3)^7\right)\,\mathrm{d}\theta$$
$$\le \int_{\gamma_t(I_+)} \left(-\frac{120}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6\cdot\frac{20}{49}((k^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 12(C_3)^{\frac{7}{2}}k^{\frac{7}{2}} - 6(C_3)^7\right)\,\mathrm{d}\theta$$
$$\le 12(C_3)^{\frac{7}{2}}\int_{\gamma_t(I_+)} k^{\frac{7}{2}}\,\mathrm{d}\theta = 12(C_3)^{\frac{7}{2}}\int_{\gamma_t(I_+)} |k|^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}s。$$

接著討論集合 I_- 上的情況, 因為 $k(u,t) < -C_3$, 而且 $(-\mathrm{d}\theta) = (-k)\mathrm{d}s$, 所以

$$\int_{\gamma_t(I_-)} (-30k^4k_s^2 + 5k^8 + 6Kk^6)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\gamma_t(I_-)} \left(-\frac{120}{49}(((-k)^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 5(-k)^7 + 6K(-k)^5\right)(-\mathrm{d}\theta),$$

因為 $6K \le (C_3)^2 \le (-k)^2$, 所以

$$\int_{\gamma_t(I_-)} (-30k^4k_s^2 + 5k^8 + 6Kk^6)\,\mathrm{d}s \le \int_{\gamma_t(I_-)} -\frac{120}{49}(((-k)^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6(-k)^7\,(-\mathrm{d}\theta),$$

由維廷格不等式 (Wirtinger's Inequality), 將不等式繼續改寫而得

$$\int_{\gamma_t(I_-)} \left(-\frac{120}{49}(((-k)^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6(-k)^7\right)(-\mathrm{d}\theta)$$

$$= \int_{\gamma_t(I_-)} \left(-\frac{120}{49}(((-k)^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6((-k)^{\frac{7}{2}} - (C_3)^{\frac{7}{2}})^2 + 12(C_3)^{\frac{7}{2}}(-k)^{\frac{7}{2}} - 6(C_3)^7\right)(-\mathrm{d}\theta)$$

$$\le \int_{\gamma_t(I_-)} \left(-\frac{120}{49}(((-k)^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 6\cdot\frac{20}{49}(((-k)^{\frac{7}{2}})_\theta)^2 + 12(C_3)^{\frac{7}{2}}(-k)^{\frac{7}{2}} - 6(C_3)^7\right)(-\mathrm{d}\theta)$$

$$\le 12(C_3)^{\frac{7}{2}} \int_{\gamma_t(I_-)} (-k)^{\frac{7}{2}}\,(-\mathrm{d}\theta) = 12(C_3)^{\frac{7}{2}} \int_{\gamma_t(I_-)} |k|^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}s。$$

至於在集合 J 上, 則有 $|k(u,t)| \leq C_3$, 所以

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_t(J)} \left(-30k^4k_s^2 + 5k^8 + 6Kk^6\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t(J)} \left(-30k^4k_s^2 + 5|k|^{\frac{9}{2}} \cdot |k|^{\frac{7}{2}} + 6K|k|^{\frac{9}{2}} \cdot |k|^{\frac{3}{2}}\right) \mathrm{d}s \\
&\leq \int_{\gamma_t(J)} \left(5 \cdot |k|^{\frac{9}{2}} \cdot (C_3)^{\frac{7}{2}} + (C_3)^2 \cdot |k|^{\frac{9}{2}} \cdot (C_3)^{\frac{3}{2}}\right) \mathrm{d}s \\
&= 6(C_3)^{\frac{7}{2}} \int_{\gamma_t(J)} |k|^{\frac{9}{2}} \,\mathrm{d}s \leq 12(C_3)^{\frac{7}{2}} \int_{\gamma_t(J)} |k|^{\frac{9}{2}} \,\mathrm{d}s。
\end{aligned}
$$

將兩者結果合併，並且利用赫德爾不等式 (Hölder's Inequality) 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s\right) &\le 12(C_3)^{\frac{7}{2}}\int_{\gamma_t}|k|^{\frac{9}{2}}\,\mathrm{d}s = 12(C_3)^{\frac{7}{2}}\int_{\gamma_t}\left(1\cdot|k|^{\frac{9}{2}}\right)\mathrm{d}s\\ &\le 12(C_3)^{\frac{7}{2}}\left(\int_{\gamma_t}1^4\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{4}}\left(\int_{\gamma_t}(|k|^{\frac{9}{2}})^{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{3}{4}} = C_4\left(\int_{\gamma_t}k^6\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{3}{4}},\end{aligned}$$

令函數 $f(t)=\int_{\gamma_t}k^6\,\mathrm{d}s$ 滿足微分不等式：$f'(t)\le C_4(f(t))^{\frac{3}{4}}$，於是對於 $t\in[0,T)$ 都有

$$\begin{aligned}\frac{f'(t)}{(f(t))^{\frac{3}{4}}}\le C_4 &\Rightarrow \int_0^t\frac{f'(x)}{(f(x))^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x\le\int_0^t C_4\,\mathrm{d}x \Rightarrow \left[4(f(x))^{\frac{1}{4}}\right]\Big|_0^t\le C_4(t-0)\le C_4T\\ &\Rightarrow 4\left((f(t))^{\frac{1}{4}}-(f(0))^{\frac{1}{4}}\right)\le C_4T\Rightarrow f(t)\le\left((f(0))^{\frac{1}{4}}+\frac{C_4}{4}T\right)^4。\end{aligned}$$

最後，記 $C_5=(f(0))^{\frac{1}{4}}$ 以及 $C_6=\frac{C_4}{4}$ 則有最後的結果。記 $M_2=(C_5+C_6T)^4$，其中 $M_2=M_2(\gamma_0,T)$。

證明 $\int_{\gamma_t} k_s^2 \,\mathrm{d}s$ 在 $[0,T)$ 上有界

引理

若 $\int_{\gamma_t} k^6 \,\mathrm{d}s$ 在 $[0,T)$ 上有界 $M_2 = M_2(\gamma_0, T)$, 則

$$\int_{\gamma_t} k_s^2 \,\mathrm{d}s \bigg|_t \le C_9 + C_8 C^2 L(0) + C_7 M_2 t,$$

其中 $t \in [0,T)$ 以及 C_7, C_8, C_9 為常數。

首先計算

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\gamma_t} k_s^2 \,\mathrm{d}s\right) &= \int_{\gamma_t} \left(2k_s k_{st} + k_s^2(-k^2)\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} \left(2k_s(k_{ts} + k^2 k_s) - k^2 k_s^2\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} \left(2k_s((k_{ss} + k^3 + Kk)_s + k^2 k_s) - k^2 k_s^2\right) \mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} 2k_s(k_{ss} + k^3 + Kk)_s \,\mathrm{d}s + \int_{\gamma_t} k^2 k_s^2 \,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_t} 2k_s \mathrm{d}(k_{ss} + k^3 + Kk) + \frac{1}{3}\int_{\gamma_t} k_s \,\mathrm{d}k^3 \\
&= \int_{\gamma_t} \left(-2k_{ss}^2 - \frac{7}{3}k^3 k_{ss} - 2Kk k_{ss}\right) \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

因為

$$\int_{\gamma_t} -\frac{7}{3}k^3 k_{ss}\,\mathrm{d}s = \frac{7}{3}\int_{\gamma_t} k_{ss}(-k^3)\,\mathrm{d}s \leq \frac{7}{3}\int_{\gamma_t}\left(\varepsilon k_{ss}^2 + \frac{(-k^3)^2}{4\varepsilon}\right)\mathrm{d}s$$
$$= \int_{\gamma_t}\left(\frac{7\varepsilon}{3}k_{ss}^2 + \frac{7}{12\varepsilon}k^6\right)\mathrm{d}s$$

以及

$$\int_{\gamma_t} -2Kkk_{ss}\,\mathrm{d}s = 2K\int_{\gamma_t} k_{ss}(-k)\,\mathrm{d}s \leq 2K\int_{\gamma_t}\left(\eta k_{ss}^2 + \frac{(-k)^2}{4\eta}\right)\mathrm{d}s$$
$$= \int_{\gamma_t}\left(2K\eta k_{ss}^2 + \frac{K^2}{2\eta}k^2\right)\mathrm{d}s,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\gamma_t} k_s^2\,\mathrm{d}s\right) &= \int_{\gamma_t}\left(-2k_{ss}^2 - \frac{7}{3}k^3 k_{ss} - 2Kkk_{ss}\right)\mathrm{d}s \\ &\le \int_{\gamma_t}\left(-2k_{ss}^2 + \frac{7\varepsilon}{3}k_{ss}^2 + \frac{7}{12\varepsilon}k^6 + 2K\eta k_{ss}^2 + \frac{K^2}{2\eta}k^2\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_{\gamma_t}\left(\left(-2 + \frac{7\varepsilon}{3} + 2K\eta\right)k_{ss}^2 + \frac{7}{12\varepsilon}k^6 + \frac{K^2}{2\eta}k^2\right)\mathrm{d}s。\end{aligned}$$

取 ε 與 η 夠小使得 $-2 + \frac{7\varepsilon}{3} + 2K\eta < 0$, 則

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\gamma_t} k_s^2\,\mathrm{d}s\right) &\le \frac{7}{12\varepsilon}\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s + \frac{K^2}{2\eta}\int_{\gamma_t} k^2\,\mathrm{d}s \le C_7\int_{\gamma_t} k^6\,\mathrm{d}s - C_8 C^2\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \\ &\le C_7 M_2 - C_7 C^2\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

所以積分後則有

$$\left[\int_{\gamma_t} k_s^2 \, \mathrm{d}s\right]\Big|_0^t \leq C_7 M_2 t - C_8 C^2 (L(t) - L(0)) \leq C_7 M_2 t + C_8 C^2 L(0)。$$

於是

$$\int_{\gamma_t} k_s^2 \, \mathrm{d}s\Big|_t \leq C_9 + C_7 M_2 t + C_8 C^2 L(0),$$

其中 $C_9 = \int_{\gamma_t} k_s^2 \, \mathrm{d}s\Big|_0$。
現在重新標記常數

$$\int_{\gamma_t} k_s^2 \, \mathrm{d}s\Big|_t \leq C_1 0 + M_3,$$

其中 $C_{10} = C_{10}(\gamma_0)$ 而 $M_3 = M_3(\gamma_0, T)$。

證明 $\|k\|_\infty(t)$ 在 $[0,T)$ 上有界

因為

$$\begin{aligned}
\|k\|_\infty(t) &= \|k\|_\infty(t) - \sqrt{(w_\pi^*(t))^2 - C^2} + \sqrt{(w_\pi^*(t))^2 - C^2} \\
&\leq \left| \|k\|_\infty(t) - \sqrt{(w_\pi^*(t))^2 - C^2} \right| + \sqrt{(w_\pi^*(t))^2 - C^2} \\
&\leq \left(\int_{\gamma_t} k_s^2 \, \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{(w_\pi^*(t))^2 - C^2} \\
&\leq (C_{10} + M_3)^{\frac{1}{2}} (L(0))^{\frac{1}{2}} + w_\pi^*(0),
\end{aligned}$$

所以 $\|k\|_\infty(t)$ 在 $[0,T)$ 上有界。

證明對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\|k^{(n)}\|_\infty(t)$ 在 $[0,T)$ 上有界

引理

對所有 $n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ 而言, $k^{(n)}(s)$ 在 $[0,T)$ 上有界。

(A) 當 $n = 0$, $\|k\|_\infty(t)$ 在 $[0,T)$ 上的有界性由前面的討論得知。

(B) 當 $n = 1$, 現計算

$$\begin{aligned}(k_s)_t &= (k_t)_s + k^2 k_s = \left(k_{ss} + k^3 + Kk\right)_s + k^2 k_s \\ &= (k_s)_{ss} + 3k^2 k_s + K k_s + k^2 k_s \\ &= (k_s)_{ss} + 4k^2 k_s + K k_s = (k_s)_{ss} + (4k^2 + K) k_s\text{。}\end{aligned}$$

令 $u = \mathrm{e}^{-\alpha t} k_s$, 其中 α 是一個待定的正數, 計算

$$\begin{aligned} u_t &= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} k_s + \mathrm{e}^{-\alpha t} (k_s)_t \\ &= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} k_s + \mathrm{e}^{-\alpha t} \left((k_s)_{ss} + (4k^2 + K) k_s \right) \\ &= u_{ss} + (4k^2 + K - \alpha) u, \end{aligned}$$

因為 $4k^2 + K$ 在 $[0, T)$ 上有界, 所以可以取到夠大的 α 使得在 $[0, T)$ 上都有 $4k^2 + K - \alpha < 0$。由最大值原理 (Maximum Principle) 得知:

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{-\alpha T} |k_s| \le \sup_{s \times (0,T)} |u| \le \sup_{t=0} |u| = \|k_s\|_\infty(0) \\ \Rightarrow & \|k_s\|_\infty(t) \le \mathrm{e}^{\alpha T} \|k_s\|_\infty(0)。 \end{aligned}$$

(C) 當 $n=2$, 現計算

$$
\begin{aligned}
(k_{ss})_t = (k_s)_{st} = (k_s)_{ts} + k^2(k_s)_s &= ((k_s)_{ss} + (4k^2+K)k_s)_s + k^2k_{ss} \\
&= (k_{ss})_{ss} + (8kk_s)k_s + (4k^2+K)k_{ss} + k^2k_{ss} \\
&= (k_{ss})_{ss} + (5k^2+K)k_{ss} + P(k,k_s),
\end{aligned}
$$

其中 $P(k,k_s)$ 表示由 k 與 k_s 所組成的多項式。

令 $u = \mathrm{e}^{-\alpha t} k_{ss} \mp \beta t$, 其中 α 與 β 都是待定的正數, 則

$$
\begin{aligned}
u_t &= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} k_{ss} + \mathrm{e}^{-\alpha t} (k_{ss})_t \mp \beta \\
&= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} k_{ss} + \mathrm{e}^{-\alpha t} \left((k_{ss})_{ss} + (5k^2 + K) k_{ss} + P(k, k_s) \right) \mp \beta \\
&= u_{ss} + (5k^2 + K - \alpha)(\mathrm{e}^{-\alpha t} k_{ss} \mp \beta t) \pm (5k^2 + K - \alpha) \beta t \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, k_s) \mp \beta \\
&= u_{ss} + (5k^2 + K - \alpha) u \pm (5k^2 + K - \alpha) \beta t + \mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, k_s) \mp \beta
\end{aligned}
$$

因為 $5k^2 + K$ 在 $[0, T)$ 上有界, 所以可以取到夠大的 α 使得在 $[0, T)$ 上都有 $5k^2 + K - \alpha < 0$。而 $P(k, k_s)$ 在 $[0, T)$ 上也是有界的, 所以再取夠大的 β 使得在 $[0, T)$ 上都有 $\mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, k_s) - \beta < 0 (> 0)$。

因為

$$
\begin{aligned}
0 &= u_{ss} + (5k^2 + K - \alpha)u - u_t \pm (5k^2 + K - \alpha)\beta t + \mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, k_s) \mp \beta \\
&\leq (\geq) u_{ss} + (5k^2 + K - \alpha)u - u_t \overset{\text{記}}{=} L[u],
\end{aligned}
$$

所以由最大値原理 (Maximum Principle) 得知:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\alpha T}|k_{ss}| \leq \sup_{s \times (0,T)} |u| \leq \max_{t=0} |u| = \|k_{ss}\|_\infty(0) \\
\Rightarrow &\|k_{ss}\|_\infty(t) \leq \mathrm{e}^{\alpha T}\|k_{ss}\|_\infty(0)。
\end{aligned}
$$

假設在 $n=l$ 時, 有

$$(k^{(l)})_t = (k^{(l)})_{ss} + \left((l+3)k^2 + K^2\right) k^{(l)} + P(k, k_s, \ldots, k^{(l-1)}),$$

現計算

$$\begin{aligned}
(k^{(l+1)})_t &= (k^{(l)})_{st} = (k^{(l)})_{ts} + k^2 (k^{(l)})_s \\
&= \left((k^{(l)})_{ss} + \left((l+3)k^2 + K^2\right) k^{(l)} + P(k, k_s, \ldots, k^{(l-1)})\right)_s \\
&\quad + k^2 k^{(l+1)} \\
&= (k^{(l+1)})_{ss} + \left(((l+1)+3)k^2 + K^2\right) k^{(l+1)} \\
&\quad + P(k, k_s, \ldots, k^{(l-1)}, k^{(l)}),
\end{aligned}$$

所以由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知:

$$(k^{(n)})_t = (k^{(n)})_{ss} + \left((n+3)k^2 + K^2\right) k^n + P(k, k_s, \ldots, k^{(n-1)})。$$

令 $u = \mathrm{e}^{-\alpha t} k^{(n)} \mp \beta t$, 其中 α 與 β 都是待定的正數, 則

$$
\begin{aligned}
u_t &= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} k^{(n)} + \mathrm{e}^{-\alpha t} (k^{(n)})_t \mp \beta \\
&= -\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} k^{(n)} + \mathrm{e}^{-\alpha t} \Big((k^{(n)})_{ss} + ((n+3)k^2 + K) k^{(n)} + P(k, \ldots, k^{(n-1)}) \Big) \\
&= u_{ss} + ((n+3)k^2 + K - \alpha) u \\
&\qquad \pm ((n+3)k^2 + K - \alpha) \beta t + \mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, \ldots, k^{(n-1)}) \mp \beta,
\end{aligned}
$$

因為 $(n+3)k^2 + K$ 在 $[0, T)$ 上有界, 所以可以取到夠大的 α 使得在 $[0, T)$ 上都有 $(n+3)k^2 + K - \alpha < 0$。而 $P(k, k_s, k^{(n-1)})$ 在 $[0, T)$ 上也是有界的, 所以再取夠大的 β 使得在 $[0, T)$ 上都有 $\mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, k_s, k^{(n-1)}) - \beta < 0 (> 0)$。

因為

$$
\begin{aligned}
0 &= u_{ss} + ((n+3)k^2 + K - \alpha)u - u_t \pm ((n+3)k^2 + K - \alpha)\beta t \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\alpha t} P(k, \ldots, k^{(n-1)}) \mp \beta \\
&\le (\ge) u_{ss} + ((n+3)k^2 + K - \alpha)u - u_t \overset{\text{記}}{=} L[u]
\end{aligned}
$$

所以由最大值原理 (Maximum Principle) 得知:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-\alpha T}|k^{(n)}| \le \sup_{s \times (0,T)} |u| \le \max_{t=0} |u| = \|k^{(n)}\|_\infty(0) \\
&\Rightarrow \|k^{(n)}\|_\infty(t) \le \mathrm{e}^{\alpha T}\|k^{(n)}\|_\infty(0)\text{。}
\end{aligned}
$$

長時間存在性的最後論述

因為 k 的各階導數有界, 也就是說, 對所有 $n \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ 都有 $\|k^{(n)}\|_\infty \leq \bar{M}(\gamma_0, T, n)$, 其中 $\bar{M}(\gamma_0, T, n)$ 是與 γ_0, T, n 有關的常數, 由阿澤拉-阿斯克理定理 (Arzela-Ascoli Theorem) 得知: 存在一個子數列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} k(u, t_n) = k(u, T)$ 而且 $k(u, T)$ 的各階導數皆為連續。

所以取極限之後的映射 $\gamma_T(u) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \mathbf{X}(u, t_n)$ 是一個光滑映射。由此出發, 再以它為初始曲線, 利用曲線縮短流的存在性得知: 其解可以再往前延拓至 $[0, T + \varepsilon)$。