3

古典最大值原理

這一章的目的是想了解在一般的線性橢圓微分算子下, 需要哪些假設才可以得到最大值原理, 並了解最大值原理可以再繼續推出哪些估計以進一步了解方程式的解的行爲。這裡考慮的線性橢圓微分算子如下:

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji}, \tag{3.1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, 而 $n \geq 2$。這裡總是假設 $u \in C^2(\Omega)$ 使得方程式 (3.1) 對所有 $x \in \Omega$ 都有意義。

關於這個橢圓微分算子 L 的屬性, 我們給出相應的定義:

(A) 如果係數矩陣 $[a^{ij}(x)]$ 正定, 則稱 L 在 $x \in \Omega$ 是 *橢圓型的* (elliptic); 換言之, 如果用 $\lambda(x)$ 與 $\Lambda(x)$ 分別表示 $[a^{ij}(x)]$ 的最小特徵值與最大特徵值, 則對所有 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, 都有

$$0 < \lambda(x)\|\xi\|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)\|\xi\|^2。$$

如果在 Ω 上都有 $\lambda(x) > 0$, 我們說 L 在 Ω 上是橢圓型的。

(B) 在 (A) 的設定下, 若存在某個常數 λ_0 滿足 $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$, 則稱 L 在 Ω 上是 *嚴格橢圓型的* (strictly elliptic)。

(C) 如果 $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ 在 Ω 上是一個有界函數, 則稱 L 在 Ω 上是 *一致橢圓型的* (uniformly elliptic)。

例 **1.** 考慮 $L = D_{11} + x_1D_{22}$, 則 L 在 $x_1 > 0$ 的半平面上是橢圓型的, 但不是一致橢圓型的。若考慮的區域爲 $\Omega = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$, 其中 $0 < \alpha < \beta < \infty$, 則 L 在這個區域 Ω 上是一致橢圓型的。

關於橢圓型算子 L 如果只有上述的假設, 基本上無法得到很好的結果, 通常還需要一些其它的假設, 特別是以下假設的目的是要用來控制低階項 b_iD^iu 還有 cu 關於主要項 $a^{ij}D_{ij}u$ 的相對重要性。比方說:

(A) 在這一章當中的討論, 我們總是假設: 存在正數 M 使得 $|b^i(x)| \leq M\lambda(x)$, 其中 $i=1,2,\ldots,n$ 以及 $x\in\Omega$。

此時, 若考慮另一個橢圓微分算子 $\bar{L}=\frac{1}{\lambda(x)}L$, 那麼對於 $\bar{L}$ 來說, 它的最小特徵值是 $\bar{\lambda}(x)\equiv 1$ 而且 $\bar{b}^i(x)$ 是有界函數。此外, 如果 L 是一致橢圓型的話, 那麼這時候可知 $\bar{a}^{ij}$ 是有界函數。

至於上述的假設多許多情況下是會成立的, 這裡指出: 如果 a^{ij} 與 b^i 在 Ω 上連續, 那麼對任何有界子區域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上 L 是一致橢圓的, 而且 $|b^i(x)| \leq M\lambda(x)$ 成立。

(B) 關於 $c(x)$ 的假設會隨著情況而有不同的設定, 因此會在之後的每一個討論中給出假設。

最大值原理是二階橢圓型偏微分方程的一個重要特徵, 也因爲這個特性, 它與高階偏微分方程式有很大的區別。而最大值原理可推出逐點估計, 這個結果也可以進一步得到一些更好的理論。這一章的多數結果也只是基於 L 是橢圓型而已, 並不基於係數的其他假設(例如光滑性), 正因爲如此, 最大值原理在解的先驗估計 (a priori estimate) 中是非常有用的。

3.1 弱最大值原理

定理 1 (弱最大值原理, weak maximum principle)**.** *假設 L 在有界區域 Ω 上是橢圓型的, 並且假設此算子的 $c(x)\equiv 0$。若有 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\bar{\Omega})$ 滿足 $Lu\geq 0$ ($Lu\leq 0$), 則 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值(最小值)可以在區域的邊界 $\partial\Omega$ 上達到, 即*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right)。$$

證明:

(A) 先看 $Lu>0$ 的情況, 假設 $u(x)$ 在內點 $x_0\in\Omega$ 上達到最大值, 則有 $Du(x_0)=0$ 而且 $D^2u(x_0)=[D_{ij}u(x_0)]$ 非正定, 於是

$$Lu(x_0)=a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0)\leq 0,$$

這與 $Lu>0$ 矛盾, 所以 $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$ 成立。

(B) 考慮函數 $v(x)=\mathrm{e}^{\gamma x_1}$, 其中 γ 是一個待定的正數, 由假設 $|b^i(x)|\leq M\lambda(x)$, 還有 $a^{11}(x)\geq\lambda(x)$, 所以存在正數 $\gamma>M$ 使得

$$Lv=(\gamma^2a^{11}(x)+\gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1}\geq(\gamma^2\lambda(x)-\gamma M\lambda(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1}=\lambda(x)\gamma(\gamma-M)\mathrm{e}^{\gamma x_1}>0。$$

對任意 $\varepsilon>0$, 考慮函數 $u(x)+\varepsilon v(x)$, 因爲 $L(u+\varepsilon v(x))=Lu+\varepsilon Lv>0$, 所以

$$\sup_{\Omega}(u+\varepsilon v)=\sup_{\partial\Omega}(u+\varepsilon v),$$

而 ε 爲任意正數, 因此 $\sup\limits_{\Omega} u=\sup\limits_{\partial\Omega} u$。

□

定義 2. 若函數 u 在 Ω 上滿足 $Lu = 0$ $(\geq 0, \leq 0)$, 則稱函數是 L 的 解 (下解、上解)。

現在探討橢圓微分算子 L 對於 $c(x) \leq 0$ 的情況。此時我們有以下定理:

定理 3. 假設 L 在有界區域 Ω 上是橢圓型的, 並且假設此算子的 $c(x) \leq 0$。若有 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 滿足 $Lu \geq 0$ $(Lu \leq 0)$, 則

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-\right),$$

其中 $u^+ = \max(u, 0), u^- = \min(u, 0)$。如果在 Ω 中 $Lu = 0$, 那麼

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|。$$

證明:

(A1) 如果在 Ω 上都有 $u(x) \leq 0$, 則 $\sup\limits_{\Omega} u \leq 0 \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$ 自動成立。

(A2) 如果存在一點 $x_0 \in \Omega$ 使得 $u(x_0) > 0$, 考慮集合 $\Omega^+ = \{x \in \Omega | u(x) > 0\} \subset \Omega$, 此時 Ω^+ 非空。因為在 Ω 上有 $Lu \geq 0$, 那麼函數 $u(x)$ 在 Ω^+ 上有

$$L_0 u \overset{記}{=} a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u \geq -c(x) u(x) \geq 0,$$

所以函數 u 在 $\bar{\Omega}^+$ 上的最大值可以在 $\partial\bar{\Omega}^+$ 上達到。記 $u^+ = \max(u, 0)$, 則

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^+} u = \sup_{\Omega^+} u^+ = \sup_{\partial\Omega^+} u^+ = \sup_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u^+ = \sup_{\partial\Omega} u^+。$$

(A3) 由 (A1) 與 (A2) 得到 $\sup\limits_{\Omega} u \leq \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$。

(B1) 如果在 Ω 上都有 $u(x) \geq 0$, 則 $\inf\limits_{\Omega} u \geq 0 \geq \inf\limits_{\partial\Omega} u^+$ 自動成立。

(B2) 如果存在一點 $x_0 \in \Omega$ 使得 $u(x_0) < 0$, 那麼考慮 $\Omega^- = \{x \in \Omega | u(x) < 0\} \subset \Omega$, 此時 Ω^- 非空。因為在 Ω 上有 $Lu \leq 0$, 那麼函數 $u(x)$ 在 Ω^- 上有

$$L_0 u \overset{記}{=} a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u \leq -c(x) u(x) \leq 0,$$

所以函數 u 在 $\bar{\Omega}^-$ 上的最小值可以在 $\partial\bar{\Omega}^-$ 上達到。記 $u^- = \min(u, 0)$, 則

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\Omega^-} u = \inf_{\Omega^-} u^- = \inf_{\partial\Omega^-} u^- = \inf_{\partial\Omega^- \cap \partial\Omega} u^- = \inf_{\partial\Omega} u^-。$$

(B3) 由 (B1) 與 (B2) 得到 $\inf\limits_{\Omega} u \geq \inf\limits_{\partial\Omega} u^-$。

(C) 因為

$$\sup_{\Omega} |u| = \max\left(\sup_{\Omega} u, -\inf_{\Omega} u\right),$$

若是取到前者 $\sup\limits_{\Omega} u$, 考慮 $Lu \geq 0$, 此時 $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u^+$。若是取到後者 $-\inf\limits_{\Omega} u$, 考慮 $Lu \leq 0$, 此時 $-\inf\limits_{\Omega} u = -\inf\limits_{\partial\Omega} u^-$。於是

$$\sup_{\Omega} |u| = \max\left(\sup_{\Omega} u, -\inf_{\Omega} u\right) = \max\left(\sup_{\partial\Omega} u^+, -\inf_{\partial\Omega} u^-\right) = \sup_{\Omega} |u|。$$

□

3.2 強最大值原理

由弱最大值原理的討論中知道: 若在 Ω 上 $Lu > 0$, 則函數 u 在區域內部不可能達到最大值; 也就是說, 函數的最大值一定發生在邊界。若在 Ω 上 $Lu \geq 0$, 則弱最大值原理推論出的結果是: 函數 u 在 $\bar{\Omega}$ 的最大值可以在邊界 $\partial\bar{\Omega}$ 上達到, 這時函數 u 有沒有可能在區域的內部 Ω 也同時達到最大值呢? 如果函數 u 在內部 Ω 一點達到最大值的話, 我們是否可以更進一步地刻畫函數 u 呢? 有關這方面的討論, 會與以下強最大值原理有關。

定義 **1.** 給定一個區域 R 以及 $x_0 \in \partial R$, 若存在一個球 $B \subset R$ 使得 $x_0 \in \partial B$, 則稱 R 在 $x_0 \in \partial R$ 處滿足 內部球條件 (interior sphere condition)。

引理 **2.** 假設 L 在區域 R 上是一致橢圓型的, 若 $Lu \geq 0$, 以及 $x_0 \in \partial R$ 滿足以下三個條件

(a) 函數 $u(x)$ 在 x_0 處連續。

(b) 對所有 $x \in R$ 都有 $u(x_0) > u(x)$。

(c) 區域 R 在 $x_0 \in \partial R$ 處滿足內部球條件。

此時, 假設偏微分算子 L 的係數 $c(x)$ 滿足 $c(x)u(x_0) \leq 0$, 其中 $x \in R$, 以及 $\frac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界。若 $u(x)$ 在 x_0 處的朝外法向導數存在, 則有 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$。

註 3. 這裡注意到關於 $c(x)$ 的假設, 有以下幾種可能性都可以達到:

(A) 若 $c(x) \equiv 0$, 則 $c(x)u(x_0) \leq 0$ 成立。

(B) 若 $c(x) \leq 0$, 則所選取的點 x_0 必須滿足 $u(x_0) \geq 0$。

(C) 若 $u(x_0) = 0$, 則不需要假設 $c(x)$ 的符號。

證明: 因爲 R 在 $x_0 \in \partial R$ 滿足內部球條件, 則存在 $B = B_{r_0}(y) \subset \Omega$ 使得 $x_0 \in B$。給定 $\rho > 0$, 對於 $r \in [\rho, r_0]$, 考慮補助函數 (auxiliary function)

$$v(r) = \mathrm{e}^{-\alpha r^2} - \mathrm{e}^{-\alpha r_0^2},$$

其中 $r = \|x - y\|$, 而 α 是一個待定的正數。

因爲

$$\begin{aligned} Lv &= \mathrm{e}^{-\alpha r^2}\left(4\alpha^2 a^{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha(a^{ii}(x) + b^i(x)(x_i - y_i))\right) + c(x)v(x) \\ &\geq \mathrm{e}^{-\alpha r^2}\left(4\alpha^2\lambda(x)r^2 - 2\alpha(a^{ii}(x) + \|\mathbf{b}\|r) + c(x)\right), \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{b} = (b^1, b^2, \ldots, b^n)$。假設 $\frac{a^{ii}(x)}{\lambda(x)}, \frac{\|\mathbf{b}\|}{\lambda(x)}, \frac{c(x)}{\lambda(x)}$ 都是有界的情況下, 可取 α 夠大使得在環形區域 $A \overset{\text{記}}{=} B_{r_0}(y) - B_\rho(y)$ 上滿足 $Lv \geq 0$。

再看環形區域的邊界, 因爲在 $\partial B_\rho(y)$ 上 $u(x)-u(x_0)<0$, 所以存在常數 $\varepsilon>0$ 使得在 $\partial B_\rho(y)$ 上 $u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\le 0$。此時, 對函數 $u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)$ 來說, 在 $\partial B_{r_0}(y)$ 上也滿足 $u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\le 0$。這麼一來, 在環形區域 A 上就有

$$L(u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)) = L(u(x)) - L(u(x_0)) + \varepsilon L(v(x)) = -c(x)u(x_0) \ge 0,$$

而且在環形區域的邊界 ∂A 上 $u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\le 0$, 所以由弱最大值原理 (weak maximum principle) 得知: 環形區域 A 上 $u(x)-u(x_0)+\varepsilon v(x)\le 0$, 即 在區域 A 上有不等式

$$u(x)-u(x_0) \le -\varepsilon v(x) = -\varepsilon(v(x)-v(x_0))。$$

欲證明 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ 爲正, 可由以下計算得知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{u(x_0+\nu h)-u(x_0)}{h} &\ge \lim_{h\to 0^-} -\varepsilon\frac{v(x_0+\nu h)-v(x_0)}{h}\\ &= -\varepsilon v'(r_0) = -\varepsilon\left(-2\alpha r_0 \mathrm{e}^{-\alpha r_0^2}\right) > 0。\end{aligned}$$

□

注意到上面引理的區域故意寫成 R, 目的在於到時候要使用引理的區域並不是在原來算子有定義的區域 Ω。

定理 4 (強最大值原理, strong maximum principle)**.** 假設 L 在區域 Ω 中是一致橢圓的, 其中 $c=0$ 以及 $Lu\ge 0$ ($Lu\le 0$)。如果 u 在 Ω 內部達到最大值(最小值), u 是常數。如果 $c\le 0$ 並且 $\frac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界, 除非它是常數, 否則 u 在 Ω 內部不能達到非負最大值(非正最小值)。

證明: 假設 u 在 Ω 內部達到最大值 M 而且在 Ω 上 $u(x)\not\equiv M$, 考慮 $\Omega^-=\{x\in\Omega | u(x)<M\}$, 此時 $\Omega^-\subset\Omega$ 而且 $\partial\Omega^-\cap\Omega\ne\emptyset$。取一點 $y\in\Omega^-$ 且 $d(y,\partial\Omega^-\cap\Omega)<d(y,\partial\Omega)$, 考慮以 y 爲中心的球 $B_R(y)\subset\Omega^-$ 使得某一點 $x_0\in\partial B_R(y)\cap(\partial\Omega^-\cap\Omega)$, 則 $u(x_0)=M$。由 引理 **2** 得知: $Du(x_0)\ne\mathbf{0}$, 但是這與 u 在 x_0 達到最大值的性質矛盾。 □

3.3 先驗估計 (a priori estimate)

這一節想要推導的是關於 $Lu=f$ 的解的逐點估計。

定理 1. 假設在有界區域 Ω 上 $Lu\ge f$, 其中 L 是橢圓型的, $c\le 0$, 並且 $u\in C^0(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$, 則

$$\sup_\Omega u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\sup_\Omega\frac{|f^-|}{\lambda},$$

其中 C 是一個只與 Ω 的直徑還有 $\beta=\sup\frac{|\mathbf{b}|}{\lambda}$ 有關的常數。特別地, 如果 Ω 位於兩個相距 d 的平行平面之間, 這時 $C=\mathrm{e}^{(\beta+1)d-1}$。

證明: 將 Ω 置於帶狀區域 $0 < x_1 < d$ 中, 考慮偏微分算子 $L_0 \overset{\text{記}}{=} a^{ij}D_{ij} + b^iD_i$, 取 $\gamma \geq M+1$ 使得以下不等式成立:

$$L_0\mathrm{e}^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} \geq (\gamma^2\lambda(x) - \gamma M\lambda(x))\mathrm{e}^{\gamma x_1} = \lambda(x)\gamma(\gamma - M)\mathrm{e}^{\gamma x_1} \geq \lambda(x)。$$

考慮函數

$$v(x) = \sup_{\partial\Omega} u^+ + \left(\mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}\right)\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda},$$

則

$$Lv = (L_0 + c)v = L_0 v + cv \leq -\lambda(x)\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda},$$

因爲

$$L(v-u) = Lv - Lu \leq -\lambda(x)\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda} - f(x) = -\lambda(x)\left(\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda} + \frac{f(x)}{\lambda(x)}\right) \leq 0,$$

而且在 $\partial\Omega$ 上 $v - u \geq 0$, 所以在 Ω 上有 $u \leq v$, 即

$$u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \left(\mathrm{e}^{\gamma d} - \mathrm{e}^{\gamma x_1}\right)\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda} \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \left(\mathrm{e}^{\gamma d} - 1\right)\sup_{\Omega}\frac{|f^-|}{\lambda}。$$

□

3.4 泊松方程的梯度估計

3.4.1 方形區域的梯度估計

在立方體 $Q = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < d, i = 1, 2, \ldots, n\}$ 中考慮泊松方程式 (Poisson equation)

$$\Delta u = f,$$

其中 $u \in C^2(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ 而且 f 在 Q 中是一個有界函數。以下將推導出梯度估計 (gradient estimate):

$$D_i u(0) \leq \frac{n}{d}\sup_{\partial Q}|u| + \frac{d}{2}\sup_{Q}|f|, \quad \text{其中 } i = 1, 2, \ldots, n。$$

注意到這時立方體 Q 的邊長是 $l = 2d$。

證明: 首先, 記 $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ 以及 $x = (x', x_n)$。根據方程式對於變數的獨立性與對稱性, 我們只要需證明 $D_n u(0)$ 的估計式, 其餘變數的情況皆同理可證。

記 $Q' = \{(x', x_n) \mid |x_i| < d, i = 1, 2, \ldots, n-1, 0 < x_n < d\}$ 爲半立方體, 在 Q' 上考慮函數

$$\varphi(x', x_n) = \frac{1}{2}\left(u(x', x_n) - u(x', -x_n)\right),$$

這時, $\varphi(x', x_n)$ 滿足以下性質:

- 直接計算可得 $\varphi(x',0)=0$; 此外, 由三角不等式可知: $\sup\limits_{\partial Q'}|\varphi| \le \sup\limits_{\partial Q}|u| \overset{\text{記}}{=} M$。

- 由三角不等式知: 在 Q' 上 $\Delta\varphi \le \sup\limits_{Q}|f| \overset{\text{記}}{=} N$。

另一方面, 考慮函數

$$\psi(x',x_n)=\frac{M}{d^2}\left(\|x'\|^2+x_n(nd-(n-1)x_n)\right)+\frac{N}{2}x_n(d-x_n),$$

此時, $\psi(x',x_n)$ 滿足以下性質:

- 直接計算可得 $\psi(x',0)\ge 0$; 在 $\partial Q'$ 且 $x_n\neq 0$ 的地方必有某個 $i=1,2,\ldots,n-1$ 使得 $|x_i|=d$, 所以 $\psi(x',x_n)\ge M$。

- 在 Q 上 $\Delta\psi=-N$。

因此, 在 Q' 上 $\Delta(\psi\pm\varphi)\le 0$, 在 $\partial Q'$ 上 $\psi\pm\varphi\ge 0$, 由弱最大值原理 (weak maximum principle) 得知: 在 Q' 上 $|\varphi(x',x_n)|\le\psi(x',x_n)$。於是

$$\begin{aligned}
|D_nu(0)| &= \left|\lim_{x_n\to 0^+}\frac{u(x',x_n)-u(x'-x_n)}{2x_n}\right| = \lim_{x_n\to 0^+}\left|\frac{\varphi(0,x_n)}{x_n}\right| \\
&\le \lim_{x_n\to 0^+}\left(\frac{M(nd-(n-1)x_n)}{d^2}+\frac{N(d-x_n)}{2}\right) \\
&\le \frac{n}{d}M+\frac{d}{2}N=\frac{n}{d}\sup_{\partial Q}|u|+\frac{d}{2}\sup_{Q}|f|。
\end{aligned}$$

□

3.4.2 一般區域的梯度估計

以下想要推導出在任一區域 Ω 中 $\Delta u=f$ 的有界解 u 滿足以下估計:

$$\sup_{\Omega} d_x|Du(x)| \le C\left(\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega}d_x^2|f(x)|\right),$$

其中 $d_x=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$, 而 $C=C(n)$。

證明: 給定 $x\in\Omega$, 記 $d_x=d(x,\partial\Omega)$, 現取 Q 是以 x 爲中心、邊長爲 $l=\frac{d_x}{\sqrt{n}}$ 的立方體, 此時, $d=\frac{l}{2}=\frac{d_x}{2\sqrt{n}}$, 則有

$$|Du(x)|\le\frac{n}{d}\sup_{\partial Q}|u|+\frac{d}{2}\sup_{Q}|f|=\frac{2n\sqrt{n}}{d_x}\sup_{\partial Q}|u|+\frac{d_x}{4\sqrt{n}}\sup_{Q}|f|,$$

兩邊同乘 d_x 之後則有

$$\begin{aligned}
d_x|Du(x)| &\le 2n\sqrt{n}\sup_{\partial Q}|u|+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{d_x^2}{4}\sup_{Q}|f| \overset{(\star)}{\le} n\sqrt{n}\sup_{\partial Q}|u|+\frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{Q}d_x^2|f(x)| \\
&\le C(n)\left(\sup_{\Omega}|u|+\sup_{\Omega}d_x^2|f(x)|\right), \quad 其中 \quad C(n)=n\sqrt{n}。
\end{aligned}$$

這裡應補充說明的是: 假設 $x_0 \in Q$ 滿足 $d_{x_0}^2|f(x_0)| = \sup_Q d_x^2|f(x)|$, 則

$$\sup_Q d_x^2|f(x)| = d_{x_0}^2|f(x_0)| \geq \left(\frac{d_x}{2}\right)^2 |f(x_0)| = \frac{d_x^2}{4}\sup_Q |f|,$$

所以不等式 $(\star)$ 成立。 $\square$

3.4.3 方形區域的梯度連續模估計

現在要更進一步地推導梯度連續模的估計。假設 $u \in C^2(Q) \cap C^0(\bar{Q})$ 在立方體 Q 中滿足 $\Delta u = f$, 記 $M = \sup_Q |u|, N = \sup_Q |f|$。假設 Q' 是一個在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的一個區域, 其中

$$Q' = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y, z) \middle| |x_i| < \frac{d}{2}, i = 1, 2, \ldots, n-1, 0 < y, z < \frac{d}{4}\right\},$$

然後在 Q' 上定義函數

$$\varphi(x', y, z) = \frac{1}{4}\left(u(x', y+z) - u(x', y-z) - u(x', -y+z) + u(x', -y-z)\right)。$$

此外, 在 Q' 上考慮橢圓型算子

$$L = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

此時, $\varphi(x', y, z)$ 滿足以下性質:

- 直接計算得到: 在 Q' 上有 $\varphi(x', 0, z) = 0$ 以及 $\varphi(x', y, 0) = 0$。
- 由三角不等式, 對於 $i = 1, 2, \ldots, n-1$, 在 $|x_i| = \frac{d}{2}$ 上 $|\varphi| \leq M$。
- 由均值定理 (mean value theorem) 可得 $|\varphi(x', \frac{d}{4}, z)| \leq \mu z$ 以及 $|\varphi(x', y, \frac{d}{4})| \leq \mu y$, 其中在 Q' 上 $|Du| \leq \mu$, 而 μ 是由前一小節所得到的在方塊上的梯度估計。討論如下:

  因爲

$$\begin{aligned}
&\left|\varphi\left(x', \frac{d}{4}, z\right)\right| = \left|\varphi_z\left(x', \frac{d}{4}, \xi_z\right)\right| z \\
&= \frac{1}{4}\left|u_n\left(x, \frac{d}{4}+\xi_z\right) + u_n\left(x, \frac{d}{4}-\xi_z\right) - u_n\left(x, -\frac{d}{4}+\xi_z\right) - u_n\left(x, -\frac{d}{4}-\xi_z\right)\right| z
\end{aligned}$$

  若是用 $\sup_\Omega d_x|Du(x)| \leq C\left(\sup_\Omega |u| + \sup \Omega d_x^2|f|\right)$, 則有

$$\frac{d}{2}\sup_{Q'}|Du| \leq \sup_{Q'} d_x|Du| \leq C\left(\sup_Q |u| + \sup_Q d_x^2|f|\right) \leq C\left(M + d^2 N\right),$$

  所以

$$\left|\varphi\left(x', \frac{d}{4}, z\right)\right| \leq \sup_{Q'}|Du| z \leq C\left(\frac{M}{d} + dN\right) z \overset{記}{=} \mu z。$$

現在要在 Q' 上找到一個比較函數, 型如:

$$\psi(x', y, z) = \frac{4M}{d^2}\|x'\|^2 + \frac{4\mu}{d}yz + kyz\ln\left(\frac{2d}{y+z}\right),$$

其中 k 爲待定的正數。此時, $\psi(x', y, z)$ 滿足以下性質:

- 在 $\partial Q'$ 上 $|\varphi| \leq \psi$。
- 在 Q' 上, 因爲

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(yz\ln\left(\frac{2d}{y+z}\right)\right) &= z\ln\left(\frac{2d}{y+z}\right) - \frac{yz}{y+z} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(yz\ln\left(\frac{2d}{y+z}\right)\right) &= -\frac{2z}{y+z} + \frac{yz}{(y+z)^2},\end{aligned}$$

所以 $\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -1 + \frac{yz}{(y+z)^2}$, 於是由算幾不等式得知:

$$L\psi = \frac{8(n-1)}{d^2}M + k\left(-1 + \frac{yz}{(y+z)^2}\right) \leq \frac{8(n-1)}{d^2}M + \frac{3}{4}k,$$

此時, 只要選取 $k \geq \frac{4}{3}(N + \frac{8(n-1)}{d^2}M)$, 則 $L\psi \leq -N$。

所以我們得到

- 在 Q' 上 $L(\psi \pm \varphi) \leq 0$。
- 在 $\partial Q'$ 上 $\psi \pm \varphi \geq 0$。

所以由弱最大值原理 (weak maximum principle) 得知: 在 Q' 中 $|\varphi| \leq \psi$。在這個不等式中令 $x' = 0$, 然後除以 z 並且讓 z 趨近於零, 因爲

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0^+}\frac{\varphi(0,y,z)}{z} &= \lim_{z\to 0^+}\frac{1}{2}\left(\frac{u(0,y+z)-u(0,y-z)}{2z} - \frac{u(0,-y+z)-u(0,-y-z)}{2z}\right) \\ &= \frac{1}{2}(u_y(0,y) - u_y(0,-y)),\end{aligned}$$

於是

$$\frac{1}{2}|u_y(0,y) - u_y(0,-y)| = \lim_{z\to 0^+}\frac{|\varphi(0,y,z)|}{z} \leq \lim_{z\to 0^+}\frac{\psi(0,y,z)}{z} = \frac{4\mu}{d}y + ky\ln\left(\frac{2d}{y}\right)。$$

將上面的討論稍微修飾一下則得不同變數的方向導數 $|D_iu(0,x_n) - D_iu(0,-x_n)|$, 其中 $i = 1,2,\ldots,n-1$ 的估計。定義

$$\varphi(\hat{x}, y, z) = \frac{1}{4}\left(u(\hat{x},y,z) - u(\hat{x},-y,z) - u(\hat{x},y,-z) + u(\hat{x},-y,-z)\right),$$

其中 $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$, 然後選取區域

$$Q' = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, y, z)\,\middle|\,|x_i| < \frac{d}{2}, i = 1,2,\ldots,n-2, 0 < y, z < \frac{d}{2}\right\},$$

這裡所考慮的比較函數爲

$$\psi(\hat{x},y,z)=\frac{4M}{d^2}\|\hat{x}\|^2+yz\left(\frac{4\mu}{d}+\bar{k}\ln\left(\frac{2d}{y+z}\right)\right),$$

其中 μ 與 $\bar{k}$ 爲常數滿足在 Q' 上 $|Du|\leq\mu$ 以及 $\bar{k}\geq\frac{2}{3}\left(N+\frac{8(n-2)}{d^2}M\right)$。所以

- 在 Q' 上 $\Delta(\psi\pm\varphi)\leq 0$。
- 在 $\partial Q'$ 上 $\psi\pm\varphi\geq 0$。

由弱最大值原理 (weak maximum principle) 得知: 在 Q 上 $|\varphi|\leq\psi$。令 $\hat{x}=0$, 等不等式除以 y 之後再讓 y 趨近於 0, 得到

$$\frac{1}{2}|D_{n-1}u(0,z)-D_{n-1}u(0,-z)|=\lim_{y\to 0^+}\frac{|\varphi(0,y,z)|}{y}\leq\lim_{y\to 0^+}\frac{|\psi(0,y,z)|}{y}=\frac{4\mu}{d}z+\bar{k}z\ln\left(\frac{2d}{z}\right)。$$

3.4.4 一般區域的梯度連續模估計

最後, 我們在 $\mathbb{R}^n$ 的一個區域 Ω 中考慮 $\Delta u=f$, 這時可以得到關於 $|Du(x)-Du(y)|$ 的一個估計, 其中 x,y 是 Ω 中的任何兩點。假設

$$d_x=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega),\quad d_y=\operatorname{dist}(y,\partial\Omega),\quad d_{x,y}=\min(d_x,d_y),$$

根據對稱性, 我們可以假設 $d_x\leq d_y$, 此時則有 $d_{x,y}=d_x$。

首先, 我們想要找到一個方塊 Q 使得 $d(Q,\partial\Omega)\geq\frac{d_x}{2}$, 其中邊長 $l=2d$。這個時候, 對於 z 而言, 必須滿足 $d(z,x)\leq\frac{1}{2}d_x$ 的話, 那麼對於 $u\in\partial\Omega, z\in Q$, 則

$$d(z,u)\geq|d(z,x)-d(x,u)|=d(x,u)-d(z,x)\geq d_x-\frac{1}{2}d_x=\frac{1}{2}d_x\Rightarrow d(z,\partial\Omega)=\frac{1}{2}d_x。$$

另一方面, Q 內的任兩點最遠的距離是 $\sqrt{n}l$, 所以我們解 $\sqrt{n}l=\frac{1}{2}d_x$, 則有 $l=2d=\frac{d_x}{2\sqrt{n}}$。

假設有一點 $y\in Q$ 滿足 $|x-y|\leq l=2d=\frac{d_x}{2\sqrt{n}}$, 考慮連接 x 與 y 的線段。取這個線段的中點作爲原點, 並旋轉坐標軸使得 x 和 y 若在 x_n 軸上, 此時, 它們在這個坐標系中是 $x=(0,x_n)$ 與 $y=(0,-x_n)$。而立方體 $Q=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)||x_i|<d, i=1,2,\ldots,n\}$ 位於 Q 中, 而且它到 $\partial\Omega$ 的距離大於 $\frac{d_x}{2}$。由前面的討論, 我們得到在 Q 上存在 $C=C(n)$ 使得

$$\begin{aligned}
d^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}&\leq d^2\left(\frac{4\mu}{d}+k\ln\left(\frac{2d}{|x-y|}\right)\right)=4\mu d+kd^2\ln\left(\frac{2d}{|x-y|}\right)\\
&=4C\left(M+d^2N\right)+kd^2\ln\left(\frac{2d}{|x-y|}\right)\\
&=C\left(\sup_Q|u|+d^2\left(\sup_Q|f|+\ln\left(\frac{2d}{|x-y|}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

因此

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leq C\left(\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega d_x^2|f|+d^2\ln\left(\frac{2d_{x,y}}{|x-y|}\right)\right),$$

如果 x, y 是 Ω 中使得 $|x-y|>d$ 的點, 則有

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leq C\left(\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega d_x^2|f|\right),$$

所以將兩者結果合併, 則有

$$d_{x,y}^2\frac{|Du(x)-Du(y)|}{|x-y|}\leq C\left(\sup_\Omega|u|+\sup_\Omega d_x^2|f|\right)\left(\ln\left(\frac{2d_{x,y}}{|x-y|}\right)+1\right),$$

其中 $C=C(n)$。

3.5 哈那克不等式

這一節要討論一個二變數函數滿足一致橢圓型方程下的哈那克不等式。這裡將呈現一個較為基礎的手法處理這個問題。

定理 1. 假設 $u\in C^2(D_R(0))$ 是在圓盤 $D_R(0)$ 上滿足 $Lu=au_{xx}+bu_{xy}+cu_{yy}=0$ 的一個非負解, 其中偏微分算子 L 在 $D_R(0)$ 上是一致橢圓型的, 則對所有 $z=(x,y)\in D_{\frac{R}{4}}(0)$ 滿足以下不等式*:*

$$Ku(0)\leq u(z)\leq K^{-1}u(0),$$

其中 K 是只與 $\mu=\sup\limits_{D_R}\frac{\Lambda}{\lambda}$ 有關的常數。

證明: 首先注意到: 因為 $Lu=0$ 與 μ 在相似的變換下是個不變量, 所以這裡只要證明單位圓盤 $D\overset{記}{=}D_1$ 的情況即可。因為在 D 中 $u\geq 0$, 由強最大值原理 (strong maximum principle) 得知 $u\equiv 0$ 或是在 D 中 $u>0$。前者會讓不等式自動成立, 所以我們只要證明後者的情況即可。

考慮在 D 中的集合 G 是滿足 $u(x)>\frac{u(0)}{2}$ 所成的集合, 集合 G 可能會分成很多部份 (components), 但是必有一個區域 $G'\subset G$ 包含 $0=(0,0)$, 由弱最大值原理 (weak maximum principle) 知道 $\partial G'\cap\partial D$ 非空, 因此不失一般性可假設點 $Q=(0,1)$ 在 $\partial G'$ 中。

考慮函數

$$v_\pm(x,y)=\pm x+\frac{3}{4}-k\left(y-\frac{1}{2}\right)^2,$$

其中 $k\geq 3$ 是一個正的常數。注意到 $\Gamma_\pm=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|v_\pm=0\}$ 是拋物線, 而且頂點為 $(\pm\frac{3}{4},\frac{1}{2})$, 對稱軸為 $y=\frac{1}{2}$。因為 $k\geq 3$, 所以區域 $P_+\cap P_-=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|v_+>0\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|v_->0\}$ 的邊界是由 Γ_+ 與 Γ_- 的弧一部份組成。注意到在 $P_+\cap P_-$ 中, 函數 $v_\pm$ 滿足 $0<v_\pm<\frac{7}{4}$。

令 $E_\pm=\mathrm{e}^{\alpha v_\pm}$, 其中 α 是一個待定的正數, 直接計算, 只要 $\alpha\geq 2k\mu$, 則有

$$\begin{aligned}LE_\pm&=E_\pm\left(\alpha^2\left(a\mp 4bk\left(y-\frac{1}{2}\right)+4ck^2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right)-2\alpha kc\right)\\&\geq E_\pm\left(\alpha^2\lambda-2\alpha k\Lambda\right)\geq 0,\end{aligned}$$

注意到上面的不等式, 可以想成是

$$\begin{bmatrix} 1 & -2k\left(y-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2k\left(y-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}=\left\|\left(1,-2k\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)\right\|^2>\|(1,0)\|^2=1,$$

所以, 函數 $w_\pm=\frac{E_\pm-1}{e^{\frac{7}{4}\alpha}-1}$ 具有以下性質:

- 在 D 中 $Lw_\pm\geq 0$。理由: $Lw_\pm=\frac{1}{e^{\frac{7}{4}\alpha-1}}LE_\pm\geq 0$。
- 在 $\Gamma_\pm$ 上 $w_\pm=0$。
- 在 $P_\pm$ 中 $0<w_\pm<1$。

現在假設 z 是 $P_+\cap P_-$ 中的任一點。這時必爲以下幾種情況之一:

(A) $u(x)\geq\frac{u(0)}{2}$ 和 $z\in\bar{G}$。

(B) z 位於 $P_+-\bar{G}$ 的一部分 U_+ 中, 使得 $\partial U_+\subset\Gamma_+\cup\partial G$。

(C) z 位於 P_--G 的一部份 U_- 中, 使得 $\partial U_-\subset\Gamma_-\cup\partial G$。

在 (B) 與 (C) 的情況, 我們有

- 在 $\partial G\cap\partial U_\pm$ 上, 因爲 $u(x)=\frac{1}{2}u(0)$, 所以 $u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm=\frac{1}{2}u(0)(1-w_\pm)>0$。
- 在 $\Gamma_\pm\cap\partial U_\pm$ 上, 因爲 $w_\pm=0$, 所以 $u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm=u>0$。

這麼一來, 在 $\partial U_\pm$ 上 $u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm>0$, 因爲 $L(u-\frac{1}{2}u(0)w_\pm)\leq 0$, 所以

$$u(z)>\frac{1}{2}u(0)\min(w_+(z),w_-(z)),\quad z\in P_+\cap P_-。$$

特別地, 在線段 $y=\frac{1}{2},|x|\leq\frac{1}{2}$ 上, 我們有

$$u\left(x,\frac{1}{2}\right)>K_1u(0),\quad x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

其中

$$K_1=\frac{1}{2}\frac{e^{\frac{\alpha}{4}}-1}{e^{\frac{7}{4}\alpha}-1}=\frac{1}{2}\inf_{|x|\leq\frac{1}{2}}\left(w_+\left(x,\frac{1}{2}\right),w_-\left(x,\frac{1}{2}\right)\right)。$$

現在我們定義另一個比較函數, 令 $v=y+1-6x^2$, 考慮區域

$$P=\left\{(x,y)\in D\,\middle|\,v(x,y)>0,y<\frac{1}{2}\right\},$$

P 由線段 $y=\frac{1}{2},|x|\leq\frac{1}{2}$ 以及具有頂點 $(0,-1)$ 並通過點 $(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 的拋物線 $v=0$ 的弧 Γ 所圍成。如前, 適當選取依賴於 μ 的 $\beta>0$, 函數

$$w=\frac{e^{\beta v}-1}{e^{\frac{3}{2}\beta}-1}$$

具有性質:

- 在 D 中 $Lw_{\pm} \geq 0$。
- 在 Γ 上 $w = 0$。
- 在 P 中 $0 < w_{\pm} < 1$。

所以在 ∂P 上 $u - K_1 u(0) w > 0$, 又因爲 $L(u - K_1 u(0) w) \leq 0$, 從弱最大值原理 (weak maximum principle) 就得到

$$u(z) > K_1 u(0) w(z), \quad z \in P,$$

注意到 $D_{\frac{1}{3}} \subset P$, 並令 $K_2 = \inf_{D_{\frac{1}{3}}} w$, 就得到

$$u(z) > K_1 K_2 u(0) = K u(0), \quad z \in D_{\frac{1}{3}},$$

此時 K 依賴於 μ。

現在如果 $z \in D_{\frac{1}{4}}$, 則 $D_{\frac{3}{4}}(z)$ 包含於 D 中。將上述不等式用於圓域 $D_{\frac{1}{4}}(z)$, 就推出

$$u(0) > K u(z), \quad z \in D_{\frac{1}{4}},$$

於是

$$K u(0) < u(z) < K^{-1} u(0), \quad z \in D_{\frac{1}{4}}$$

最後就有 $\sup_{D_{\frac{R}{4}}} u \leq \kappa \inf_{D_{\frac{R}{4}}} u$, 其中 $\kappa = \frac{1}{K^2}$。 □

參考文獻

[1] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Second edition. **224.** Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+513 pp.