

3

古典最大值原理

這一章的目的是想了解在一般的線性橢圓微分算子下，需要哪些假設才可以得到最大值原理，並了解最大值原理可以再繼續推出哪些估計以進一步了解方程式的解的行為。這裡考慮的線性橢圓微分算子如下：

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, \quad a^{ij} = a^{ji}, \quad (3.1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ，而 $n \geq 2$ 。這裡總是假設 $u \in C^2(\Omega)$ 使得方程式 (3.1) 對所有 $x \in \Omega$ 都有意義。

關於這個橢圓微分算子 L 的屬性，我們給出相應的定義：

- (A) 如果係數矩陣 $[a^{ij}(x)]$ 正定，則稱 L 在 $x \in \Omega$ 是橢圓型的 (elliptic)；換言之，如果用 $\lambda(x)$ 與 $\Lambda(x)$ 分別表示 $[a^{ij}(x)]$ 的最小特徵值與最大特徵值，則對所有 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ，都有

$$0 < \lambda(x)\|\xi\|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)\|\xi\|^2。$$

如果在 Ω 上都有 $\lambda(x) > 0$ ，我們說 L 在 Ω 上是橢圓型的。

- (B) 在 (A) 的設定下，若存在某個常數 λ_0 滿足 $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ ，則稱 L 在 Ω 上是嚴格橢圓型的 (strictly elliptic)。
- (C) 如果 $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ 在 Ω 上是一個有界函數，則稱 L 在 Ω 上是一致橢圓型的 (uniformly elliptic)。

例 1. 考慮 $L = D_{11} + x_1D_{22}$ ，則 L 在 $x_1 > 0$ 的半平面上是橢圓型的，但不是一致橢圓型的。若考慮的區域為 $\Omega = (\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ ，其中 $0 < \alpha < \beta < \infty$ ，則 L 在這個區域 Ω 上是一致橢圓型的。

關於橢圓型算子 L 如果只有上述的假設，基本上無法得到很好的結果，通常還需要一些其它的假設，特別是以下假設的目的是要用來控制低階項 $b_iD^i u$ 還有 cu 關於主要項 $a^{ij}D_{ij}u$ 的相對重要性。比方說：

(A) 在這一章當中的討論，我們總是假設：存在正數 M 使得 $|b^i(x)| \leq M\lambda(x)$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 以及 $x \in \Omega$ 。

此時，若考慮另一個橢圓微分算子 $\bar{L} = \frac{1}{\lambda(x)}L$ ，那麼對於 \bar{L} 來說，它的最小特徵值是 $\bar{\lambda}(x) \equiv 1$ 而且 $\bar{b}^i(x)$ 是有界函數。此外，如果 L 是一致橢圓型的話，那麼這時候可知 \bar{a}^{ij} 是有界函數。

至於上述的假設多許多情況下是會成立的，這裡指出：如果 a^{ij} 與 b^i 在 Ω 上連續，那麼對任何有界子區域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上 L 是一致橢圓的，而且 $|b^i(x)| \leq M\lambda(x)$ 成立。

(B) 關於 $c(x)$ 的假設會隨著情況而有不同的設定，因此會在之後的每一個討論中給出假設。

最大值原理是二階橢圓型偏微分方程的一個重要特徵，也因為這個特性，它與高階偏微分方程式有很大的區別。而最大值原理可推出逐點估計，這個結果也可以進一步得到一些更好的理論。這一章的多數結果也只是基於 L 是橢圓型而已，並不基於係數的其他假設(例如光滑性)，正因為如此，最大值原理在解的先驗估計 (a priori estimate) 中是非常有用的。

3.1 弱最大值原理

定理 1 (弱最大值原理, weak maximum principle). 假設 L 在有界區域 Ω 上是橢圓型的，並且假設此算子的 $c(x) \equiv 0$ 。若有 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 滿足 $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$)，則 u 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值(最小值)可以在區域的邊界 $\partial\Omega$ 上達到，即

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

證明:

(A) 先看 $Lu > 0$ 的情況，假設 $u(x)$ 在內點 $x_0 \in \Omega$ 上達到最大值，則有 $Du(x_0) = 0$ 而且 $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$ 非正定，於是

$$Lu(x_0) = a^{ij}(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0,$$

這與 $Lu > 0$ 矛盾，所以 $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ 成立。

(B) 考慮函數 $v(x) = e^{\gamma x_1}$ ，其中 γ 是一個待定的正數，由假設 $|b^i(x)| \leq M\lambda(x)$ ，還有 $a^{11}(x) \geq \lambda(x)$ ，所以存在正數 $\gamma > M$ 使得

$$Lv = (\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x))e^{\gamma x_1} \geq (\gamma^2 \lambda(x) - \gamma M\lambda(x))e^{\gamma x_1} = \lambda(x)\gamma(\gamma - M)e^{\gamma x_1} > 0.$$

對任意 $\varepsilon > 0$ ，考慮函數 $u(x) + \varepsilon v(x)$ ，因為 $L(u + \varepsilon v(x)) = Lu + \varepsilon Lv > 0$ ，所以

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon v) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v),$$

而 ε 為任意正數，因此 $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ 。

□

定義 2. 若函數 u 在 Ω 上滿足 $Lu = 0$ ($\geq 0, \leq 0$), 則稱函數是 L 的解 (下解、上解)。

現在探討橢圓微分算子 L 對於 $c(x) \leq 0$ 的情況。此時我們有以下定理:

定理 3. 假設 L 在有界區域 Ω 上是橢圓型的, 並且假設此算子的 $c(x) \leq 0$ 。若有 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ 滿足 $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$), 則

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad \left(\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right),$$

其中 $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$ 。如果在 Ω 中 $Lu = 0$, 那麼

$$\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

證明:

(A1) 如果在 Ω 上都有 $u(x) \leq 0$, 則 $\sup_{\Omega} u \leq 0 \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$ 自動成立。

(A2) 如果存在一點 $x_0 \in \Omega$ 使得 $u(x_0) > 0$, 考慮集合 $\Omega^+ = \{x \in \Omega | u(x) > 0\} \subset \Omega$, 此時 Ω^+ 非空。因為在 Ω 上有 $Lu \geq 0$, 那麼函數 $u(x)$ 在 Ω^+ 上有

$$L_0 u \stackrel{\text{E}}{=} a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u \geq -c(x)u(x) \geq 0,$$

所以函數 u 在 $\bar{\Omega}^+$ 上的最大值可以在 $\partial\bar{\Omega}^+$ 上達到。記 $u^+ = \max(u, 0)$, 則

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^+} u = \sup_{\Omega^+} u^+ = \sup_{\partial\Omega^+} u^+ = \sup_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega} u^+ = \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

(A3) 由 (A1) 與 (A2) 得到 $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$ 。

(B1) 如果在 Ω 上都有 $u(x) \geq 0$, 則 $\inf_{\Omega} u \geq 0 \geq \inf_{\partial\Omega} u^-$ 自動成立。

(B2) 如果存在一點 $x_0 \in \Omega$ 使得 $u(x_0) < 0$, 那麼考慮 $\Omega^- = \{x \in \Omega | u(x) < 0\} \subset \Omega$, 此時 Ω^- 非空。因為在 Ω 上有 $Lu \leq 0$, 那麼函數 $u(x)$ 在 Ω^- 上有

$$L_0 u \stackrel{\text{E}}{=} a^{ij}(x) D_{ij} u + b^i(x) D_i u \leq -c(x)u(x) \leq 0,$$

所以函數 u 在 $\bar{\Omega}^-$ 上的最小值可以在 $\partial\bar{\Omega}^-$ 上達到。記 $u^- = \min(u, 0)$, 則

$$\inf_{\Omega} u = \inf_{\Omega^-} u = \inf_{\Omega^-} u^- = \inf_{\partial\Omega^-} u^- = \inf_{\partial\Omega^- \cap \partial\Omega} u^- = \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

(B3) 由 (B1) 與 (B2) 得到 $\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-$ 。

(C) 因為

$$\sup_{\Omega} |u| = \max \left(\sup_{\Omega} u, -\inf_{\Omega} u \right),$$

若是取到前者 $\sup_{\Omega} u$, 考慮 $Lu \geq 0$, 此時 $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u^+$ 。若是取到後者 $-\inf_{\Omega} u$, 考慮 $Lu \leq 0$, 此時 $-\inf_{\Omega} u = -\inf_{\partial\Omega} u^-$ 。於是

$$\sup_{\Omega} |u| = \max \left(\sup_{\Omega} u, -\inf_{\Omega} u \right) = \max \left(\sup_{\partial\Omega} u^+, -\inf_{\partial\Omega} u^- \right) = \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

□

3.2 強最大值原理

由弱最大值原理的討論中知道：若在 Ω 上 $Lu > 0$ ，則函數 u 在區域內部不可能達到最大值；也就是說，函數的最大值一定發生在邊界。若在 Ω 上 $Lu \geq 0$ ，則弱最大值原理推論出的結果是：函數 u 在 $\bar{\Omega}$ 的最大值可以在邊界 $\partial\bar{\Omega}$ 上達到，這時函數 u 有沒有可能在區域的內部 Ω 也同時達到最大值呢？如果函數 u 在內部 Ω 一點達到最大值的話，我們是否可以更進一步地刻畫函數 u 呢？有關這方面的討論，會與以下強最大值原理有關。

定義 1. 給定一個區域 Ω 以及 $x_0 \in \partial\Omega$ ，若存在一個球 $B \subset \Omega$ 使得 $x_0 \in \partial B$ ，則稱 Ω 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 處滿足內部球條件 (interior sphere condition)。

引理 2. 假設 L 在 Ω 上是一致橢圓型的，若 $Lu \geq 0$ ，以及 $x_0 \in \partial\Omega$ 滿足以下三個條件

- (a) 函數 $u(x)$ 在 x_0 處連續。
- (b) 對所有 $x \in \Omega$ 都有 $u(x_0) > u(x)$ 。
- (c) 區域 Ω 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 處滿足內部球條件。

此時，假設偏微分算子 L 的係數 $c(x)$ 滿足 $c(x)u(x_0) \leq 0$ ，其中 $x \in \Omega$ ，以及 $\frac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界。若 $u(x)$ 在 x_0 處的朝外法向導數存在，則有 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ 。

註 3. 這裡注意到關於 $c(x)$ 的假設，有以下幾種可能性都可以達到：

- (A) 若 $c(x) \equiv 0$ ，則 $c(x)u(x_0) \leq 0$ 成立。
- (B) 若 $c(x) \leq 0$ ，則所選取的點 x_0 必須滿足 $u(x_0) \geq 0$ 。
- (C) 若 $u(x_0) = 0$ ，則不需要假設 $c(x)$ 的符號。

證明： 因為 Ω 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 滿足內部球條件，則存在 $B = B_R(y) \subset \Omega$ 使得 $x_0 \in B$ 。給定 $\rho > 0$ ，對於 $r \in [\rho, R]$ ，考慮補助函數 (auxiliary function)

$$v(r) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2},$$

其中 $r = \|x - y\|$ ，而 α 是一個待定的正數。

因為

$$\begin{aligned} Lv &= e^{-\alpha r^2} (4\alpha^2 a^{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) - 2\alpha(a^{ii}(x) + b^i(x)(x_i - y_i))) + c(x)v(x) \\ &\geq e^{-\alpha r^2} (4\alpha^2 \lambda(x)r^2 - 2\alpha(a^{ii}(x) + \|\mathbf{b}\|r) + c(x)), \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{b} = (b^1, b^2, \dots, b^n)$ 。假設 $\frac{a^{ii}(x)}{\lambda(x)}$ ， $\frac{\|\mathbf{b}\|}{\lambda(x)}$ ， $\frac{c(x)}{\lambda(x)}$ 都是有界的情況下，可取 α 夠大使得在環形區域 $A \stackrel{\text{記}}{=} B_R(y) - B_\rho(y)$ 上滿足 $Lv \geq 0$ 。

再看環形區域的邊界，因為在 $\partial B_\rho(y)$ 上 $u(x) - u(x_0) < 0$ ，所以存在常數 $\varepsilon > 0$ 使得在 $\partial B_\rho(y)$ 上 $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0$ 。此時，對函數 $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)$ 來說，在 $\partial B_R(y)$ 上也滿足 $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0$ 。這麼一來，在環形區域 A 上就有

$$L(u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)) = L(u(x)) - L(u(x_0)) + \varepsilon L(v(x)) = -c(x)u(x_0) \geq 0,$$

而且在環形區域的邊界 ∂A 上 $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0$ ，所以由弱最大值原理 (weak maximum principle) 得知：環形區域 A 上 $u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x) \leq 0$ ，即在區域 A 上有不等式

$$u(x) - u(x_0) \leq -\varepsilon v(x) = -\varepsilon(v(x) - v(x_0)).$$

欲證明 $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ 為正，可由以下計算得知：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{u(x_0 + \nu h) - u(x_0)}{h} \geq \lim_{h \rightarrow 0^-} -\varepsilon \frac{v(x_0 + \nu h) - v(x_0)}{h} \\ &= -\varepsilon v'(R) = -\varepsilon \left(-2\alpha R e^{-\alpha R^2} \right) > 0. \end{aligned}$$

□

這裡註記一件事，到時候在引理的使用時，引理中要對應的區域 Ω 並非算子有定義的區域 Ω ，而是要設定一個特別的區域，然後確定其條件使用之；也就是說，引理所寫的 Ω 符號不要以為是要用在定義 Lu 上的那個區域。

定理 4 (強最大值原理, strong maximum principle). 假設 L 在區域 Ω 中是一致橢圓的，其中 $c = 0$ 以及 $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$)。如果 u 在 Ω 內部達到最大值(最小值)， u 是常數。如果 $c \leq 0$ 並且 $\frac{c(x)}{\lambda(x)}$ 有界，除非它是常數，否則 u 在 Ω 內部不能達到非負最大值(非正最小值)。

證明：假設 u 在 Ω 內部達到最大值 M 而且在 Ω 上 $u(x) \neq M$ ，考慮 $\Omega^- = \{x \in \Omega \mid u(x) < M\}$ ，此時 $\Omega^- \subset \Omega$ 而且 $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$ 。取一點 $y \in \Omega^-$ 且 $d(y, \partial\Omega^- \cap \Omega) < d(y, \partial\Omega)$ ，考慮以 y 為中心的球 $B_R(y) \subset \Omega^-$ 使得某一點 $x_0 \in \partial B_R(y) \cap (\partial\Omega^- \cap \Omega)$ ，則 $u(x_0) = M$ 。由引理 2 得知： $Du(x_0) \neq \mathbf{0}$ ，但是這與 u 在 x_0 達到最大值的性質矛盾。 □

3.3 先驗估計 (a priori estimate)

這一節想要推導的是關於 $Lu = f$ 的解的逐點估計。

定理 1. 假設在有界區域 Ω 上 $Lu \geq f$ ，其中 L 是橢圓型的， $c \leq 0$ ，並且 $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ，則

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda},$$

其中 C 是一個只與 Ω 的直徑還有 $\beta = \sup_{\Omega} \frac{|b|}{\lambda}$ 有關的常數。特別地，如果 Ω 位於兩個相距 d 的平行平面之間，這時 $C = e^{(\beta+1)d-1}$ 。

證明: 將 Ω 置於帶狀區域 $0 < x_1 < d$ 中, 考慮偏微分算子 $L_0 \stackrel{\text{記}}{=} a^{ij} D_{ij} + b^i D_i$, 取 $\gamma \geq M + 1$ 使得以下不等式成立:

$$L_0 e^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a^{11}(x) + \gamma b^1(x)) e^{\gamma x_1} \geq (\gamma^2 \lambda(x) - \gamma M \lambda(x)) e^{\gamma x_1} = \lambda(x) \gamma (\gamma - M) e^{\gamma x_1} \geq \lambda(x).$$

考慮函數

$$v(x) = \sup_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\gamma d} - e^{\gamma x_1}) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda},$$

則

$$Lv = (L_0 + c)v = L_0 v + cv \leq -\lambda(x) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda},$$

因爲

$$L(v - u) = Lv - Lu \leq -\lambda(x) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda} - f(x) = -\lambda(x) \left(\sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda} + \frac{f(x)}{\lambda(x)} \right) \leq 0,$$

而且在 $\partial\Omega$ 上 $v - u \geq 0$, 所以在 Ω 上有 $u \leq v$, 即

$$u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\gamma d} - e^{\gamma x_1}) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda} \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + (e^{\gamma d} - 1) \sup_{\Omega} \frac{|f^-|}{\lambda}.$$

□