2

拉普拉斯方程式

這一章欲研究定義在歐氏空間中調和函數的相關性質, 並證明拉普拉斯方程式與泊松方程式關於狄立克萊問題解的存在性與唯一性。這裡先給出調和函數的定義。

定義 1. 記 Ω 爲 $\mathbb{R}^n$ 中的一個區域, 而 u 是 $C^2(\Omega)$ 函數。若函數 u 滿足

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) \geq 0 \ (= 0, \leq 0),$$

則稱 u 是區域 Ω 的 *下調和*、*調和*、*上調和* (subharmonic, harmonic, or superharmonic) 函數。

探討調和函數的主要目的是想研究以下偏微分方程式:

(A) *拉普拉斯方程式* (Laplace's equation) $\Delta u = 0$: 它表示齊次 (homogeneous) 偏微分方程式。

(B) *泊松方程式* (Poisson's equation) $\Delta u = f$: 它表示非齊次 (inhomogeneous) 偏微分方程式。

給定了偏微分方程式, 通常還會再搭配一些條件, 比方說我們會在區域的邊界 $\partial\Omega$ 上指定函數值, 然後問是否有函數 u 同時滿足偏微分方程式以及邊界條件, 像這樣的問題我們會說它是 *狄立克萊問題* (Dirichlet problem)。

在前述的定義中, 我們對於 Δu 的符號而給出下調和、調和與上調和函數三種概念, 這一章的重點是在了解調和函數的性質, 在一些情況我們會透過觀察下調和與上調和函數進而得到調和函數的性質, 這是因爲調和函數可以理解成它既是下調和函數也是上調和函數。

一個認識調和函數的方式是從微積分的散度定理作爲切入點。假設 Ω 是一個有界區域, 而且它的邊界 $\partial\Omega$ 具有 C^1 的光滑性。令 ν 是邊界 $\partial\Omega$ 對於區域 Ω 的朝外單位法向量, 對任意在 $C^1(\overline{\Omega})$ 上的向量場 $\mathbf{w}$, 由散度定理 (divergence theorem) 得知:

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{w}, \nu \rangle \, \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示在 $\partial\Omega$ 上的 $(n-1)$-維面積元素。特別地, 若 u 是一個 $C^2(\overline{\Omega})$ 函數, 考慮 $\mathbf{w} = \nabla u$, 則

$$\int_\Omega \Delta u \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, \mathrm{d}\sigma。$$

往後我們會經常將這個公式做各種變形繼續探討拉普拉斯方程式與泊松方程式的特性。

2.1 平均值不等式

關於調和函數一個最重要的性質就是以下的平均值性質。

定理 1 (平均值不等式, mean value inequality). 若 $u \in C^2(\Omega)$ 在 Ω 上滿足 $\Delta u \gtreqqless 0$, 則對任意半徑爲 R 的球 $B_R(y) \subset\subset \Omega$, 都有

$$u(y) \lesseqqgtr \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_R(x) \quad \text{與} \quad u(y) \lesseqqgtr \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)。$$

證明: 對於 $r \in (0, R]$, 定義函數

$$f(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x),$$

其中 $r = |x-y|$。現考慮在 $\mathbb{S}^{n-1}(1) = \partial B_1(y)$ 上的變數變換 $z = \frac{x-y}{r} = \nu$, 此時 $x = y + rz$ 以及 $\mathrm{d}\sigma_1(z) = \frac{1}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}\sigma_r(x)$, 則

$$\begin{aligned}
f'(r) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x)\right) = \frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B_r(y)} \frac{u(x)}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}\sigma_r(x)\right) \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\left(\frac{\partial}{\partial r}\int_{\partial B_1(0)} u(y+rz)\,\mathrm{d}\sigma_1(z)\right) = \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} \langle \nabla u(y+rz), \nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma_1(z) \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_r(y)} \langle \nabla u(x), \nu\rangle \cdot \frac{1}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}\sigma_r(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(y)} \langle \nabla u(x), \nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma_r(x) \\
&= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(y)} \Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu \gtreqqless 0,
\end{aligned}$$

由此得知 $f(r)$ 是一個遞增(常數、遞減) 函數。

另一方面, 對所有 $r \in (0, R]$, 由積分的中間值定理 (Intermediate Value Theorem for Integrals) 得知: 存在 $\xi_r \in \partial B_r(y)$ 使得

$$u(\xi_r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x),$$

因爲 u 是連續函數, 所以等式兩邊考慮 $r \to 0^+$ 之後得到

$$u(y) = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x)。$$

於是, 由 $f(0) = \lim\limits_{r\to 0^+} f(r) \lesseqqgtr f(R)$ 得到定理結論的第一個式子:

$$u(y) \lesseqqgtr \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_R(x)。$$

至於第二個式子, 對於 $0 \le r \le R$, 由式子

$$n\omega_n r^{n-1} u(y) \lesseqqgtr \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r(x)$$

兩邊對於 r 積分後得到

$$\omega_n R^n u(y) \lesseqqgtr \int_0^R \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma_r\,\mathrm{d}r = \int_{B_R(y)} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \Rightarrow u(y) \lesseqqgtr \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} u(x)\,\mathrm{d}\mu(x)。$$

$\square$

2.2 最大值原理與最小值原理

定理 1 (強最大值原理(強最小值原理), strong maximum (minimum) principle)**.** 假設在區域 Ω 上 $\Delta u \geq 0$ (≤ 0), 若存在一點 $y \in \Omega$ 滿足 $u(y) = \sup\limits_{\Omega} u$ $(\inf\limits_{\Omega} u)$, 則 u 爲常數。換言之, 一個調和函數除了常數函數之外, 不會在區域的內部產生最大值與最小值。

證明: 先看 $\Delta u \geq 0$ 的情況。記 $M = \sup\limits_{\Omega} u$, 定義 $\Omega_M = \{x \in \Omega |\, u(x) = M\}$, 由假設知道集合 Ω_M 不是空集合。因爲 u 是連續函數, 所以集合 Ω_M 對於 Ω 而言是閉集合。

另一方面, 對任意 $z \in \Omega_M$, 現取一個半徑 $R > 0$ 使得 $B_R(z) \subset\subset \Omega$, 由平均值不等式 (Mean Value Inequality) 得知:

$$M = u(z) \leq \frac{1}{\omega^n R^n} \int_{B_R(z)} u(x)\, \mathrm{d}\mu \leq M,$$

得到

$$0 \leq \frac{1}{\omega^n R^n} \int_{B_R(z)} (M - u(x))\, \mathrm{d}\mu \leq 0,$$

因爲 $M - u(x) \geq 0$, 而且 $\int_{B_R(z)} (M - u(x))\, \mathrm{d}\mu = 0$, 所以在 $B_R(z)$ 上 $M - u(x) \equiv 0$, 即 $u(x) \equiv M$。這件事情告知集合 Ω_M 對於 Ω 而言是開集合。由 Ω 的連通性得知 $\Omega_M = \Omega$。

對於上調和的函數, 考慮 $-u$, 則 $-u$ 是一個上調和函數, 而且 $\sup\limits_{\Omega}(-u) = -\inf\limits_{\Omega} u$。將上述討論用到 $-u$ 再做整理即可得證。 $\square$

定理 2 (弱最大值原理(弱最小值原理), weak maximum (minimum) principle)**.** 若 $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 Ω 上滿足 $\Delta u \geq 0$ (≤ 0)。假設 Ω 有界, 則

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right)。 \tag{2.1}$$

於是對於調和函數 u 而言, 對所有 $x \in \Omega$, 都有

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u。$$

證明: 若存在 $y \in \Omega$ 使得 $u(y) = \sup\limits_{\Omega} u$, 由 定理 **1** 得知 u 爲常數, 則 (2.1) 式成立。若不存在 $y \in \Omega$ 使得 $u(y) = \sup\limits_{\Omega} u$, 自然 (2.1) 也成立。 $\square$

關於最大最小值原理的一個應用是有關狄立克萊問題解的唯一性。

定理 3 (古典拉普拉斯方程與泊松方程的狄立克萊問題之唯一性定理)**.** 若 $u, v \subset C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ 滿足在 Ω 上有 $\Delta u = \Delta v$, 在 $\partial\Omega$ 上有 $u = v$, 則在 Ω 上 $u \equiv v$。

證明: 令 $w = u - v$, 則 w 滿足在 Ω 上 $\Delta w = 0$, 並且在 $\partial\Omega$ 上 $w = 0$。根據 定理 **2** 得到在 Ω 上 $w \equiv 0$, 因此 $u \equiv v$。 $\square$

注意到這個定理是在說明方程式的解若存在, 則唯一。至解是否存在, 則是往後幾節要討論的重點。

2.3 哈那克不等式

定理 1. 假設 u 在 Ω 上是一個非負的調和函數, 則對任意有界子區域 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 存在常數 $C = C(n, \Omega', \Omega)$ 使得

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u。$$

證明: 首先考慮 $y \in \Omega, B_{4R}(y) \subset \Omega$ 的情況。對任意兩點 $x_1, x_2 \in B_R(y)$, 則

$$B_R(x_1) \subset B_{2R}(y) \subset B_{3R}(x_2) \subset B_{4R}(y)。$$

利用平均值性質 (Mean Value Property), 因爲函數 u 非負, 所以

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,\mathrm{d}\mu \\ u(x_2) &= \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u(x)\,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\,\mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

將上述不等式串聯可得 $u(x_1) \leq 3^n u(x_2)$, 因此 $\sup\limits_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf\limits_{B_R(y)} u$。

現在考慮 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 若 $z_1, z_2 \in \overline{\Omega}'$ 滿足 $u(z_1) = \sup\limits_{\Omega'} u$ 以及 $u(z_2) = \inf\limits_{\Omega'} u$, 考慮 $\Gamma \subset \overline{\Omega}'$ 是一條連接 z_1 與 z_2 的路徑, 另外取 R 使得 $4R < \operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$。考慮集合 $E = \{B_R(y) | y \in \Gamma\}$, 則 E 是閉集合 Γ 的一個開覆蓋。根據有限覆蓋定理 (Heine-Borel Theorem), Γ 可以被集合 E 中的有限個數的球覆蓋。也就是說, 存在 $y_1, y_2, \ldots, y_N \in \Gamma$ 使得 $\Gamma \subset \cup_{i=1}^N B_R(y_i)$。因爲 $B_R(y_i)$ 中的任兩點 x', x'' 都有 $u(x') \leq 3^n u(x'')$, 現於 Γ 上由 z_1 到 z_2 依序選取 $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ 使得 $x_i \in B_R(y_i) \cap B_R(y_{i+1})$, 將不等式串聯起來可得

$$u(z_1) \leq 3^{nN} u(z_2)。$$

於是定理敘述中的常數取 $C = 3^{nN}$ 即爲所求。 □

2.4 格林表現公式

給定 u 和 v 是 $C^2(\overline{\Omega})$ 函數, 記 $\mathbf{w} = v\nabla u$, 因爲 $\operatorname{div} \mathbf{w} = \langle \nabla v, \nabla u \rangle + v\Delta u$, 由散度定理 (Divergence Theorem) 可得 格林第一恆等式 (Green's first identity):

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle\,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\sigma。 \tag{2.2}$$

對於 (2.2) 式, 現將 u 和 v 兩者角色對調, 再將兩式相減, 則得 格林第二恆等式 (Green's second identity):

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}\sigma。 \tag{2.3}$$

現給定一點 $y \in \Omega$, 引進 拉普拉斯方程式的標準化基本解 (normalized fundamental solution of Laplace's equation) 如下:

$$\Gamma(x;y) \overset{\text{記}}{=} \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n\omega_n(n-2)|x-y|^{n-2}}, & \text{若 } n>2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y|, & \text{若 } n=2, \end{cases}$$

直接計算可得對於 $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$D_i\Gamma(x;y) = \frac{x_i - y_i}{n\omega_n|x-y|^n} \quad \text{以及} \quad D_{ij}\Gamma(x;y) = \frac{|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{n\omega_n|x-y|^{n+2}},$$

於是

$$\Delta\Gamma(x;y) = \frac{n|x-y|^2 - n\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}{n\omega_n|x-y|^{n+2}} = 0。$$

上述計算告知: 給定 $y \in \mathbb{R}^n$, 函數 $\Gamma(x;y)$ 在 $x \in \mathbb{R}^n, x \neq y$ 的地方都是調和函數。注意到函數 $\Gamma(x;y)$ 在 $x = y$ 處沒有定義。

爲了往後分析上的需要, 這裡先寫出拉普拉斯方程式的標準化基本解的相關估計:

$$\begin{aligned} |D_i\Gamma(x;y)| &\le \frac{1}{n\omega_n|x-y|^{n-1}}, \\ |D_{ij}\Gamma(x;y)| &\le \frac{1}{\omega_n|x-y|^{n}}, \\ |D_\beta\Gamma(x;y)| &\le \frac{C}{n\omega_n|x-y|^{n-2+|\beta|}}, \quad \text{其中} \quad C = C(n,|\beta|)。 \end{aligned}$$

由於拉普拉斯方程式的標準化基本解 $\Gamma(x;y)$ 在 $x = y$ 處是奇異點 (singularity), 這導致我們無法將格林第二恆等式的 v 直接替換成 $\Gamma(x;y)$, 所以我們做以下調整: 對於充分小的 $\rho > 0$, 在區域 $\Omega - \overline{B}_\rho(y)$ 上則可以使用格林第二恆等式, 此時會有

$$\int_{\Omega - B_\rho(y)} \Gamma(|x-y|)\Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\partial\Omega} + \int_{\partial B_\rho(y)} \left(\Gamma(|x-y|)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu} - u(x)\frac{\partial\Gamma(|x-y|)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma。$$

注意到

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial B_\rho(y)} \Gamma(|x-y|)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma\right| &= \left|\Gamma(\rho)\int_{\partial B_\rho(y)} \frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma\right| \le |\Gamma(\rho)||\partial B_\rho(y)| \sup_{\partial B_\rho(y)}|Du(x)| \\ &\le \begin{cases} \dfrac{n\omega_n\rho^{n-1}}{n\omega_n(n-2)\rho^{n-2}} \cdot \sup\limits_{\partial B_\rho(y)}|Du(x)| & \text{若 } n>2 \\ \dfrac{|\ln\rho|}{2\pi}\cdot 2\omega_2\rho \cdot \sup\limits_{\partial B_\rho(y)}|Du(x)| & \text{若 } n=2 \end{cases} \\ &\to 0 \quad \text{當} \quad \rho \to 0^+, \end{aligned}$$

而且(下面式子的討論注意到 ν 的方向是 $-\partial_\rho$)

$$-\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\,\frac{\partial\Gamma(|x-y|)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma=\Gamma'(\rho)\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}\dfrac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma & \text{若 } n>2\\ \dfrac{1}{2\pi\rho}\displaystyle\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma & \text{若 } n=2\end{cases}$$

$$\to u(y) \text{ 當 } \rho\to 0^+,$$

所以在 $\rho\to 0^+$ 之下, 我們得到 格林表現公式 (Green's representation formula):

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\,\frac{\partial\Gamma(|x-y|)}{\partial\nu}-\Gamma(|x-y|)\,\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma+\int_\Omega \Gamma(|x-y|)\Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu。\tag{2.4}$$

注意到上式的最後一項是一個瑕積分 (improper integral)。

定義 1. 給定可積分函數 $f(x)$, 稱瑕積分

$$\int_\Omega \Gamma(|x-y|)f(x)\,\mathrm{d}\mu$$

是帶有密度 (density) $f(x)$ 的 牛頓位勢 (Newtonian potential)。

現從格林表現公式繼續討論相關結果:

(A) 若 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中具有緊緻支撐 (compact support), 則對任何 $y\in \operatorname{supp} u$, 都有

$$u(y)=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(|x-y|)\Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu,$$

注意等式的右邊仍然是一個瑕積分。

(B) 若 u 是調和函數, 則有

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\,\frac{\partial\Gamma(|x-y|)}{\partial\nu}-\Gamma(|x-y|)\,\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma。$$

因爲上述被積分函數對於變數 y 而言是無限次可微分的, 甚至是實解析 (real analytic) 的; 因此函數 u 在 Ω 上也是實解析的, 也就是說, 調和函數在有定義的區域上都是解析函數。由解析函數的性質可進一步得知: 調和函數是被任何一個開子集上的函數值唯一決定。

(C) 若有函數 $h\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 在 Ω 上滿足 $\Delta h=0$, 由格林第二恆等式 (Green's second identity) (2.3) 得到

$$0=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\,\frac{\partial h(x)}{\partial\nu}-h(x)\,\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma+\int_\Omega h(x)\Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu。\tag{2.5}$$

記 $G(x;y)=\Gamma(x;y)+h(x)=\Gamma(|x-y|)+h(x)$, 將 (2.4) 與 (2.5) 兩式相加, 則得到一般情況的格林表現公式 (general version of Green's representation formula):

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\,\frac{\partial G(x;y)}{\partial\nu}-G(x;y)\,\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}\sigma+\int_\Omega G(x;y)\Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu。\tag{2.6}$$

(D) 由 (C), 若更進一步要求 $G(x;y)=0$ 在 $\partial\Omega$ 上滿足 $G(x;y)=0$, 則 $h(x)=h(x;y)$ 和 y 有關, 而且

$$u(y)=\int_{\partial\Omega} u(x)\,\frac{\partial G(x;y)}{\partial\nu}\,\mathrm{d}\sigma+\int_{\Omega} G(x;y)\Delta u(x)\,\mathrm{d}\mu, \tag{2.7}$$

函數 $G(x;y)$ 稱爲在區域 Ω 上的 (狄立克茉) 格林函數 ((Dirichlet) Green's function), 有時也稱爲在 Ω 上的 第一類格林函數 (Green's function of the first kind)。由 定理 **3**, 假如格林函數存在, 則格林函數具有唯一性。至於格林函數的存在性會在之後的章節陸續討論。在此, 若接受格林函數的存在性, 則 (2.7) 式將說明: 對於 $C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 的調和函數 u, 其函數值可以用其邊界值重新表達。

2.5　泊松積分

若區域 $\Omega=B_R(0)$ 是一個球, 則我們可以推導出格林函數 (Green's function) 的明確表達式, 這麼一來就可將上一節的討論具體實現, 而這最後的結果稱爲調和函數在球上的泊松積分表達式 (Poisson integral representation)。

給定一點 $y\in B_R(0)$, 令

$$\overline{y}=\begin{cases}\dfrac{R^2}{|y|^2}\,y=\dfrac{R^2}{|y|}\cdot\dfrac{y}{|y|} & \text{若 } y\neq 0\\ \infty & \text{若 } y=0,\end{cases}$$

則 $\overline{y}$ 稱爲 y 對於球 $B_R(0)$ 的反演點 (inversion point)。

根據單元 2.4 關於 (C) 與 (D) 之討論, 現在的目標是想要找到函數 $h(x;y)\in C^1(\overline{B_R(0)})\cap C^2(B_R(0))$ 使得

$$\begin{cases}\Delta h=0 & \text{在 } B_R(0)\\ h(x;y)=\Gamma(|x-y|) & \text{在 } \partial B_R(0)。\end{cases}$$

這時, 考慮

$$h(x;y)=\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right),$$

注意到這裡寫 $h(x;y)$ 表示函數是以 x 爲變數。此外, 給定 $y\in B_R(0)$, 則得到反演點 $\bar{y}$, 所以函數 h 與 y 有關, 於是 $h(x;y)$ 在分號後面的註記是說這個函數與 y 有關。

以下將驗證函數 $h(x;y)$ 的確滿足所要求的性質。

(A) 因爲 $h(x;y)$ 只有在 $x=\bar{y}$ 的地方沒有定義, 而 $|\bar{y}|=\frac{R^2}{|y|}=R\cdot\frac{R}{|y|}>R$, 所以 $\bar{y}\notin B_R(0)$, 於是 $h(x;y)$ 在 $B_R(0)$ 上處處有定義, 而 $h(x;y)$ 在 $B_R(0)$ 上是調和函數告知在 $B_R(0)$ 上 $\Delta h=0$。

(B) 對所有 $x \in \partial B_R(0)$, 則 $|x|^2 = R^2$, 因爲

$$
\begin{aligned}
\frac{|y|^2}{R^2}|x-\bar{y}|^2 &= \frac{|y|^2}{R^2}\left|x - \frac{R^2}{|y|^2}y\right|^2 = \frac{|y|^2}{R^2}\left(|x|^2 - \frac{2R^2\langle x,y\rangle}{|y|^2} + \frac{R^4|y|^2}{|y|^4}\right) \\
&= |y|^2 - 2\langle x,y\rangle + R^2 = |y|^2 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 = |x-y|^2,
\end{aligned}
$$

所以 $h(x;y) = \Gamma(|x-y|)$;也就是說, 函數 $h(x;y)$ 在 $\partial B_R(0)$ 上的值與 $\Gamma(|x-y|)$ 相同。

如此一來, 我們得到在 $B_R(0)$ 上的格林函數 (Green's function)

$$
\begin{aligned}
&G(x;y) \\
&= \begin{cases} \Gamma(|x-y|) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) & \text{若 } y \neq 0 \\ \Gamma(|x|) - \Gamma(R) & \text{若 } y = 0 \end{cases} \\
&= \Gamma\left(\sqrt{|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x,y\rangle + R^2}\right) \text{ 其中 } x,y \in B_R(0), x \neq y。
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

由 (2.8) 式定義出的格林函數 $G(x;y)$ 有以下性質:

(A) 對所有 $x,y \in \overline{B_R(0)}$, 都有 $G(x;y) = G(y;x)$。這個性質可從格林函數的第二個等式直接看出。

(B) 格林函數滿足 $G(x,y) \leq 0$。這是因爲

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{|y|}{R}|x-\bar{y}|\right)^2 - |x-y|^2 \\
&= \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} - 2\langle x,y\rangle + R^2 - \left(|x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2\right) = \frac{|x|^2|y|^2}{R^2} + R^2 - |x|^2 - |y|^2 \\
&= |x|^2\left(\frac{|y|^2 - R^2}{R^2}\right) - (|y|^2 - R^2) = (|y|^2 - R^2)\left(\frac{|x|^2 - R^2}{R^2}\right) \geq 0,
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}| \geq |x-y|$, 於是 $G(x,y) \leq 0$。

(C) 函數 $G(x;y)$ 在 $x \in \partial B_R(0)$ 沿著朝外法方向的方向導數爲

$$
\frac{\partial G}{\partial \nu} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}。
$$

證明: 以下討論對於 $n=2$ 與 $n \geq 3$ 都成立:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma(|x-y|) - \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right) = \frac{x_i - y_i}{n\omega_n|x-y|^n} - \frac{x_i - \overline{y}_i}{n\omega_n\left(\frac{|y|}{R}\right)^{n-2}|x-\overline{y}|^n} \\
&= \frac{x_i - y_i}{n\omega_n|x-y|^n} - \frac{\frac{|y|^2}{R^2}\left(x_i - \frac{R^2}{|y|^2}y_i\right)}{n\omega_n|x-y|^n},
\end{aligned}
$$

於是

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \nu} &= \left\langle \nabla G, \frac{x}{|x|} \right\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{|y|^2}{R^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\omega_n |x-y|^n |x|} \\ &= \left(\frac{R^2 - |y|^2}{R^2}\right) \frac{|x|^2}{n\omega_n |x-y|^n |x|} = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R |x-y|^n}。\end{aligned}$$

□

由上討論可知: 若 $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ 是一個調和函數, 則有以下的泊松積分公式 (Poisson integral formula):

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(x)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}\sigma(x)。 \tag{2.9}$$

實際上我們感興趣的是關於這個結果的逆敘述。

定理 1. 設 φ 是一個只定義在 $\partial B_R(0)$ 上的連續函數, 考慮函數

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \, \mathrm{d}\sigma(y) & 若\ x \in B_R(0) \\ \varphi(x) & 若\ x \in \partial B_R(0) \end{cases} \tag{2.10}$$

則 u 屬於 $C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B_R(0)})$, 並且在 $B_R(0)$ 上滿足 $\Delta u = 0$。

證明: 因爲格林函數滿足 $\Delta G(x, y) = 0$ 則 $\Delta(\frac{\partial G}{\partial \nu}) = 0$, 所以由 (2.10) 式定義出的 u 在 $B_R(0)$ 上是調和函數。

欲證明函數 $u(x)$ 在 $\partial B_R(0)$ 上的連續性, 首先注意到在 (2.9) 式中, 若考慮 $u(x) \equiv 1$, 則有

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x; y) \, \mathrm{d}\sigma(y) = 1 \text{ 對所有 } x \in B_R(0),$$

其中

$$K(x; y) \stackrel{記}{=} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x-y|^n}, \text{ 而 } x \in B_R(0) \text{ 以及 } y \in \partial B_R(0)$$

稱爲 泊松核 (Poisson kernel)。

給定任意一點 $x_0 \in \partial B_R(0)$, 欲證明函數 $u(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續。對任意 $\varepsilon > 0$, 因爲 φ 是連續函數, 所以存在 $\delta_1 > 0$ 使得對所有滿足 $|y - x_0| < \delta_1$ 的點都有 $|\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$。而 $\partial B_R(0)$ 是緊緻集, 由極值定理 (Extreme Value Theorem) 得知: 存在 $M > 0$ 使得在 $\partial B_R(0)$ 上都有 $|\varphi| \le M$。現在我們先積分區域 $\partial B_R(0)$ 拆成 $|y - x_0| < \delta_1$ 與 $|y - x_0| \ge \delta_1$ 兩個部份對以下函數值進行估計:

$$\begin{aligned} & |u(x) - u(x_0)| \\ &= \left| \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n} \mathrm{d}\sigma(y) - \varphi(x_0) \right| = \left| \int_{\partial B_R(0)} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x-y|^n} (\varphi(y) - \varphi(x_0)) \mathrm{d}\sigma(y) \right| \\ &\le \int_{|y-x_0|<\delta_1} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x-y|^n} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \mathrm{d}\sigma(y) + \int_{|y-x_0|\ge\delta_1} \frac{R^2 - |x|^2}{n\omega_n R |x-y|^n} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| \mathrm{d}\sigma(y) \\ &= \mathrm{I} + \mathrm{II}, \end{aligned}$$

然後先觀察所有滿足 $|x-x_0|<\frac{\delta_1}{2}$ 的點, 得到

$$\mathrm{I}<\int_{|y-x_0|<\delta_1}\frac{\varepsilon(R^2-|x|^2)}{n\omega_n R|x-y|^n}\mathrm{d}\sigma(y)\leq\varepsilon\int_{\partial B_R(x_0)}\frac{(R^2-|x|^2)}{n\omega_n R|x-y|^n}\mathrm{d}\sigma(y)=\varepsilon,$$

而 $|x-y|=|y-x|=|y-x_0+x_0-x|\geq|y-x_0|-|x-x_0|>\delta_1-\frac{\delta_1}{2}=\frac{\delta_1}{2}$, 所以

$$\mathrm{II}<\int_{|y-x_0|\geq\delta_1}\frac{(R^2-|x|^2)2M}{n\omega_n R\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n}\mathrm{d}\sigma(y)\leq\frac{(R^2-|x|^2)2M}{n\omega_n R\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n}\cdot n\omega_n R^{n-1}=\frac{2M(R^2-|x|^2)R^{n-2}}{\left(\frac{\delta_1}{2}\right)^n}。$$

觀察

$$R^2-|x|^2=(R+|x|)(R-|x|)=(R+|x|)(|x_0|-|x|)\leq(R+R)|x-x_0|=2R|x-x_0|,$$

現在取 $\delta=\min(\frac{\delta_1}{2},\frac{\varepsilon}{2R})>0$, 則對所有 $|x-x_0|<\delta$, 都有 $R^2-|x|^2<\varepsilon$, 所以

$$|u(x)-u(x_0)|\leq\varepsilon+2MR^{n-2}\left(\frac{2}{\delta_1}\right)^n\varepsilon=\left(1+2MR^{n-2}\left(\frac{2}{\delta_1}\right)^n\right)\varepsilon,$$

因此 u 在 $x=x_0$ 處連續, 故 $u\in C^0(\overline{B_R(0)})$。 □

2.6 收斂定理

這一節想要介紹兩個調和函數列的收斂定理。在此之前, 先證明調和函數與平均值性質的等價性:

定理 1. 函數 $u\in C^0(\Omega)$ 是調和函數等價於對任何球 $B_R(y)\subset\subset\Omega$ 都滿足平均值性質:

$$u(y)=\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R(y)}u(x)\mathrm{d}\sigma(x)。$$

關於這個定理, 應該先說明清楚這個等價敘述, 理解如下: 若函數 $u\in C^2(\Omega)$ 是調和函數, 則對任何 $B_R(y)\subset\subset\Omega$ 都滿足平均值性質; 若函數 $u\in C^0(\Omega)$ 對任何的球 $B_R(y)\subset\subset\Omega$ 上都滿足平均值性質, 則 $u\in C^2(\Omega)$ 而且是調和函數。

證明: $(\Rightarrow)$ 調和函數 $u\in C^2(\Omega)$ 滿足平均值等式, 這是單元 2.1 的 **定理 1** 之結果。
$(\Leftarrow)$ 對任何球 $B\subset\subset\Omega$, 由單元 2.5 的 **定理 1** 得知: 存在調和函數 $h(x)\in C^2(B)\cap C^0(\overline{B})$ 使得在 ∂B 上滿足 $h(x)=u(x)$。

現觀察單元 2.2 **定理 1, 2, 3** 的證明流程, 注意到這個過程中只用到了平均值性質。

考慮 $w(x)=u(x)-h(x)$, 則函數 $w(x)$ 在 B 當中的任何一個球也都滿足平均值性質。現考慮以下兩種情況:

(A) 若 $w(x)$ 在內部達到極值, 則在 B 上 $w(x)$ 爲常數, 而 B 任意, 所以 $w(x)$ 在 Ω 上爲常數, 所以 $u(x)=h(x)+C$ 爲 C^2 的調和函數。

(B) 若 $w(x)$ 在邊界達到極值, 則在 B 上 $w(x)=0$, 於是在 B 上 $u(x)=h(x)$, 而 B 任意, 所以在 Ω 上 $u(x)=h(x)$。

綜合上述討論, 得到 $u(x)$ 在 Ω 上爲調和函數。 □

定理 2. 若調和函數列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在區域 Ω 是均勻收斂的, 則極限函數亦爲調和函數。

證明: 若 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在區域 Ω 是調和函數列, 並且 $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ 在區域 Ω 上均勻收斂, 任給 $y \in \Omega$ 以及 $B_R(y) \subset\subset \Omega$, 因爲均勻收斂的函數列在取極限下保持連續性, 並且積分與極限可以交換, 所以

$$\begin{aligned} u(y) &= \lim_{n\to\infty} u_n(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u_n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) \\ &= \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(x)\,\mathrm{d}\sigma(x), \end{aligned}$$

於是函數 $u \in C^0(\Omega)$, 並且對任何球 $B_R(y) \subset\subset \Omega$ 都滿足平均值性質, 由 **定理 1** 得知 $u \in C^2(\Omega)$ 是調和函數。 □

定理 3. 假設 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是在區域 Ω 上的調和函數列, 而且對所有 $x \in \Omega$, $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞增數列。若有一點 $y \in \Omega$ 使得數列 $\{u_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ 是有界的, 則函數列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在任何有界的子區域 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 上都會均勻收斂至一個調和函數。

證明: 因爲數列 $\{u_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增有上界, 所以數列收斂, 由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \geq N$ 都有 $0 \leq u_m(y) - u_n(y) < \varepsilon$。根據單元 2.3 的 **定理 1** 哈那克不等式 (Harnack inequality), 得到

$$\sup_{\Omega'} |u_m(x) - u_n(x)| \leq C \inf_{\Omega'} |u_m(x) - u_n(x)| \leq C(u_m(y) - u_n(y)) < C\varepsilon,$$

其中 C 是與 Ω' 和 Ω 有關的常數, 所以函數列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω' 上是均勻收斂的 (uniformly convergent), 由 **定理 2** 得知極限函數 $u(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} u_n(x)$ 是一個調和函數。 □

2.7 內部導數估計

若 $u \in C^{\infty}(\Omega)$ 是調和函數, 則對任何 $k = 1, \ldots, n$, 都有

$$\Delta(D_k u) = \sum_{i=1}^{n} (u_k)_{ii} = (\Delta u)_k = 0,$$

將平均值性質 (Mean Value Property) 以及散度定理 (Divergence Theorem) 用於每一個 $D_k u$ 以及 $\mathbf{w} = (0, \ldots, 0, u, 0, \ldots, 0)$, 其中 u 是位於第 k 個分量, 得到對 $B_R(y) \subset\subset \Omega$, 都有

$$\begin{aligned} D_k u(y) &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} D_k u(x)\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(y)} \operatorname{div} \mathbf{w}\,\mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(y)} \langle \mathbf{w}, \nu \rangle\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(y)} u\,\nu_k\,\mathrm{d}\sigma, \end{aligned}$$

其中 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ 是在球 $\partial B_R(y)$ 上對於 $B_R(y)$ 的朝外單位法向量。

以下想要得到關於調和函數 u 的梯度估計, 給定 $y \in \Omega$, 對於向量 $Du(y)$, 現在重新設定坐標使得 $Du(y) = D_1u(y)$, 則

$$\begin{aligned}
|Du(y)| = |D_1u(y)| &= \left| \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(y)} u\,\nu_1 \,\mathrm{d}\sigma \right| \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{\partial B_R(y)} |u| \|\nu_1\| \,\mathrm{d}\sigma \\
&\leq \frac{1}{\omega_n R^n} \cdot \sup_{\partial B_R(y)} |u| \cdot \int_{\partial B_R(y)} 1 \,\mathrm{d}\sigma = \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(y)} |u| \leq \frac{n}{d_y} \sup_{\Omega} |u|,
\end{aligned}$$

其中 $d_y = \operatorname{dist}(y, \partial\Omega)$。

反覆使用上述結果則可得到高階導數的估計。現將此結果寫成定理。

定理 1. 假設 u 在區域 Ω 是調和函數, 令 Ω' 是任何在 Ω 內的緊緻子集, 則對任何多重指標 α 都有

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{d} \right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|, \tag{2.11}$$

其中 $d = \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$。

關於 (2.11) 的應用是有關調和函數在任何緊緻子集合當中對於任何階導數的等度連續性 (equicontinuity), 利用阿澤拉-阿斯克里定理 (Arzela-Ascoli Theorem) 可得以下結論:

定理 2. 在區域 Ω 上的任何有界的調和函數列必存在一個子數列使得這個子數列在任何緊緻子集合上均勻收斂至一個調和函數。

參考文獻

[1] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S. *Elliptic partial differential equations of second order.* Second edition. **224.** Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+513 pp.