偏微分方程(一) 課程學習單 活動 **10**

學號: ____________ 姓名: ____________ 你的伙伴: ____________

1 單元介紹與學習目標

☐ 利用分離變數法解波動方程式與擴散方程式。

☐ 傅利葉級數的意義。

2 預備知識

討論 **1.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(A1) 常微分方程式 $y' + \alpha y = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ 的一般解爲何?

(A2) 常微分方程式 $y'' = 0$ 的一般解爲何? 若考慮邊界值條件 $y(0) = y(l) = 0$, 則方程式的解爲何?

討論 **2.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(B1) 關於 $y'' - \beta^2 y = 0, \beta > 0$ 的特徵方程式爲何? 方程式的一般解爲何?

(B2) 關於 $y'' + \beta^2 y = 0, \beta > 0$ 的特徵方程式爲何? 方程式的一般解爲何?

討論 **3.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(C1) 關於微分方程式 $y'' - \beta^2 y = 0$, 若考慮邊界值條件 $y(0) = y(l) = 0$, 則方程式的解爲何?

(C2) 關於微分方程式 $y'' + \beta^2 y = 0$, 若考慮邊界值條件 $y(0) = y(l) = 0$, 則方程式的解爲何?

3 用分離變數法解狄立克萊條件下的波動方程式 (第 84 頁)

考慮帶有初始條件與邊界條件的波動方程式:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{當 } 0 < x < l \\ u(0,t) = 0 & u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

(a) 假設方程式 (1) 的解型如 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 試求 X 和 T 之間滿足的關係式。

(b) 兩邊同除 c^2XT 之後得到:

(c) 因爲初始條件 $u(0,t) = u(l,t) = 0$ 的關係, 只有在 $\lambda = -\beta^2$ 的情況下方程式才有解, 這時

(d) 由邊界值條件得到:

(e) 由上述分析, 最後得到

4 用分離變數法解狄立克萊條件下的擴散方程式 (第 87 頁)

考慮帶有初始條件與邊界條件的擴散方程式:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & \text{當 } 0 < x < l, 0 < t < \infty \\ u(0,t) = 0 & u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{2}$$

(a) 假設方程式 (2) 的解型如 $u(x,t) = X(x)T(t)$, 試求 X 和 T 之間滿足的關係式。

(b) 兩邊同除 kXT 之後得到:

(c) 分別處理常微分方程式得到:

(d) 由邊界值條件得到:

(e) 由上述分析, 最後得到

5 用分離變數法解諾伊曼條件的波動方程式 (第 89 頁)

考慮帶有初始條件與邊界條件的波動方程式:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \text{當 } 0 < x < l \\ u_x(0,t) = 0 & u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{3}$$

假設 $u(x,t) = X(t)T(t)$, 仿照之前的討論, 若要求 $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, 只可能在 $\underline{\lambda = -\beta^2 \geq 0}$ 的情況下發生。故分別看 $X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$ 與 $X(x) = C + Dx$ 的情況, 得到

6 用分離變數法解諾伊曼條件的擴散方程式 (第 90 頁)

考慮帶有初始條件與邊界條件的波動方程式:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & \text{當 } 0 < x < l \\ u_x(0,t) = 0 & u_x(l,t) = 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & \end{cases} \tag{4}$$

假設 $u(x,t) = X(t)T(t)$, 仿照之前的討論, 若要求 $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$, 只可能在 $\underline{\lambda = -\beta^2 \geq 0}$ 的情況下發生。故分別看 $X(x) = C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x)$ 與 $X(x) = C + Dx$ 的情況, 得到