偏微分方程(一) 課程學習單　　　　活動 9

學號: ____________　　姓名: ____________　　你的伙伴: ____________

1　單元介紹與學習目標

☐ 從數學、物理以及其它面向了解 擴散核 (diffusion kernel) 的意義。

2　函數 $S(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}$ 的討論 (第 50–52 頁)

前一個活動中, 我們推導出 一維擴散方程式 (one-dimensional diffusion equation)

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty \\ u(x,0)=\phi(x) & \lim\limits_{|x|\to\infty}\phi(x)=0 \end{cases}$$

的解爲

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{其中} \quad S(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}}。 \tag{1}$$

現在想要從 (1) 式探討其數學、物理以及其他方面的意義。

關於 (1) 的表達式, 我們稱 $S(x,t)$ 爲 擴散核 (diffusion kernel)。在數學上, 若使用了 核 (kernel) 這個字, 通常代表著事物的核心, 也就是一件事最重要的部份。

討論 **1.** 想一想擴散核爲什麼會是擴散方程式的核心呢? 其「核心」的意義在哪裡?

關於 (1) 式, 我們把這樣的積分型式稱爲 卷積 (convolution): 給定兩個函數 $f(x)$ 與 $g(x)$, 它們的卷積定義爲 $(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$。而微分方程式的一般解可以表示成卷積的型式, 在微分方程式的一般理論來說相當重要, 而解可以表示成初始值與擴散核的卷積這個現象其實是有跡可尋的。在此用一個最簡單的微分方程式進行類比: 考慮 $y'-ky=f(x)$, 其中 k 爲常數。我們知道處理這個一階線性微分方程式的方法, 是考慮積分因子 $I(x)=$ ____________, 得到

討論 2 (第 50 頁)**.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(A1) 函數 $S(x,t)$ 的定義域爲何?

(A2) 函數 $S(x,t)$ 有什麼對稱性?

解.

討論 3 (第 50 頁)**.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(B1) 已知 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, 試求積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)\,\mathrm{d}x$ 的值。

(B2) 討論擴散核對於 $t \to 0^+$ 的極限, 即 $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} S(x,t)$。

解.

討論 4. 試討論三組中文字「不可積」、「不會積」、「積不出來」的差異。

解.

關於公式 (1), 也就是

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{其中} \quad S(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4kt}},$$

我們有以下幾種看待它的方法:

(a) 因爲對所有 $t>0$, $\int_{-\infty}^{\infty} S(x,t)\,\mathrm{d}x \equiv 1$, 所以我們可以把 $u(x,t)$ 想成是函數 $S(x,t)$ 對於 $\phi(x)$ 的一種 *加權平均* (weighted average)。也就是說, 固定 t 之下, 因爲 $\lim\limits_{|x|\to\infty} S(x,t)=0$, 所以在 $|x|$ 大的地方, 權重非常小, 將這個效應先扣掉之下, 再透過定積分的定義 — 分割、樣本點、取和、求極限 — 的方式, 得到

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y \approx \sum_i S(y_i-x,t)\phi(y_i)\Delta y_i。$$

而在 $t=0$ 時, 權重完全集中於一點。

(b) (物理解釋, 第 51 頁) 由物理的觀點而言, 擴散方程式的解可想成是 *布朗運動* (brownian motion) — 質點在空間中隨機運動。這個觀點, 現階段是以一維的模型討論之, 實際上可推廣至更高維度。爲了簡單起見, 在此以一維的情況探討: 考慮質點在原先爲 x 的位置之下, 在 t 時刻質點位置在 (a,b) 區間內的機率是 $\int_a^b S(x-y,t)\,\mathrm{d}y$。所以將 $\phi(x)$ 想成是一個隨機變數, 則 $u(x,t)$ 可理解爲在 t 時刻下的隨機變數, 這當中是進行布朗運動下的隨機過程。

除了上述的兩種意義之外, 我們在 討論 **4.** 探討了積不出來的概念, 而 e^{-x^2} 或是 $S(x,t)$ 就是一個很經典的積分出來的例子。也就是說, e^{-x^2} 的反導函數存在, 但是無法表示成初等函數的形式。然而, 這個函數及其積分又那麼重要的情形下, 我們轉而去研究 *誤差函數* (error function)

$$\mathrm{Erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-p^2}\,\mathrm{d}p。$$

討論 **5.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(C1) 計算 $\mathrm{Erf}(0)$ 與 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{Erf}(x)$ 的值。

(C2) 將 $Q(x,t)$ 改用 $\mathrm{Erf}(x)$ 表示。

解.

例題 **6** (第 51–52 頁). 試解擴散方程式

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases} \tag{2}$$

解. 直接由擴散方程式的解 — 將初始函數與擴散核卷積 — 得到

$$u(x,t) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

將指數函數重新整理而得

在負無窮遠處, 不斷地提供熱源, 而熱的分佈一直往 x 的正的方向擴散。