偏微分方程(一) 課程學習單 活動 8

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 比較波動方程式與擴散方程式各種性質的異同 (第 54 頁)。

2 波動方程式與擴散方程式的比較

討論 **1.** 關於「速度」一詞在此做一個澄清。先以常微分方程式爲例, 若 $y(t)$ 滿足以下初始值問題:

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

其中 $p(t), q(t), r(t)$ 爲連續函數。這時, 我們可以把微分方程式想成是物理上質點的運動, 例如: 變數 t 想成時間, 而 $t = 0$ 爲初始時刻, $y(0) = y_0$ 表示初始位置, $y'(0) = y_1$ 表示「初始速度」。將此概念類比至偏微分方程式上, 考慮

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x),$$

這時, 變數 t 想成時間, 而 $t = 0$ 爲初始時刻, $u(x, 0) = \phi(x)$ 表示初始位置, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 表示「初始速度」。

在之前的活動曾經介紹了「波的傳播速度」, 這和剛才所言的「初始速度」是不一樣的概念。

(A1) 什麼是 *波的傳播速度*? (詳見活動 3。)

(A2) 擴散方程式中波的傳播速度是多少? 由此說明訊息的變化爲何?

討論 **2.** 在活動 5 的 例題 **1** 中, 我們討論了初始條件具有奇異點的波動方程式。所謂的 奇異點 (singularities), 指的是函數不光滑的地方, 例如: $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 處因爲導數不存在, 故稱 $x = 0$ 爲函數 $f(x) = |x|$ 的奇異點。

(B1) 對於波動方程式:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & \text{若 } |x| < a \\ 0 & \text{若 } |x| \geq a \end{cases}, \qquad u_t(x,0) \equiv 0\text{。}$$

在 $t = 0$ 時的奇異點有哪些? 而當 $t > 0$ 的時候, 奇異點又在哪? 奇異點是如何移動的?

(B2) 在活動 7 的 例題 **5** 中, 我們討論了以下一維擴散方程式的解:

$$\begin{cases} Q_t = kQ_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \\ Q(x,0) = 1 & \text{若 } x > 0 \\ Q(x,0) = 0 & \text{若 } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

在 $t = 0$ 的時候, 奇異點爲何? 而當 $t > 0$ 時, 奇異點爲何?

討論 **3.** 在活動 3 的最後, 曾經介紹了 適定性 (well-posed) 的概念: 一個偏微分方程式若有解的存在、唯一、穩定性的話則稱方程式是適定的。

(C1) 對於波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, 指定 $t = 0$ 的資訊下, 對於 $t > 0$ 是否有適定性嗎?

(C2) 對於擴散方程式 $u_t = k u_{xx}$, 指定 $t = 0$ 的資訊下, 對於 $t > 0$ 是否有適定性嗎?

討論 **4.** 承上一個討論, 我們可以追問波動方程式與擴散方程式, 在指定 $t = 0$ 的資訊下, 對於 $t < 0$ 是否有適定性。基本上, 可以想見對於波動方程式對於 $t < 0$ 也是有適定性的, 因爲波動方程式的解有 __________; 我們也可以從方程式的解 ________________________________ 推論而得。

但是, 對於擴散方程式, 在指定 $t = 0$ 的資訊下, 對於 $t < 0$ 就沒有適定性了。以下將舉例說明之。令 $u_n(x,t) = \frac{1}{n} \sin nx \cdot \mathrm{e}^{-n^2 kt}$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及所有 $x, t \in \mathbb{R}$, $u_n(x,t)$ 滿足 $u_t = k u_{xx}$:

當 $t = 0$ 時, $u_n(x,0) =$ ______________, 得到 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,0) =$ _____ 表示 $u_n(x,0)$ 均勻收斂 (uniformly convergent) 至 0 函數。然而, 當 $t = -1$ 時, 則 $u_n(x,-1) =$ ______________, 當 $x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 處, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,-1) = \infty$, 這就告知: 在 $t = 0$ 的時候, 縱使兩個函數很接近, 但是在 $t = -1$ 的時候, 兩函數的差距是無法控制的。換言之, 對於擴散方程式而言, 前者 (時間發生較早) 可以控制後者 (時間發生較晚), 但是後者無法控制前者。

討論 5. 想一想各自的問題後, 再與你的伙伴意見交流。

(D1) 波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 有最大值原理與最小值原理嗎?

(D2) 擴散方程式 $u_t = k u_{xx}$ 有最大值原理與最小值原理嗎?

討論 6. 關於偏微分方程式的解, 我們也會很常研究解的 *漸近行爲* (asymptotic behavior), 它指的是當 $t \to \infty$ 之下, 函數有什麼現象, 也就是說去研究 $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$ 的結果。更廣義地說, 我們不見得要針對每一個點的函數值去觀察極限, 而會去看每個時刻下的一些物理量的變化。

(E1) 何謂波動方程式的解的能量? (詳見活動 5 的討論) 這個能量隨 t 變化之下的關係爲何?

(E2) 何謂擴散方程式的解的能量? 這個能量隨 t 變化之下的關係爲何?