偏微分方程(一) 課程學習單　　活動 7

學號: ______________　　姓名: ______________　　你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 得到擴散方程解的一般公式。

☐ 常態分佈函數的認識。

2 預備知識

例題 1. 試求瑕積分 $\mathtt{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的值。(利用比較判別法可證瑕積分收斂。)

解. 考慮瑕積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}A$。首先以形式上的操作改寫成 **二次積分** (iterated integral)。

另一方面, 利用極坐標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 將重積分的值算出來: 因爲

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| =$$

例題 **2.** 微積分基本定理: 若 $f(x)$ 爲連續函數, 定義 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 則 $F'(x)=$ ____。

(A1) 若 $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, 則 $F'(x)=$ ______________________。

(A2) 若 $F(x)=\int_0^{\cos x}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, 則 $F'(x)=$ ______________________。

例題 **3.** 若 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=A$, 欲求 $\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} f(2x)\,\mathrm{d}x$ 的值。各自完成題目後, 再交換意見。

(B1) 利用變數變換法, 令 $u=2x$, 求出積分值。

(B2) 用幾何圖形的與積分的意義, 搭配平移伸縮理論, 判斷出積分值。

3 擴散方程式的性質

本單元將討論以下 一維擴散方程式 (one-dimensional diffusion equation) 的解:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{1}$$

討論 **4** (第 47 頁)**.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(C1) 若 $u(x,t)$ 滿足 (1) 式, 那麼 $u(x-x_0,t)$ 也會滿足 (1) 式嗎? $u(x-x_0,t)$ 的幾何意義是什麼?

(C2) 若 $u(x,t)$ 滿足 (1) 式, 而 c 是實數, 那麼 $cu(x,t)$ 也會滿足 (1) 式嗎?

(C3) 若 $u_1(x,t)$ 與 $u_2(x,t)$ 滿足 (1) 式, 那麼 $u_1(x,t)+u_2(x,t)$ 也會滿足 (1) 式嗎?

討論 **5** (第 47 頁)**.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(D1) 若 $S(x,t)$ 滿足 (1) 式, 而 $g(y)$ 是任意函數, 考慮

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)g(y)\,\mathrm{d}y$$

那麼 $u(x,t)$ 也會滿足 (1) 式嗎? (此時假設瑕積分收斂。)

(D2) 若 $S(x,t)$ 滿足 (1), 考慮 $u(a^\lambda x, at)$, 其中 a 爲正數, λ 爲常數。若 $u(a^\lambda x, at)$ 也滿足 (1) 式, 則 λ 的值爲何?

例題 **6** (第 47 頁)**.** 試解以下 一維擴散方程式 (one-dimensional diffusion equation):

$$\begin{cases} Q_t = kQ_{xx} & -\infty < x < \infty, 0 < t < \infty \\ Q(x,0) = 1 & 若\ x > 0 \\ Q(x,0) = 0 & 若\ x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

解. 首先, 由 (D2) 的討論, 考慮 $Q(z) = Q(\frac{x}{\sqrt{t}})$, 試解 $Q(z)$。

定義 $S(x,t) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} =$ ________________________________, 給定函數 $\phi(x)$ 滿足 $\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 0$ 與 $\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = 0$, 以下將檢查

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y, \qquad t > 0$$

滿足初始條件 $u(x,0) = \phi(x)$: 因為

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial y}(x-y,t)\phi(y)\,\mathrm{d}y$$

$=$ ______________________________________。

因此 $u(x,0) =$ ______________________________________,

而 $u(x,t) =$ ______________________________________。