偏微分方程(一) 課程學習單 活動 6

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 討論擴散方程式的性質: 最大值原理、解的唯一性、穩定性。

2 預備知識

討論 **1.** 給定在 $[a, b]$ 區間上的光滑函數 $f(x)$。與伙伴討論以下問題, 並將結果記錄下來。

(A1) 若 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 達到 最大值 (absolute maximum), 則 $f'(x_0)$ 與 $f''(x_0)$ 會有什麼性質? 試以圖解法說明各階導數之意義。若 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a, b)$ 達到 最小值 (absolute minimum) 的時候又是如何?

(A2) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 達到最大值, 則 $f'_+(a)$ 與 $f''_+(a)$ 會有什麼性質? 以圖解法解釋可能的情況。若 $f(x)$ 在 $x = b$ 達到最大值, 則 $f'_-(b)$ 與 $f''_-(b)$ 又會對應到什麼結果?

討論 **2.** 與伙伴討論以下問題, 並將結果記錄下來。

(B1) 一個非空集合 (X, d) 的 d 必須滿足什麼性質才會將 (X, d) 稱爲 度量空間 (metric space)?

(B2) 何謂度量空間上連續函數的最大最小值定理?

(B3) 如何用 分析 (analysis) 的方法證明兩實數 x 和 y 相等?

3 擴散方程式的性質

本節將討論 一維擴散方程式 (one-dimensional diffusion equation)

$$u_t = k u_{xx}$$

的性質, 例如最大值原理、初始與邊界條件下解的存在唯一性定理、穩定性。下一單元再討論求解。

最大值原理 **(Maximum Principle)** (第 42 頁)**.** 若 $u(x,t)$ 在矩形區域 $R=[0,l]\times[0,T]$ 中滿足擴散方程式 $u_t = k u_{xx}$, 則函數 $u(x,t)$ 在區域 R 中的最大值必發生於 $t=0$ 或 $x=0$ 或 $x=l$ 處。

討論 **3.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(C1) 請在 xt 平面上標註區域 R, 並用粗線強調最大值原理敘述中最大值可能發生的地方。

(C2) 擴散方程式的解有 最小值原理 (Minimum Principle) 嗎? (提示: 考慮 $-u(x,t)$。)

證明: 令 M 是函數 $u(x,t)$ 在 $t=0, x=0$ 與 $x=l$ 處的最大值。目標: 在區域 R 上, $u(x,t)\le M$。考慮輔助函數 $v(x,t)=u(x,t)+\varepsilon x^2$, 其中 ε 是一個正數, 直接計算得知

$$v_t - k v_{xx} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\text{。} \tag{1}$$

(a) 若函數 $v(x,t)$ 在區域 R 的 內部 (interior) 一點 $(x_0,t_0)\in(0,l)\times(0,T)$ 達到最大值, 則 $\underline{v_t(x_0,t_0)\qquad\quad}$ 且 $\underline{v_{xx}(x_0,t_0)\qquad\quad}$, 導致 (1) 式矛盾。

(b) 若函數 $v(x,t)$ 在 $(x_0,t_0)\in(0,l)\times\{T\}$ 上邊 (top edge) 達到最大值, 則 $\underline{v_t(x_0,t_0)\qquad\quad}$ 且 $\underline{v_{xx}(x_0,t_0)\qquad\quad}$, 導致 (1) 式矛盾 (注意 $v_t(x_0,t_0)$ 只考慮單邊極限)。

(c) 由 (a) 與 (b) 得知: $v(x,t)$ 產生最大值處只可能發生於 底邊 (bottom) ______________ 或 側邊 (lateral sides) ______________。因此 ______________, 最後令 $\varepsilon\to 0$ 得到 ______________。

4 擴散方程式狄立克萊問題解的唯一性 (第 44 頁)

我們可用擴散方程式的極大值原理證明邊界值問題的唯一性。考慮以下 擴散方程式的狄立克萊問題 (Dirichlet problem for the diffusion equation):

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = f(x,t) & \text{當 } 0 < x < l \text{ 且 } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = g(t) \\ u(l,t) = h(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $f(x,t), \phi(x), g(t), h(t)$ 都是給定的函數。方程式 (2) 解的 唯一性 (uniqueness) 意味著解可以完全由這四個函數決定; 也就是說, 如果有兩個雙變數函數 $u_1(x,t)$ 與 $u_2(x,t)$ 皆滿足 (2) 式的所有條件, 則對所有 $t \geq 0$ 都有 $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$。

證明: 考慮 $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, 則 $w_t = kw_{xx}$ 且 $w(x,0) = 0, w(0,t) = 0, w(l,t) = 0$。

(a) 由最大值原理得知: ______________________________。

(b) 由最小值原理得知: ______________________________。

(c) 綜合 (a) 與 (b) 的結果得知: ______________________________。

另一個證明擴散方程式狄立克萊問題解的唯一性的方法稱爲 能量法 (energy method):

證明: 考慮 $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, 則 $w_t - kw_{xx} = 0$ 且 $w(x,0) = 0, w(0,t) = 0, w(l,t) = 0$。首先將方程式兩邊乘上 w 並整理之後得到

____。

再將方程式兩邊對 x 積分, 其中積分範圍爲 $[0, l]$, 得到

____。

所以對於 $\int_0^l w^2(x,t)\,\mathrm{d}x$ 而言, 它是只與 __ 有關的函數, 而且它是一個 ______ 函數。因此

____,

所以 _________________________。

5 穩定性 (第 45 頁)

考慮以下擴散方程式的狄立克萊問題:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0 \quad \text{當 } 0 < x < l \text{ 且 } t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

假設 $u_1(x,0) = \phi_1(x), u_2(x,0) = \phi_2(x)$, 則 $w = u_1 - u_2$ 滿足初值條件爲 $\phi_1 - \phi_2$ 的擴散方程式。由前面的討論得知

$$\int_0^l (u_1(x,t) - u_2(x,t))^2 \,\mathrm{d}x \le \int_0^l (\phi_1(x) - \phi_2(x))^2 \,\mathrm{d}x$$

上式的概念在於右邊代表 ________________________, 而左邊代表 ________________________。所以只要一開始 $t = 0$ 的時候初始函數夠靠近, 那麼解在 $t > 0$ 的每一個時刻也都會很靠近。

而上面描述兩個解在時刻 t 的靠近程度, 是用平方積分的意義下討論。我們也可以用不用的度量去分析兩函數的差別。比方說, 我們可以利用最大值原理去了解兩函數相差的絕對值之差異。在矩形區域 $R = [0,l] \times [0,T]$ 之下, 在側邊滿足 $w \equiv u_1 - u_2 = 0$, 而在底邊滿足 $w = \phi_1 - \phi_2$, 由最大值原理得知

____。

由最小值原理得知

____。

將兩者結果合併可得

____。