偏微分方程(一) 課程學習單 活動 5

學號: ________________ 姓名: ________________ 你的伙伴: ________________

1 單元介紹與學習目標

☐ 用幾何圖形的方式了解波動方程式解的現象。

☐ 了解波動方程式的因果關係與能量解釋。

2 預備知識

討論 **1.** 給定函數 $y = f(x)$, 討論函數 $af(bx+c)+d$ 與 $f(x)$ 之間的關係與參數 a, b, c, d 之意義。

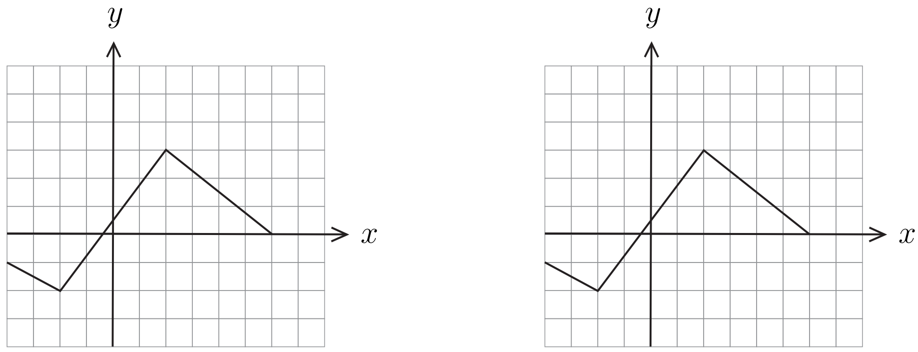


圖 1: 原圖 $f(x)$; (A1) 左圖 $f(x)+3$; (A2) 右圖 $2f(x)$。

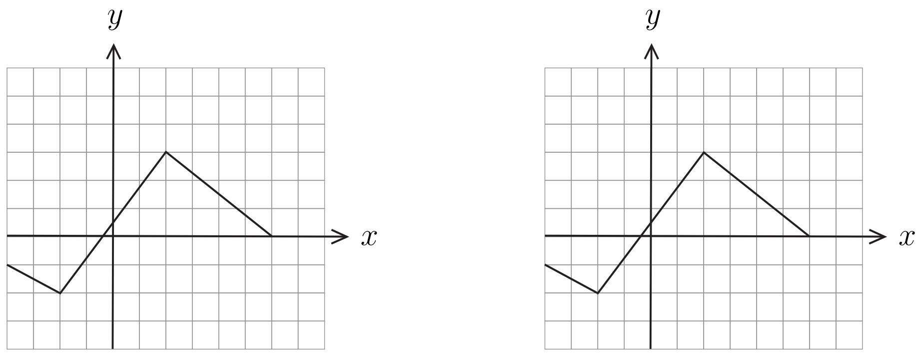


圖 2: 原圖 $f(x)$; (B1) 左圖 $f(x-2)$; (B2) 右圖 $f(2x)$。

(A2) 參數 a 在圖形上的效應是: ________________________________。

(B2) 參數 b 在圖形上的效應是: ________________________________。

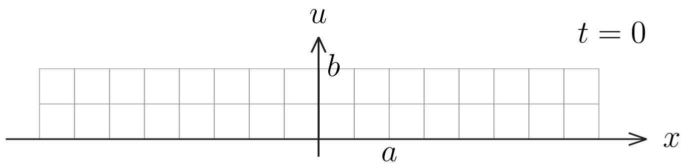
(B1) 參數 c 在圖形上的效應是: ________________________________。

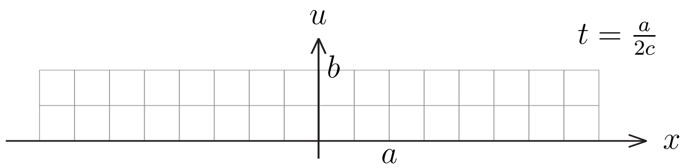
(A1) 參數 d 在圖形上的效應是: ________________________________。

例題 **1** (第 36 頁)**.** 討論以下波動方程式解的現象:

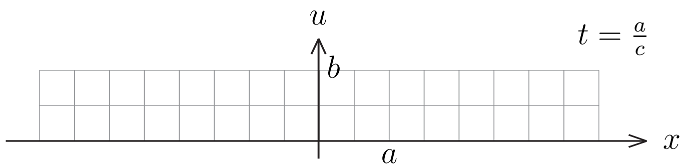
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & \text{若 } |x| < a \\ 0 & \text{若 } |x| \geq a \end{cases}, \qquad u_t(x,0) \equiv 0。$$

解. 由之前的討論得知, 偏微分方程式的解爲 $u(x,t) =$ ________________________________。
利用圖形平移伸縮的概念, 畫出 t 在不同時刻下波動方程式解的圖形:

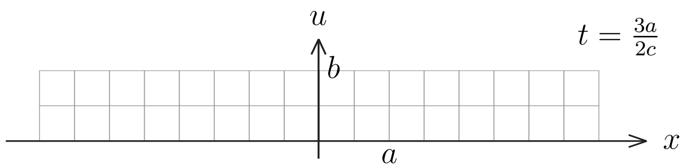




(C1)



(C2)



解. 現以 $t = \frac{a}{2c}$ 爲例, 用代數運算的方式求得偏微分方程式的解。首先, $x \pm ct =$ __________。

- 只要 $|x + \frac{a}{2}| \geq a$ 且 $|x - \frac{a}{2}| \geq a$, 則 $u(x,t) \equiv 0$。而這個條件可以進一步討論得到:

(D1) 若 $-\frac{3a}{2} < x < -\frac{a}{2}$, 則 $u(x,t) =$ ________________________________。

- 若 $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$, 則

  $u(x,t) =$

(D2) 若 $\frac{a}{2} < x < \frac{3a}{2}$, 則 $u(x,t) =$ ________________________________。

3 波動方程式的因果關係 (第 39 頁)

前面已經得到波動方程式初始值問題

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x),$$

的解爲

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s,$$

現在要繼續探討波動方程式解的性質。

- 因爲 $\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x)$ 理解成在 $t = 0$ 時兩個大小爲 $\frac{1}{2}\phi(x)$ 的波之疊加, 所以第一項 $\frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct))$ 可以理解成這兩個 $\frac{1}{2}\phi(x)$ 的波分別以傳播速度爲 c 的方式一個向左、一個向右傳播出去後再疊加。
- 而第二項觀察的重點是: 給定一點 $(x_0, 0)$, 研究 $\psi(x_0)$ 的 影響區域 (domain of influence)。

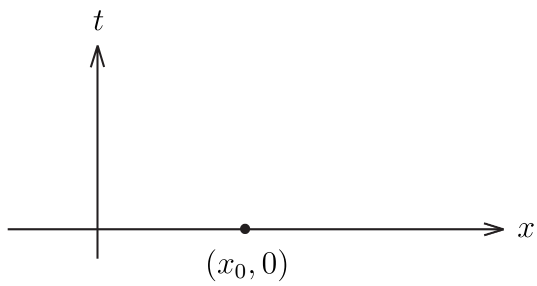


圖 3: 波動方程式的解對於 $(x_0, 0)$ 的影響區域。

如圖 3 所示, 先畫出 $t \geq 0$ 的平面, 標示 $(x_0, 0)$ 後, 將 $\psi(x_0)$ 這個值可以影響的區域畫出來。另一方面, 我們可以反過來問: 給定一點 (x_0, t_0), 有哪些點會影響到 $u(x_0, t_0)$ 的值, 這個區域稱爲 依賴區域 (domain of dependence)。

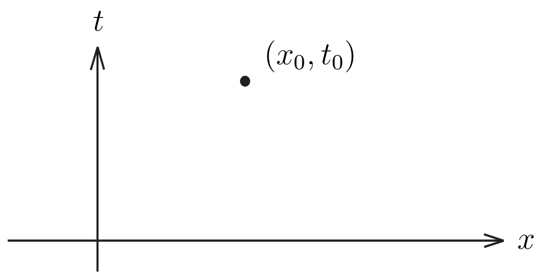


圖 4: 波動方程式的解對於 (x_0, t_0) 的依賴區域。

波動方程式的初始條件對於一點的影響總是有限, 而上述討論的影響區域或是依賴區域的現象稱爲 因果關係 (causality), 是波動方程式獨特的性質。

4 波動方程式的能量守恆關係 (第 40 頁)

想像一條無限長 $-\infty < x < \infty$ 的弦, 其密度爲 ρ, 張力爲 T, 則弦的振動滿足波動方程式

$$\rho u_{tt} = T u_{xx}。$$

現在要從物理的觀點探討其 能量守恆定律 (conservation of energy)。

- 一個質點的 動能 (kinetic energy) 爲 $\frac{1}{2}mv^2$, 其中 m 爲質量, v 爲速度, 所以對整條弦而言, 其能量爲

  $$\mathrm{KE}(t) = \underline{\hspace{4cm}} \Rightarrow \frac{\mathrm{dKE}}{\mathrm{d}t} = \underline{\hspace{7cm}},$$

  將波動方程式代入後, 並利用 分佈積分 (integration by parts) 後得到

  $$\underline{\hspace{15cm}},$$

  最後一個等式用了假設 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} T u_t u_x = 0$ 以及 $u_{tx}u_x = \left(\frac{1}{2}u_x^2\right)_t$。

- 令弦的 位能 (potential energy) 爲 $\mathrm{PE} = \underline{\hspace{3cm}}$, 並記弦的 總能 (total energy) 爲 $\mathrm{E} = \mathrm{KE} + \mathrm{PE}$, 則 $\frac{\mathrm{dKE}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{dPE}}{\mathrm{d}t}$, 所以 $\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{d}t} = 0$, 於是

  $$E = \underline{\hspace{5cm}},$$

  得知總能 E 與 t 無關, 它是一個常數, 這個現象稱爲 能量守恆定律 (conservation of energy)。

討論 **2.** 計算以下波動方程式解的總能:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} b - \frac{b|x|}{a} & 若\ |x| < a \\ 0 & 若\ |x| \geq a \end{cases}, \qquad u_t(x,0) \equiv 0。$$

解.