偏微分方程(一) 課程學習單 活動 4

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 討論波動方程式如何求解。

2 預備知識

例題 **1.** 試解二階常微分方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$。

解. 由微分算子的觀點, 先將方程式改寫成 $y'' - 3y' + 2y =$ ______________________ $= 0$。令 $Y(x) =$ __________, 則 $Y(x)$ 滿足 ______________________。

因爲指數函數 $y(x) = Ce^{kx}$ 滿足微分方程式 $y' = ky$, 所以 $Y(x) =$ __________。再考慮微分方程式 ________________________________, 將方程式兩邊乘上 積分因子 (integrating factor) $I(x) =$ ________________ 之後得到

____。

例題 **2.** 複習「微分算子在坐標變換之下的轉換式」。

解. 若有坐標變換 $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, 則 $(\xi, \eta) = (\xi(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \eta(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)))$, 得到

$$\begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

所以 ____。

另一方面, 若有函數 $u(x, y)$, 考慮 $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$, 則 $u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$, 所以

例題 **3.** 試將 拉普拉斯方程 (Laplace equation) $\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$ 改用極坐標的變數 r, θ 表達。

解. 因爲直角坐標與極坐標之間的關係爲: $\underline{x = r\cos\theta, y = r\sin\theta}$, 由 鏈鎖律 (chain rule) 得知:

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x \\
u_y &= \\
u_{xx} &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta}\theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta}\theta_x)\theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\
u_{yy} &= \\
\Delta u &=
\end{aligned}
$$

現在希望將 $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y, r_{xx}, r_{yy}, \theta_{xx}, \theta_{yy}$ 全部改寫成和 r, θ 有關的量。因爲

$$
\begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

所以

$$
\begin{bmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad & \qquad\qquad \\ & \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{8cm}}。
$$

另一方面, 因爲

$$
\begin{aligned}
r_{xx} &= (r_x)_x = (\cos\theta)_x = -\sin\theta \cdot \theta_x = \frac{\sin^2\theta}{r} \\
r_{yy} &= (r_y)_y = (\sin\theta)_y = \underline{\hspace{6cm}} \\
\theta_{xx} &= (\theta_x)_x = \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)_x = -\frac{r\cos\theta \cdot \theta_x - \sin\theta \cdot r_x}{r^2} = \frac{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta}{r^2} \\
\theta_{yy} &= (\theta_y)_y = \left(\frac{\cos\theta}{r}\right)_y = \underline{\hspace{9cm}},
\end{aligned}
$$

所以

$$
\Delta u = \underline{\hspace{8cm}}。
$$

討論 **4.** 通常在計算這類問題的時候, 應該時時刻刻注意其 結構性 (structure)。所謂的結構性, 泛指對稱性 (symmetry)、對偶性 (duality)、對消性 (cancellation) 等等。若在進行計算時意識到結構性, 則可以預測計算的結果, 降低出錯率。找出上面的計算過程中, 哪些地方具有結構性。

3 波動方程式 (第 33 頁)

本單元將考慮 波動方程式 (wave equation):

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{1}$$

其中 $u = u(t,x), -\infty < x < \infty$, 而 c 爲非零實數。

例題 **5** (第 34 頁)**.** 利用微分算子、特徵線法與線性代數的理論得到波動方程式 (1) 的解。

解**.** 利用因式分解, 將方程式改寫成微分算子的形式: $u_{tt} - c^2 u_{xx} =$ ________________ $= 0$。令 $v =$ ____________, 則 v 滿足 ______________, 得到 $v =$ ____________。

再考慮偏微分方程式 $u_t + cu_x = h(x+ct)$, 它是一個 ______________________________, 所以由線性代數的理論得知, 方程式的解空間是齊次解與特解的組合。

- 考慮齊次方程式 $u_t + cu_x = 0$, 由特徵線法得知方程式的解爲: ________________。
- 考慮非齊次方程式 $u_t + cu_x = h(x+ct)$, 希望找到方程式的特解。因爲 $h(x+ct)$ 的意思是函數限制在直線 $x + ct = C$ 上取值一樣, 所以假設特解也是型如 $u(x,t) = f(x+ct)$ 的形式。令 $z = x + ct$, 則特解寫成 $u(x,t) = f(z) = f(x+ct)$, 因爲

  $$u_t + cu_x = \underline{\hspace{4cm}} \Rightarrow \underline{\hspace{4cm}}$$

- 綜合上述討論, 波動方程式 (1) 的解爲 ________________________。

例題 **6** (第 34 頁)**.** 利用坐標變換法求波動方程式 (1) 的解。

解**.** 考慮坐標變換 $\xi = x + ct, \eta = x - ct$, 則 $\partial_x =$ __________ 與 $\partial_t =$ __________, 得到

$$\partial_t - c\partial_x = \underline{\hspace{3cm}} \text{ 與 } \partial_t + c\partial_x = \underline{\hspace{3cm}},$$

於是 (1) 式可以改寫爲 $(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u =$ __________________________, 因爲 $c \neq 0$, 所以 $u_{\xi\eta} = 0$ 得到 $u =$ ____________________。

討論 **7.** 在 xt 平面上畫出波動方程式 $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 的兩組 特徵線 (characteristic lines)。

4 波動方程式的初始值問題 (第 35 頁)

現在要討論 波動方程式 (wave equation) 的 初始值問題 (initial value problem):

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \phi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\phi(x)$ 與 $\psi(x)$ 爲給定的任意兩函數。

由前一節得知, 波動方程式的一般解爲 $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$。

- 初始條件 $u(x,0) = \phi(x)$ 告知: ____。
- 初始條件 $u_t(x,0) = \psi(x)$ 告知: ____。

將兩式聯立可得

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases} \qquad\qquad \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

各別積分後得到

$$\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

而積分常數之間的關係爲: ____________________。因此初始值問題 (2) 的解爲:

____。

討論 **8.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(A1) 若 $\phi(x) \equiv \sin x, \psi(x) = \cos x$, 則初始值問題 (2) 的解爲 ________________________。

(A2) 若 $\psi(x) = -c\phi'(x)$, 則初始值問題 (2) 的解爲 ________________________。