偏微分方程(一) 課程學習單 活動 3

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 學習如何用物理的現象建構出偏微分方程式的模型。

☐ 了解在數學上想研究偏微分方程式的幾個面向。

2 簡單傳輸方程式模型 (simple transport equation, 第 10 頁)

有一個水管, 每個 *橫截面* (cross section) 都相同, 將它水平放置, 考慮流速爲 c 的流體流過水管, 不妨假定流向爲 x 軸的正向。流體中有一個污染物, 用 $u(x,t)$ 代表污染物在 t 時刻 x 處的濃度, 單位是 (公克/公分)。假設這個污染物是非常濃稠的, 以致污染物的 *擴散現象* (diffusion) 忽略不計, 而污染物是受到水流而整體移動, 則污染物的濃度對時間的變化與位置之間滿足以下偏微分方程式:

$$u_t + cu_x = 0。$$

討論 1. 污染物在時刻 t 下在區間 $[0,b]$ 當中的總質量可以用積分式表達: $M =$ ______________, 而在 $t+h$ 的時刻, 所有污染物都向右移動了 ch 公分, 因此污染物的總質量又可表示爲

$M =$ ________________________________。

若將上式兩邊對於變數 b 微分, 由微積分基本定理得知, ______________________, 兩邊再對變數 h 微分, 並且代入 $h=0$ 之後變得到 ____________________。

討論 2. 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(A1) 偏微分方程式的一般解爲: __________________, 回想函數的平移縮放的概念, 方程式的解代表的意義爲何? ____。

(A2) 假設污染物在 $t=0$ 的時候濃度的分佈如圖 1 所示, 畫出在 $t=1$ 與 $t=2$ 時濃度的分佈。特別強調不同時刻下污染物之間的間距。

圖 1: 污染物在不同時刻下的濃度分佈。

(A3) 這個偏微分方程式的解有符合污染物隨時間傳輸的現象嗎?

3 弦振動模型 (vibrating string, 第 11 頁)

考慮一個具有彈性、可塑性、長度爲 l、均勻密度爲 ρ 的弦, 例如吉他上的弦。如圖 2 所示, 在 $t=0$ 時, 弦是水平的狀態, 以 x 軸中的 $[0,l]$ 代表弦, 而在 t 時刻弦用 $u(x,t)$ 代表其 位移 (displacement)。

假設弦始終都是在這個平面上振動, 而且理想上每個點都是上下振動。因爲弦具有良好的可塑性, 所以弦在每個地方的張力與弦相切, 用粗體 $\mathbf{T}(x,t)$ 表示張力 (向量), 而細體 T 表示其大小 (數值)。

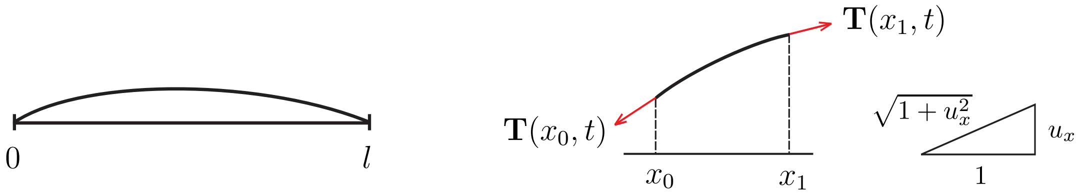

圖 2: 弦振動模型。

現考慮在 $x=x_0$ 與 $x=x_1$ 之間的力學。由牛頓第二運動定律 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 得知水平分力與鉛直分力各別達到平衡狀態, 所以

現假設弦振動相對於弦長而言非常小, 也就是說 $|u_x|$ 很小以致於 $\sqrt{1+u_x^2}\approx 1$, 這麼一來, 可假設 T 爲常數, 與 t 和 x 無關, 而方程式改寫爲

此方程式稱爲 *波動方程式* (wave equation), c 稱爲 *波的傳播速度* (wave speed)。上述討論, 用到每個點都是上下振動以及弦振動相對於弦長而言非常小這件事, 所以得到一個理想的偏微分方程式。我們會先從這個偏微分方程式進行分析, 再探討非線性項造成的效果。

討論 **3.** 與伙伴討論以下問題, 並記錄下來。

(B1) 如果把 *空氣阻力* (air resistance) 納入考慮時, 而阻力與振動方向相反, 與振動速度成正比, 正比的常數用 r 表示時, 波動方程式該如何修改?

(B2) 如果把弦的 *彈性力* (elastic force) 納入考慮時, 而彈性力與振動方向相反, 與振動位移成正比, 正比的常數用 k 表示時, 波動方程式該如何修改?

4　擴散方程模型 (diffusion equation, 第 14–15 頁)

一條直形管子內充滿著靜止不動的液體, 接著滴上一滴染劑。現在要觀察染劑的 *擴散現象* (diffusion)。由 *菲克定律* (Fick's law) 得知: 染劑會從高濃度的地方擴散至低濃度的地方, 而擴散速度與濃度的梯度呈正比。

x_0　　　　　　　　x_1

圖 3: 擴散方程的模型。

若用 $u(x,t)$ 表示時刻 t 在位置 x 處的染劑濃度。如圖 3, 管子從 x_0 到 x_1, 染劑的質量爲

$$M(t) = \underline{\hspace{6cm}} \Rightarrow M'(t) = \underline{\hspace{6cm}}。$$

另一方面, 在時刻 t、介於 x_0 與 x_1 間染劑質量的變化率可由在 x_0 與 x_1 的截面觀察其淨值; 換言之,

$$M'(t) = 在\ x_0\ 處流進之質量變化 - 在\ x_1\ 處流出之質量變化 = \underline{\hspace{7cm}},$$

其中 k 爲比例常數。因此, ______________________, 將等式兩邊對於 x_1 微分, 得到

$$\underline{\hspace{8cm}},$$

這個偏微分方程式稱爲 *擴散方程* (diffusion equation)。

討論 **4.** 與伙伴討論以下問題, 並記錄下來。

(C1) 生活中還有什麼例子可以用擴散方程式模擬?

(C2) 比較擴散方程式與遷移方程式的差別。

5　偏微分方程式的研究

指定條件 (第 20 頁)

一個偏微分方程式的解可能會很多, 例如由之前的討論知道偏微分方程式的解可能會帶有一些任意函數。而我們會興趣的是: 要如何加上一些條件之下, 方程式的解可以明確決定?

在偏微分方程式的理論中, 常見的條件有以下幾種:

(I) *初始值條件* (initial condition): 對於多變數函數 $u(\mathbf{x}, t)$, 可以指定在 $t = t_0$ 時刻的函數, 例如 $u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x})$。有的時候會需要給到兩個初始條件像是 $u(\mathbf{x}, t_0) = \phi(\mathbf{x})$ 與 $u_t(\mathbf{x}, t_0) = \psi(\mathbf{x})$。

(B) *邊界值條件* (boundary condition): 對於函數的 *定義域* (domain) D, 在它的 *邊界* (boundary) ∂D 上給予一些資訊。常見的有以下幾種條件:

- (D) *狄立克萊條件* (Dirichlet condition): 在 $\mathbf{x} \in \partial D$ 上滿足 $u(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t)$。
- (N) *諾伊曼條件* (Neumann condition): 在 $\mathbf{x} \in \partial D$ 上指定 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \phi(\mathbf{x}, t)$ 的值。
- (R) *羅賓條件* (Robin condition): 在 $\mathbf{x} \in \partial D$ 上指定 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + au = \phi(\mathbf{x}, t)$ 的資訊。

適定性問題 (第 25 頁)

哈達瑪 (Hadamard) 在 1923 年針對偏微分方程式提出 *適定性問題* (well-posed problem), 如果以下三條件同時成立, 則問題稱爲 *適定的* (well-posed), 否則稱爲 *不適定的* (ill-posed):

(E) *存在性* (Existence): 是否有一個函數滿足偏微分方程式與所有指定條件。

(U) *唯一性* (Uniqueness): 若有二個函數滿足偏微分方程式與所有指定條件, 則它們相同。

(S) *穩定性* (Stability): 偏微分方程式的解與初始條件或是邊界條件的依賴關係, 如果初始條件變動一點, 則解的變化是否也只改變一點。

討論 **5.** 考慮偏微分方程式 $u_x + yu_y = 0, u(x, 0) = \phi(x)$。

(D1) 若 $\phi(x) = x$, 分析偏微分方程式的解。

(D2) 若 $\phi(x) \equiv 1$, 分析偏微分方程式的解。