偏微分方程(一) 課程學習單 活動 2

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 複習雙變數函數的梯度向量及幾何意義。

☐ 從幾何的觀點解一階線性偏微分方程式。

☐ 從坐標變換的觀點解一階線性偏微分方程式。

2 預備知識 — 梯度向量的意義

給定一個在 $\mathbb{R}^2$ 上的雙變數函數 $u(x,y)$, 則可定義函數 $u(x,y)$ 的 **偏導數** (partial derivatives):

- $u_x(x_0,y_0)$ 的定義是: 固定 $y=y_0$, 則 $f(x)=u(x,y_0)$ 是單變數函數, 而 $u_x(x_0,y_0) \overset{\text{定義}}{=} f'(x_0)$。
- $u_y(x_0,y_0)$ 的定義是: 固定 $x=x_0$, 則 $g(y)=u(x_0,y)$ 是單變數函數, 而 $u_y(x_0,y_0) \overset{\text{定義}}{=} g'(y_0)$。

若函數 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏導數用數對 $(u_x(x_0,y_0),u_y(x_0,y_0))$ 寫下, 我們把它稱爲函數 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 處的 **梯度向量** (gradient vector)。不同點得到的梯度向量不見得一樣, 而整體來說, 會使用記號 $\nabla u(x,y)=\operatorname{grad} u(x,y)=(u_x,u_y)|_{(x,y)}$ 表示函數 $u(x,y)$ 的梯度向量場。

從函數 $u(x,y)$ 的梯度向量場 $\nabla u=(u_x,u_y)$ 就可以掌握函數的變化。最基本的兩個面向是:

- 函數 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 處沿著方向 $\mathbf{h}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 的 **方向導數** (directional derivative):

  考慮 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(x(t),y(t))=(x_0+\cos\theta\cdot t, y_0+\sin\theta\cdot t)$, 則 $\boldsymbol{\alpha}(0)=(x_0,y_0)$ 且 $\boldsymbol{\alpha}'(0)=(\cos\theta,\sin\theta)=\mathbf{h}$, 所以

  $$D_{\mathbf{h}}u(x_0,y_0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(x(t),y(t))\bigg|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=\underline{\hspace{6cm}},$$

  因此函數 $u(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 處沿著 $\mathbf{h}$ 方向的變化率是 ______________________。

  注意到在討論函數的方向導數時, 指定了方向之後, 向量必須選取爲單位長, 這樣一來算出的值才會完全反應函數的變化率, 而不帶有向量的大小而造成的效應。

- 給定 $C\in\mathbb{R}$, 集合 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|u(x,y)=C\}$ 稱爲函數 $u(x,y)$ 的 **等高線** (level curves) , 若用 $\boldsymbol{\alpha}(t)=(x(t),y(t)), -\varepsilon<t<\varepsilon$ 描述等高線, 則 $u(x(t),y(t))\equiv C$, 兩邊對 t 微分後得到

  ____,

  所以梯度向量的幾何意義是: ____________________________。注意這裡討論的等高線都是看在定義域 $\mathbb{R}^2$ 上的曲線。

3 一階線性偏微分方程式

例題 1 (第 6 頁). 試解偏微分方程式 $au_x + bu_y = 0$, 其中 a, b 為非零常數。

解 (幾何解法). 首先將方程式理解為 $v \cdot \nabla u = (a, b) \cdot (u_x, u_y) = 0$, 其中 $v = (a, b)$ 為常向量 (與 x 和 y 無關), 而 $\nabla u = (u_x, u_y)$ 代表雙變數函數 $u(x, y)$ 的梯度向量。所以 $v \cdot \nabla u = 0$ 告知梯度向量 ∇u 與向量 v ______________。

另一方面, 假設 $C(x, y)$ 是函數 $u(x, y)$ 的等高線, 局部來說, 等高線可以表示成函數 $y(x)$ 的圖形; 換言之, 等高線 $C(x, y(x))$ 滿足 $u(x, y(x)) = C$。由等高線與函數的梯度互相垂直的概念得知:

____。

由 $y' = \frac{b}{a}$ 可解得 ______________ , 其幾何意義是 ____________________________ , 所以偏微分方程式的解為

____。

註. 上述的直線 C 稱為 特徵線 (characteristic line)。

討論 2. 考慮偏微分方程式 $4u_x - 3u_y = 0, u(0, y) = y^3$。

(A1) 寫出偏微分方程式的解。

(A2) 在平面上示意幾條特徵線, 在 y-軸上標示整數點對應的函數值。然後搭配 (A1) 的結果, 在網格點上畫出函數 $u(x, y)$ 的梯度向量 (注意方向要標示正確, 大小盡可能強調出來)。

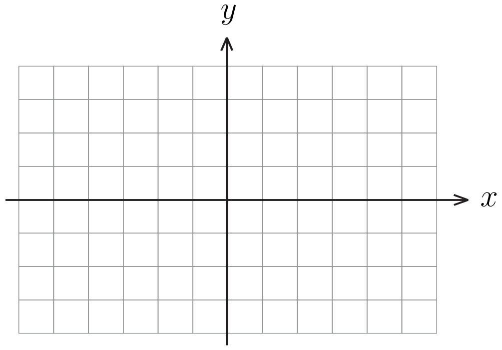

圖 1: 偏微分方程式 $4u_x - 3u_y = 0, u(0, y) = y^3$ 的解。

例題 **3** (第 6 頁)**.** 試解偏微分方程式 $u_x + yu_y = 0$。

解 (幾何解法)**.** 首先將方程式理解爲 $v\cdot\nabla u = (1, y)\cdot(u_x, u_y) = 0$, 其中 $v = (1, y)$, 而 $\nabla u = (u_x, u_y)$ 代表雙變數函數 $u(x, y)$ 的梯度向量。所以 $v\cdot\nabla u = 0$ 告知梯度向量 ∇u 與向量 v ________________。

另一方面, 假設 $C(x, y)$ 是函數 $u(x, y)$ 的等高線, 局部來說, 等高線可以表示成函數 $y(x)$ 的圖形; 換言之, 等高線 $C(x, y(x))$ 滿足 $u(x, y(x)) = C$。由等高線與函數的梯度互相垂直的概念得知:

____。

由 $y' = y$ 可解得 ________________ , 其幾何意義是 ________________________________ , 所以偏微分方程式的解爲

____。

註*.* 上述的曲線 C 稱爲 特徵曲線 (characteristic curve)。

討論 **4.** 考慮偏微分方程式 $u_x + yu_y = 0, u(0, y) = y^3$。

(B1) 在 xy 平面上示意幾條特徵曲線, 並標註這些特徵曲線對應的函數值。

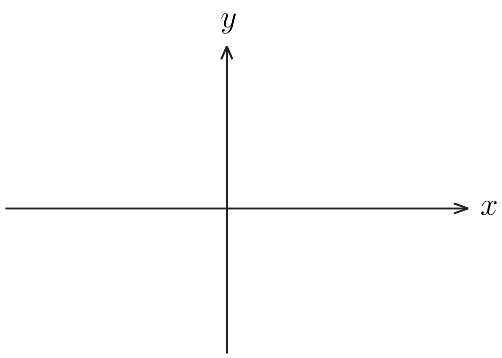

圖 2: 偏微分方程式 $u_x + yu_y = 0, u(0, y) = y^3$ 的解。

(B2) 寫出偏微分方程式的解。完成後與伙伴討論這個解與圖 2 是否一致。

例題 **5** (第 7 頁)**.** 試解偏微分方程式 $au_x + bu_y = 0$, 其中 a, b 爲非零常數。

解 (坐標變換法)**.** 考慮新的坐標系 $x' = ax + by$ 與 $y' = bx - ay$, 而雙變數函數理解爲

$$u(x, y) = u(x'(x, y), y'(x, y)),$$

由 鏈鎖律 (chain rule) 得知

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial x} = \underline{\hspace{4cm}} \\ u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial y} = \underline{\hspace{4cm}} \text{。} \end{cases} \tag{1}$$

得到 $au_x + bu_y =$ ______________________________。因爲 $a^2 + b^2 \neq 0$, 所以 $au_x + bu_y = 0$ 等同於 ________, 因此偏微分方程式的解爲 ______________。

討論 **6.** 在伙伴的講義上寫一個明確的函數滿足 $au_x + bu_y = 0$; 驗證此函數確實滿足偏微分方程式。

(C2) 函數 $u(x, y) =$ ______________ 滿足 $au_x + bu_y = 0$。

(C1) 驗證:

討論 **7.** 與伙伴討論以下問題, 並將結果記錄下來。

(D1) 對於活動 2 所討論的偏微分方程式中, 分析幾何解法與坐標變換法的優劣性。

(D2) 偏微分方程式 $au_x + bu_y = 0$ 稱爲 *傳輸方程式* (transport equation)。請由解的現象討論爲何要這樣命名。

註. 由 (1) 可以提煉出「微分算子在坐標變換之下的轉換式」: 若 $x' = x'(x, y), y' = y'(x, y)$, 則

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x'}\dfrac{\partial x'}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y'}\dfrac{\partial y'}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{\text{忘掉函數 } u} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial y'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial x'}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial y'}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y'} \end{cases}$$