偏微分方程(一) 課程學習單 活動 1

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

- ☐ 認識偏微分方程式的數學定義。
- ☐ 了解以下術語: 一階, 二階, 高階; 線性, 非線性; 齊次, 非齊次; 常微分, 偏微分; 方程式, 方程組。
- ☐ 討論幾個最簡單的偏微分方程式, 從中了解偏微分方程式的特性與想了解的面向。

2 偏微分方程式

討論 1. 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(A1) 寫出 *單變數函數* (single variable function) 與 *雙變數函數* (two variables function) 的例子。

(A2) 寫出 *一元方程式* (single variable equation) 與 *二元方程式* (two variables equation) 的例子。

(A3) 你覺得「函數」與「方程式」的區別是什麼?

討論 2. 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(B1) 對於函數 $f(x) = \sin x$ 而言, 函數的變數是 ____ , 而 $f'(x) =$ ________, $f''(x) =$ ________。

(B2) 對於函數 $u(x, y) = x^2y^3$ 而言, 函數的變數是 ______ , 而 $u_x =$ ________, $u_y =$ ________。

以雙變數函數 $u(x, y)$ 爲例, 若要討論其 *偏微分* (partial derivative) 時, 有兩種註記方式: 一種是用偏微分符號 ∂ 表達, 比方說 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 或者是 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, 有些物理書籍中你也會看到像 $\partial_x u$ 或 $\partial_y \partial_x u$ 的寫法; 而另一種是以下標的方式註記, 例如 u_x 或者是 $u_{xy} = (u_x)_y$。注意到, 偏微分運算的先後順序都是以函數爲主體然後往外操作, 所以

(C1) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ 指的是函數 $u(x, y)$ 先對變數 ____ 偏微分, 再對變數 ____ 偏微分。

(C2) u_{xy} 指的是函數 $u(x, y)$ 先對變數 ____ 偏微分, 再對變數 ____ 偏微分。

偏微分方程式 (partial differential equation, 簡記爲 PDE) 是由多個變數 $x, y, \ldots$、未知函數 $u(x, y, \ldots)$ 以及未知函數的偏導函數 $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots$ 之間帶有等式關係的一個數學式。這門課程主要是討論雙變數函數 $u(x, y)$ 的偏微分方程式, 因此往後的定義與討論都以雙變數爲主體, 若要討論三個變數或是更多個變數的函數所成的偏微分方程式就順勢增加或修改相對應的符號。

所以就雙變數函數 $u(x, y)$ 而言, 偏微分方程式形式上的寫法就如以下的隱函數表達:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \ldots) = 0。 \tag{1}$$

爲了之後偏微分方程式的探討, 我們會用以下幾組術語區分方程式的類別。

方程式 (1) 中未知函數 $u, u_x, u_y, \ldots$ 的最高偏微分次數 n 稱爲方程式的 階 (order)。所以一階偏微分方程式型如 $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$, 而二階偏微分方程式型如

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0。$$

討論 **3.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(D1) 寫出一個具體的一階偏微分方程式: ______________________。

(D2) 寫出一個具體的二階偏微分方程式: ______________________。

(E1) 若函數 $u(x, y)$ 滿足 $(u_x)^2 - u_y + x^5y^3 = 0$, 它是 ____ 階偏微分方程式。

(E2) 若函數 $u(x, y)$ 滿足 $\mathrm{e}^y u_{xx} + \mathrm{e}^x u_{yy} = 0$, 它是 ____ 階偏微分方程式。

我們有時會將偏微分方程式 (1) 改寫成 $\mathcal{L}[u] = g(x, y)$ 的形式, 其中等式左邊 $\mathcal{L}[u]$ 是那些與未知函數 $u(x, y)$ 有關的部份, 而等式右邊 $g(x, y)$ 是由 x 和 y 決定的雙變數函數。左式的 $\mathcal{L}$ 稱爲 偏微分算子 (partial differential operator), 它是一個把微分作用、函數相乘與四則運算混搭而成的一個綜合體, 而 $\mathcal{L}[u]$ 就代表微分算子作用於函數 u 上。例如:

(a) 若 $\mathcal{L} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, 則 $\mathcal{L}[u] = y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = yu_x + xu_y$。

(b) 若 $\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x}$, 則 $\mathcal{L}^2[u] \overset{\text{定義}}{=} \mathcal{L}[\mathcal{L}[u]] = \mathcal{L}[u_x] = u_{xx}$。

(c) 若 $\mathcal{L}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, 則 $\mathcal{L}[u] \overset{\text{定義}}{=} (\mathcal{L}_1[u])^2 = \mathcal{L}_1[u] \cdot \mathcal{L}_1[u] = (u_x)^2$。

若偏微分方程式 (1) 改寫成 $\mathcal{L}[u] = g(x, y)$ 的形式, 而且 $g(x, y) = 0$, 則稱方程式是 齊次的 (homogeneous); 如果 $g(x, y) \neq 0$, 則稱方程式是 非齊次的 (inhomogeneous)。

若一個微分算子滿足以下兩個性質時, 我們稱方程式 (或是微分算子) 是 線性的 (linear):

- ⋆ $\mathcal{L}[u + v] = \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$。 兩個未知函數先相加再作用 $\mathcal{L}$ 與先各自作用 $\mathcal{L}$ 再相加一樣。
- ⋆ $\mathcal{L}[c\,u] = c\,\mathcal{L}[u]$。 未知函數先乘上常數再作用 $\mathcal{L}$ 與先作用 $\mathcal{L}$ 再乘上常數一樣。

討論 **4.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(F1) 方程式 $u_x + yu_y = 0$ (transport equation) 是線性偏微分方程式嗎? 答: ________。

檢查 $\mathcal{L}[u+v] \stackrel{?}{=} \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$:

檢查 $\mathcal{L}[c\,u] \stackrel{?}{=} c\,\mathcal{L}[u]$:

(F2) 方程式 $u_x + uu_y = 0$ (shock wave equation) 是線性偏微分方程式嗎? 答: ________。

檢查 $\mathcal{L}[u+v] \stackrel{?}{=} \mathcal{L}[u] + \mathcal{L}[v]$:

檢查 $\mathcal{L}[c\,u] \stackrel{?}{=} c\,\mathcal{L}[u]$:

若有函數 $u(x,y)$ 滿足偏微分方程式 (1) 時, 則稱 $u(x,y)$ 是偏微分方程式 (1) 的 解 (solution)。我們會特別把線性偏微分方程式特別拿出來討論的原因在於: 若 $\mathcal{L}[u] = 0$ 是線性偏微分方程式, 則方程式的解空間會形成 向量空間 (vector space); 也就是說, 若 $u(x,y)$ 與 $v(x,y)$ 滿足 $\mathcal{L}[u] = 0$ 與 $\mathcal{L}[v] = 0$, 則對任意實數 c_1 與 c_2, 則 $\mathcal{L}[c_1u + c_2v] = c_1\mathcal{L}[u] + c_2\mathcal{L}[v] = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$, 所以 $c_1u + c_2v$ 也落在解空間中。

當未知函數不只一個, 例如 $u(x,y)$ 與 $v(x,y)$ 及其偏導函數, 這時討論他們的偏微分方程式也必須不只一個才能進行分析, 將這些方程式聯立起來稱爲 偏微分方程組 (system)。

討論 **5.** 寫出方程式類型: 一階, 二階; 線性, 非線性; 齊次, 非齊次; 常微分, 偏微分; 方程式, 方程組。

(G1) $u_x + u_y = u$, 其中 $u = u(x,y)$ ________________________

(G2) $u_t + uu_x = 1$, 其中 $u = u(t,x)$ ________________________

(H1) $u_{tt} - c^2u_{xx} = \sin x$, 其中 $u = u(t,x)$ ________________________

(H2) $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + v \\ v_t = v_{xx} + u + v \end{cases}$, 其中 $\begin{cases} u = u(t,x) \\ v = v(t,x) \end{cases}$ ________________________

3 幾個簡單的偏微分方程式求解

例題 **6.** 試求常微分方程式 $y''(x) = 0$ 的解。

解**.** 因爲 $y''(x) = (y'(x))' = 0$, 所以 $y'(x) = C_1$, 得到 $y(x) = C_1x + C_2$, 其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$。

例題 **7** (第 3 頁)**.** 試求偏微分方程式 $u_{xx} = 0$ 的解。

解**.** 因爲 $u_{xx} = (u_x)_x = 0$, 而雙變數函數 $u(x, y)$ 的偏導函數 $u_x(x, y)$ 也是一個雙變數函數, 因爲 $(u_x)_x = 0$ 表示 u_x 沿著 x 方向的變化率是零, 所以 $u_x(x, y) = f(y)$, 其中 $f(y)$ 代表的是一個與 y 有關的單變數函數。再看 $u_x = f(y)$, 兩邊對 x 積分後得到 $u(x, y) = f(y)x + g(y)$, 其中 $g(y)$ 是一個與 y 有關的函數。

這裡要觀察的重點是: 在單變數函數時, 進行不定積分後會得到的是積分<u>常數</u>; 而在討論偏微分方程式的時候, 積分後會得到的是一個與積分變數無關的<u>函數</u>, 因爲這個與積分變數無關的函數對該變數偏微分後是零。所以這個二階偏微分方程式會帶有兩個任意的函數 $f(y)$ 與 $g(y)$。

討論 **8.** 各自完成自己的題目後, 再與你的伙伴分享並討論你的結果。

(I1) (第 3 頁) 先回想 $y'' + y = 0$ 的一般解, 再求偏微分方程式 $u_{xx} + u = 0$ 的解。

- $y'' + y = 0$ 的特徵方程式是 __________, 解得 __________, 所以微分方程式的一般解是

$$y(x) = \underline{\hspace{8cm}},$$

- 實際上 $u_{xx} + u = 0$ 可以理解爲一個常微分方程式, 因爲方程式微分的變數只出現 x 而沒有 y。依照常微分方程式的理論, 可以相應地寫出這個偏微分方程式的一般解爲

$$u(x, y) = \underline{\hspace{8cm}},$$

(I2) (第 3 頁) 試求偏微分方程式 $u_{xy} = 0$ 的解。

首先將方程式看成 $(u_x)_y = 0$, 所以兩邊對 y 積分後得到 $u_x(x, y) =$ ____________________, 然後再兩邊對 x 積分後得到 $u(x, y) =$ ____________________________。