5 掠食者與獵物系統 (第 426 頁)

若一個封閉環境中有兩個物種, 其中一個物種稱爲 *獵物* (prey), 另一個物種稱爲 *掠食者* (predator)。而獵物與掠食者之間有著依存關係: 對獵物而言, 在這個封閉的環境中有足夠的食物供應牠生長; 而掠食者必須補捉獵物當做食物而生存。

例如在一個森林裡, 若觀察兎子與狼的關係, 則牠們之間就會形成掠食者與獵物系統。若 $R(t)$ 記爲在 t 時刻獵物 (兎子) 的數量, $W(t)$ 代表掠食者 (狼) 在 t 時刻的數量, 現在要透過以下假設, 建立出 $R(t)$ 與 $W(t)$ 之間的關係:

(R) 在沒有掠食者的情況下, 環境中充足的食物會使獵物的數量呈現自然成長。換言之,「獵物數量的變化率與總獵物總數成正比」— 即 $R'(t) = kR$, 其中 k 是正的常數。

(W) 在缺乏獵物的情況下, 掠食者會呈現自然死亡。換言之,「掠食者數量的變化率 (減少) 與掠食者總數成正比」, 用數學式表示會是 $W'(t) = -lW$, 其中 l 是正的常數。

(RW) 當獵物與掠食者同時存在時, 彼此之間會有消長現象。當掠食者多, 獵物受到天敵數量變多的關係導致數量變少, 用 $R'(t) = -aRW$ 描述; 其中 $a > 0$ 爲常數, 用 RW 相乘呈現牠們必須「相遇」的時候, 獵物才有機會被補而死。當獵物多, 掠食者能夠抓到獵物的機率增加使得掠食者得以存活而數量增加, 用 $W'(t) = bRW$ 描述, 其中 $b > 0$ 爲常數。

將以上關係合併而列出以下微分方程組:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = kR - aRW = R(k - aW) \\ \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -lW + bRW = W(-l + bR), \end{cases} \tag{1}$$

其中 k, l, a 與 b 皆爲正的常數。

微分方程組 (1) 稱爲 *掠食者與獵物方程* (predator-prey equations, Lotka-Volterra equations)。它是一個二元一階非線性微分方程組 (systems of first-order nonlinear differential equations)。此方程分別在 1925 年與 1926 年, 由阿弗雷德・洛特卡 (Alfred James Lotka) 與維多・沃爾泰拉 (Vito Volterra) 獨立發表。以下將分析這個微分方程組的 *解* (solution) $R(t)$ 與 $W(t)$。

(a) 首先討論這個微分方程組的 *平衡解* (equilibrium solutions)。也就是解 $R'(t) = 0$ 與 $W'(t) = 0$。此時, 得到 $(R, W) = (0, 0)$ 或 $(\frac{l}{b}, \frac{k}{a})$。其中 $(R, W) = (0, 0)$ 代表這個系統中沒有兎子也沒有狼, 當然兎子與狼的數量也不會隨時間增加而改變。而 $(R, W) = (\frac{l}{b}, \frac{k}{a})$ 這個解表示 $\frac{l}{b}$ 隻兎子足夠讓 $\frac{k}{a}$ 隻的狼做爲食物生存。兎子的出生與被獵殺量之間達成平衡; 狼的死亡與獵補兎子而數量成長之間也達成平衡。

(b) 如果 $W(t) \lesseqgtr \frac{k}{a}$, 則 $R'(t) \gtreqless 0$。計算

$$R'' = R'(k - aW) - aRW' = R'(k - aW) - aRW(-l + bR).$$

如果 $R'(t_0) = 0$ 且 $R(t_0) > \frac{l}{b}$, 則 $R''(t_0) < 0$, 所以 $R(t_0)$ 爲局部極大值。
如果 $R'(t_0) = 0$ 且 $0 < R(t_0) < \frac{l}{b}$, 則 $R''(t_0) > 0$, 所以 $R(t_0)$ 爲局部極小值。
如果 $R(t) \gtreqless \frac{l}{b}$, 則 $W'(t) \gtreqless 0$。計算

$$W'' = W'(-l + bR) + bWR' = W'(-l + bR) + bWR(k - aW).$$

如果 $W'(t_0) = 0$ 且 $W(t_0) > \frac{k}{a}$, 則 $W''(t_0) < 0$, 所以 $W(t_0)$ 爲局部極大值。
如果 $W'(t_0) = 0$ 且 $0 < W(t_0) < \frac{k}{a}$, 則 $W''(t_0) > 0$, 所以 $W(t_0)$ 爲局部極小值。

(c) 若想將微分方程組的解以圖形的方式呈現, 我們可以把解曲線畫在 RW 平面上, 這時, RW 平面稱爲 相平面 (phase plane), 解曲線 $(R(t), W(t))$ 以參數式表示稱爲 相位軌跡 (phase trajectories)。所謂 相圖 (phase portrait) 是由平衡點與相位軌跡所組成的圖形。我們可以把 (a) 和 (b) 的分析結果畫出來, 如圖 1 所示。

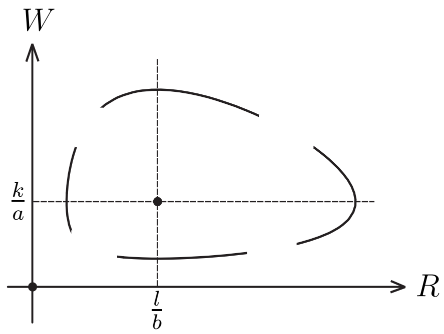

圖 1: 根據微分方程的定性分析, 把相位軌跡畫出。

而現在想要追問的是: $(R(t), W(t))$ 的解曲線會是像圖 2 的左邊那樣曲線不封閉, 當 t 愈來愈大時, 曲線會縮到 $(\frac{l}{b}, \frac{k}{a})$, 還是像圖 2 的右邊那樣是一條封閉的曲線呢?

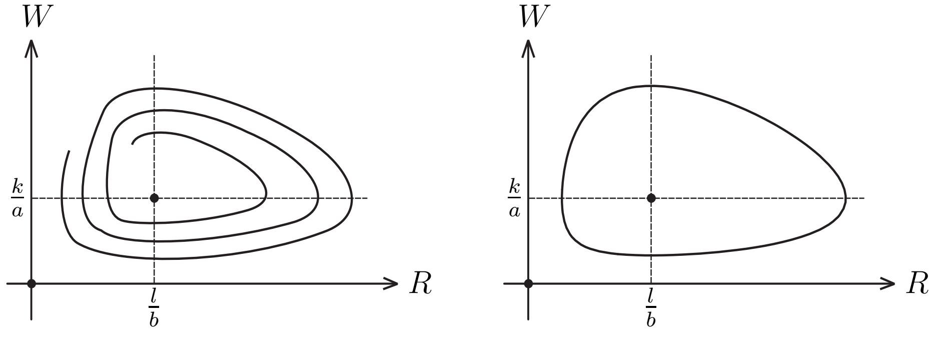

圖 2: 掠食者與獵物系統的解曲線會是左圖還是右圖呢?

(d) 利用鍊鎖律 (chain rule), 我們可將方程式改寫爲

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}R} = \frac{W(-l+bR)}{R(k-aW)} \Rightarrow \frac{k-aW}{W}\,\mathrm{d}W = \frac{(-l+bR)}{R}\,\mathrm{d}R,$$

這是分離變數的微分方程式, 方程式的解爲

$$k\ln W - aW = -l\ln R + bR + C, \tag{2}$$

其中 C 爲常數。以下將證明: $(R(t), W(t))$ 是 周期解 (periodic solution)。

首先, 考慮單變數函數 $f(x) = -px + q\ln x$, 其中 $x \in (0, \infty)$, 而 p, q 爲正的常數。因爲 $f'(x) = -p + \frac{q}{x} = \frac{-px+q}{x}$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{q}{p})$ 遞增, 而在 $(\frac{q}{p}, \infty)$ 遞減。於是 $f(x)$ 分別在區間 $(0, \frac{q}{p})$ 與區間 $(\frac{q}{p}, \infty)$ 上爲一對一的函數。

利用上面函數的特性, 我們要來驗證 $(R(t), W(t))$ 是周期解。假設存在 t_1 與 t_2 使得 $R(t_1) = R(t_2)$, 而 $W(t_1) < \frac{k}{a}$ 與 $W(t_2) < \frac{k}{a}$。由 (2) 式得知

$$k\ln W(t_1) - aW(t_1) = k\ln W(t_2) - aW(t_2)。$$

因爲函數 $f(W) = k\ln W - aW$ 在 $(0, \frac{k}{a})$ 上一對一, 所以 $W(t_1) = W(t_2)$。其它情況同理。

(e) 以下利用電腦軟體畫出微分方程組

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = R - 0.5RW \\ \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -0.75W + 0.25RW, \end{cases}$$

的解曲線 $(R(t), W(t))$。由外圈至內圈的 C 值分別爲 $-1, -0.75, -0.5, -0.33, -0.25$。

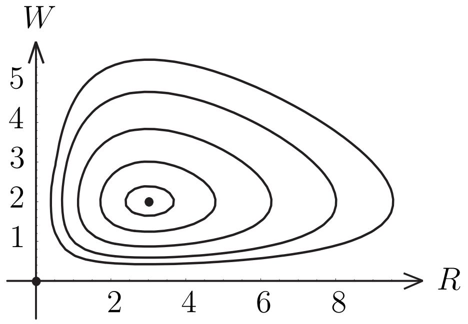

圖 3: 掠食者與獵物系統在不同初始條件下的解曲線; 均衡解 $(0,0), (3,2)$。

(f) 想一想: 解曲線當 t 增加時是順時針行走還是逆時針行走?

6 懸垂線(懸鏈線) Catenary

電線在兩電線桿之間懸垂成的曲線、或是湖畔鐵鏈懸吊在兩立柱之中的形狀稱爲懸垂線或懸鏈線 (catenary), 我們可利用微積分與微分方程, 配合物理的力學了解懸垂線。

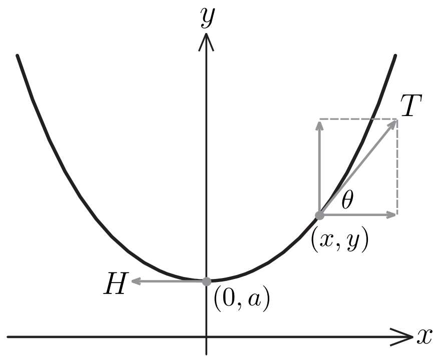

圖 4: 懸垂線。

如圖 4 所示, 設定坐標使得懸垂線最低點置於 y-軸上, 並記最低點坐標爲 $(0, a)$, 設最低點的水平張力爲 H。假設曲線表示爲函數 $y(x)$ 的圖形, 曲線上任一點 (x, y) 的張力爲 T (方向爲切線方向), 令 T 與 x-軸的夾角爲 θ。設電線 (均勻) 的密度爲 ρ, 則電線從 $(0, a)$ 到 (x, y) 的重量爲

$$\text{重量} = \text{電線密度} \times \text{電線長} = \rho s = \rho \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t\text{。}$$

由靜力平衡, 我們得到以下關係式:

$$\begin{cases} T \sin\theta = \rho s \\ T \cos\theta = H, \end{cases}$$

兩式相除後得到

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = \frac{\rho}{H} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, \mathrm{d}t,$$

將方程式再對 x 求導, 由微積分基本定理, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan\theta = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = y''(x) = \frac{\rho}{H} \sqrt{1 + (y'(x))^2}\text{。}$$

雖然它是一個二階非線性微分方程式, 但我們已經有能力得到方程式的解: 令 $v(x) = y'(x)$, 則方程式可改寫爲 $v'(x) = \frac{\rho}{H} \sqrt{1 + (v(x))^2}$, 於是對 $v(x)$ 而言是個可分離的方程 (separable equation), 所以

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + (v(x))^2}}\, \mathrm{d}v(x) = \int \frac{\rho}{H}\, \mathrm{d}x = \frac{\rho}{H} x + C,$$

而左式的積分, 利用三角代換法, 假設 $\tan\phi = v(x), -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$, 則 $\sec^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}v(x)$, 於是

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1+(v(x))^2}}\,\mathrm{d}v(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}\sec^2\phi\,\mathrm{d}\phi = \int \sec\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \ln|\sec\phi+\tan\phi| + C = \ln\left(\sqrt{1+(v(x))^2}+v(x)\right)+C,\end{aligned}$$

(因為 $\sqrt{1+(v(x))^2}+v(x)$ 為正, 所以絕對值可以去掉) 因此我們得到

$$\ln\left(\sqrt{1+(v(x))^2}+v(x)\right) = \frac{\rho}{H}x + C。$$

我們先利用條件 $v(0) = y'(0) = 0$ (在最低點的切線斜率為零) 決定出 $C = 0$。將等式兩邊取指數, 得到

$$\sqrt{1+(v(x))^2}+v(x) = \mathrm{e}^{\frac{\rho}{H}x} \Rightarrow \sqrt{1+(v(x))^2} = \mathrm{e}^{\frac{\rho}{H}x} - v(x),$$

兩邊平方後再整理, 可得

$$1+(v(x))^2 = \mathrm{e}^{\frac{2\rho}{H}x} - 2v(x)\mathrm{e}^{\frac{\rho}{H}x} + (v(x))^2 \Rightarrow v(x) = y'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\rho}{H}x} - \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{H}x}}{2}。$$

再積分一次, 得到

$$y(x) = \frac{H}{\rho}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\rho}{H}x} + \mathrm{e}^{-\frac{\rho}{H}x}}{2}\right) + C',$$

而 C' 的效應只是上下平移, 我們可以設定 $C' = 0$ 以及 $y(0) = a$ 解得 $a = \frac{H}{\rho}$, 因此

$$y(x) = a\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}}{2}\right) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)。$$

註. 上述討論, 我們用到的微積分觀念包括:

- 曲線弧長的表達式。
- 切線斜率與導數的關係。
- 微積分基本定理。
- 可分離變數的一階微分方程求解。
- 由初始值決定不定積分後的常數。
- 積分技巧 (三角代換)。
- 正割函數 $\sec x$ 的積分。
- 指數函數 e^x 的積分與鏈鎖率 (chain rule)。
- 雙曲函數 $\cosh x$。

7 最速降線問題 Brachistochrone Problem

設計一個通過 A 與 B 的無摩擦 (只受重力影響) 溜滑梯, 而圓球從 A 滾至 B 時間最短。

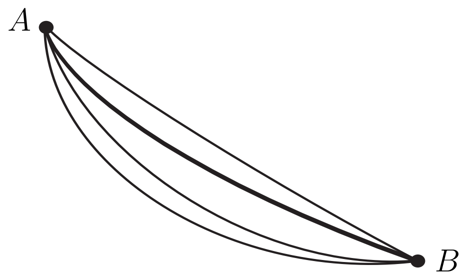

圖 5: 最速降線問題。

這個問題, 可以用斯乃爾定律 (Snell's Law) 配合極限的觀念與物理結合而得。回想斯乃爾定律是說:[1] 光束由 A 點自介質 1 (速度 v_1) 折射至介質 2 (速度 v_2) 中的 B 點, 入射角 θ_1 與折射角 θ_2 之間滿足

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}。$$

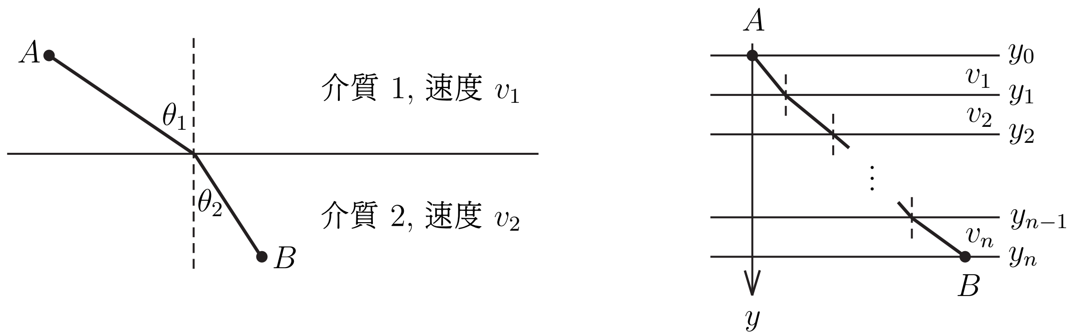

圖 6: 由斯乃爾定律推導出最速降線。

現在將 A 與 B 之間水平分割成 n 等分, 對於 $i = 1, \ldots, n$, 每個區間 $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ 以樣本點 v_i 代表圓球下滑的速度, 記 θ_i 爲在 $[y_{i-1}, y_i]$ 之間的入射角與折射角, 根據斯乃爾定律, 若此路徑所花的時間最短, 則有

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2} = \cdots = \frac{\sin\theta_n}{v_n},$$

當 n 趨近於無限大, 則有

$$\frac{\sin\theta}{v} = k = 常數, \tag{3}$$

[1]斯乃爾定律是根據費馬的光學原理:"光線走時間最短的路徑"推得。

設定直角坐標 x-y 使得 A 爲坐標原點並且 y-軸向下爲正。假設曲線可以表示爲 $y(x)$ 的圖形, 則

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y'(x))^2}}。$$

另一方面, 因爲圓球只受重力影響, 透過動能與位能守恆律知道 $v=\sqrt{2gy}$, 其中 g 爲重力常數。於是我們可以將 (3) 改寫爲:

$$k\sqrt{2gy} = \frac{1}{\sqrt{1+(y'(x))^2}} \Rightarrow y(x)(1+(y'(x))^2) = \frac{1}{2gk^2} = c \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{c-y}{y}}。$$

這是可分離的微分方程 (separable equation), 我們可以將方程改寫成:

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{y}{c-y}}\,\mathrm{d}y。$$

雖然我們可以直接用變數代換與部份分式法將右式積分, 得到 x 與 y 的關係, 但爲了要得到方程式的解是擺線的一部分 (我們熟知的擺線是以參數式表達), 故考慮以下變數變換: 令 $y = c\sin^2\phi, 0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$, 則 $\mathrm{d}y = 2c\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$, 於是

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{c\sin^2\phi}{c\cos^2\phi}}\,2c\sin\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = 2c\sin^2\phi\,\mathrm{d}\phi = c(1-\cos 2\phi)\,\mathrm{d}\phi,$$

因此

$$\begin{aligned} x &= c\left(\phi - \frac{\sin 2\phi}{2}\right) + x(\phi=0) = \frac{c}{2}(2\phi - \sin 2\phi) = r(\vartheta - \sin\vartheta) \\ y &= c\left(\frac{1-\cos 2\phi}{2}\right) = \frac{c}{2}(1-\cos 2\phi) = r(1-\cos\vartheta), \end{aligned}$$

其中 $r=\frac{c}{2}$ 以及 $\vartheta = 2\phi$。

註. 上述討論, 我們用到的微積分觀念包括:

- 斯乃爾定律與最佳化問題。
- 區間分割與分割數愈大後的極限。
- 切線斜率與導數的關係。
- 可分離變數的一階微分方程求解。
- 三角代換與三角積分 (含半角公式的使用)。
- 由初始值決定不定積分後的常數。
- 擺線 (cycloid) 的參數式。