4 拉普拉斯變換 (The Laplace Transform, 第 239 頁)

4.1 拉普拉斯變換介紹

接續前一章所討論的電子電路的問題, 當你想要了解電路在停電那時刻前後的電流現象的話, 該如何描述這個現象? 或者是一個電路的裝置, 假設突然來了一個不正常地供電(脈衝), 那麼這麼脈衝所造成的後續電流現象是什麼? 甚至可以問這個脈衝是否會導致一些裝置壞掉?

拉普拉斯變換 (Laplace transform) 是一套處理微分方程式的理論, 這個理論的發展是特別爲了處理並解決當非齊次項是不連續函數或是脈衝函數的情形, 這種情形經常發生在設計電路的時候。而各位之後也將看到, 這個理論也適用於之前所學的非齊次項是連續函數的微分方程式, 所以拉普拉斯變換的應用層面更爲廣泛。

這一章的前幾節將介紹拉普拉斯變換的數學基本理論。在這一章的最後一節會以例題示範如何利用拉普拉斯變換解微分方程式。

4.2 拉普拉斯變換的定義

首先我們給出拉普拉斯變換的定義:

定義 1 (第 241 頁)**.** 假設函數 $f(t)$ 定義於 $[0,\infty)$, 則瑕積分

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$$

在收斂的地方稱爲函數 f 的 *拉普拉斯變換* (Laplace transform)。

以下將逐一建構常見函數的拉普拉斯變換, 還有幾個重要的變換公式。

例 2 (第 243 頁)**.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{1\}$。

解.

例 3 (第 243 頁)**.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{t\}$。

解.

習題 (第 243 頁)**.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\}$。

例 **4** (第 244 頁)**.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{\sin at\}$。

解**.**

註. 類似的計算可推得 $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$。

註. 雙曲函數的拉普拉斯變換公式爲: $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$ 與 $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$。

定理 **5** (第 244 頁)**.** 拉普拉斯變換是一個 線性變換 (linear transformation)。換言之, 對任意實數 A 與 B, 都有

$$\mathcal{L}\{Af(t) + Bg(t)\} = A\mathcal{L}\{f(t)\} + B\mathcal{L}\{g(t)\} = AF(s) + BG(s)。$$

定義 **6** (第 242 頁)**.** 給定函數 $f(t)$, 若存在常數 $c, M > 0$, 以及 $T > 0$ 使得對所有 $t > T$ 都有 $|f(t)| \le M\mathrm{e}^{ct}$, 則稱 $f(t)$ 是 不超過指數等級 c 成長 (exponential order c)。

定理 **7** (第 242 頁)**.** 若 f 在 $[0, \infty)$ 上是分段連續函數並且不超過指數等級 c 成長, 則拉普拉斯變換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 在 $s > c$ 處有定義。

證明: 給定 $T > 0$, 將 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 改寫爲

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathtt{I} + \mathtt{II},$$

因爲 $\mathrm{e}^{-st}f(t)$ 分段連續, 所以積分 $\mathtt{I}$ 存在。而關於積分 $\mathtt{II}$, 進行以下估計:

$$|\mathtt{II}| \le \int_T^\infty |\mathrm{e}^{-st}f(t)|\,\mathrm{d}t \le M\int_T^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t = \frac{M\cdot \mathrm{e}^{-(s-c)T}}{s-c} \quad 若 \quad s > c。$$

由瑕積分的比較定理得知積分 $\mathtt{II}$ 在 $s > c$ 處存在。因此 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $s > c$ 有定義。

例 **8.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{f(t)\}$, 其中 $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{若 } 0 \le t < 3 \\ 2 & \text{若 } t \ge 3 \end{cases}$。

解.

定理 **9** (第 246 頁)**.** 若 f 在 $[0,\infty)$ 分段連續且不超過指數等級成長, 記 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, 則 $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$。

證明: 因爲 f 不超過指數等級成長, 存在 $\gamma, M_1 > 0$ 與 $T > 0$ 使得對所有 $t > T$, 都有 $|f(t)| \le M_1 e^{\gamma t}$。因爲 f 在 $0 \le t \le T$ 分段連續, 所以 $|f(t)| \le M_2 = M_2 e^{0\cdot t}$。令 $M = \max\{M_1, M_2\}$ 以及 $c = \max\{0, \gamma\}$, 則對所有 $s > c$, 都有

$$0 \le |F(s)| \le \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|\,dt \le M\int_0^\infty e^{-st}e^{ct}\,dt = M\int_0^\infty e^{-(s-c)}\,dt = \frac{M}{s-c}。$$

因爲 $\lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-c} = 0$, 故由夾擠定理得知 $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$。

4.3 拉普拉斯逆變換與導數變換 (第 249 頁)

前一節介紹的是函數 $f(t)$ 的拉普拉斯變換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, 而拉普拉斯逆變換 (inverse Laplace transform) 就是給定 $F(s)$, 問哪個函數 $f(t)$ 的拉普拉斯變換會是 $F(s)$, 我們將拉普拉斯逆變換記爲 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$。由前一節的討論, 我們知道以下拉普拉斯逆變換:

$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	1	t^n	e^{at}	$\sin at$	$\cos at$

例 **1.** 試求 (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$ 與 (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$。

解.

習題**.** 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$。

例 **2.** 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-7}{(s+1)(s-3)}\right\}$。

解.

習題. 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s^2-3s-16}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$。

以下要介紹的定理是在討論一個函數的 n 次導函數的拉普拉斯變換與函數的拉普拉斯變換之間的關聯。

定理 **3** (第 247 頁)**.** 若 $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ 在 $[0,\infty)$ 連續, 並且都是不超過指數等級成長, 若 $f^{(n)}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 分段連續, 則

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0), \tag{1}$$

其中 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$。

證明: <u>當 $n=0$</u>, 則 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$。
<u>假設 $n=k$, k 爲非負整數時</u> (1) 式成立, 即有 $\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^kF(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k-i}f^{(i-1)}(0)$。
<u>則當 $n=k+1$</u> 時,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-st}f^{(k)}(t)\right]\Big|_0^b + s\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -f^{(k)}(0) + s\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = -f^{(k)}(0) + s\left(s^kF(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k-i}f^{(i-1)}(0)\right) \\
&= s^{k+1}F(s) - \sum_{i=1}^{k+1} s^{k+1-i}f^{(i-1)}(0)。
\end{aligned}$$

故由數學歸納法得知公式 (1) 對所有 n 爲非負整數時皆成立。

這個定理對於微分方程的求解非常重要, 若要使用拉普拉斯變換解微分方程, 方法如下: 先將微分方程進行拉普拉斯變換, 定理 **3** 告知, 我們可以把方程式的所有資訊轉變爲 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 還有初始條件 $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ 的關係式, 而這個關係式可以解出 $F(s)$, 最後再用拉普拉斯逆變換得到微分方程式的解 $f(t)$。

4.4 拉普拉斯變換算子的特性(一)

定理 1 (第一平移定理 (First Translation Theorem, 第 260 頁)). 若 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, 而 a 是任意實數, 則

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\} = F(s-a);$$

而拉普拉斯逆變換滿足 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = \mathrm{e}^{at} f(t)$。

證明: $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = F(s-a)$。

就幾何意義而言, 函數 $F(s-a)$ 的圖形是把 $F(s)$ 圖形向右移動 a 單位而得。所以若 $a>0$ ($a<0$), 則 $F(s-a)$ 是把 $F(s)$ 的圖形向右 (左) $|a|$ 單位。

有的時候我們會把上述結果寫成 $\underline{\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s\to s-a}}$: 先變換完再平移。

例 2. 試求 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{5t}t^3\}$。

解.

例 3. 試求 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-2t}\cos 4t\}$。

解.

除了拉普拉斯變換的平移定理, 我們也要會拉普拉斯逆變換的平移定理: 先把函數整理成某個標準型再平移的型式 $F(s)|_{s\to s-a}$, 所以逆變換的結果是把原函數 $f(t)$ 乘上 e^{at}。

例 4. 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$。

解.

定義 5 (第 255 頁)**.** 定義 單位階梯函數 (unit step function) $\mathcal{U}(t-c)$ 爲

$$\mathcal{U}(t-c)=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\le t<c\\ 1 & \text{若 } t\ge c.\end{cases}$$

例 **6.** 將函數 $f(t)$ 表示成階梯函數的組合。

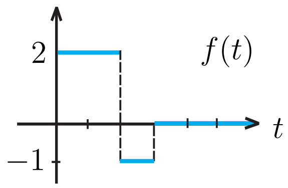

圖 12: 函數 $f(t)$ 可以表示成數個階梯函數的加總。

解.

例 **7.** 將 $f(t)=\begin{cases}20t & \text{若 } 0\le t<5\\ 0 & \text{若 } t\ge 5\end{cases}$ 表示成階梯函數的組合。

解.

定理 8 (第二平移定理 (Second Translation Theorem, 第 257 頁))**.** 若 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ 且 $c>0$, 則

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\{f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\}=\mathrm{e}^{-cs}F(s)\\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-cs}F(s)\}=f(t-c)\mathcal{U}(t-c)=f(t)\mathcal{U}(t)|_{t\to t-c}\text{。}\end{aligned}$$

證明: 直接計算得知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\}&=\int_0^c \mathrm{e}^{-st}f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t+\int_c^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t\\ &=\int_c^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t-c)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(v+c)}f(v)\,\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-cs}F(s)\text{。}\end{aligned}$$

第二平移定理較常使用的情況是: 若某個函數的拉普拉斯變換可表示成 $F(s)$ 乘上 e^{-cs}, 那麼這個函數會是 $f(t)$ 乘上階梯函數 $\mathcal{U}(t)$ 之後再向右平移 c 單位。

例 **9.** 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\,\mathrm{e}^{-2s}\right\}$.

解.

4.5 拉普拉斯變換算子的特性(二)

定理 1 (第 254 頁)**.** 若 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ 而 n 爲正整數, 則

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)。\tag{2}$$

證明: <u>當 $n=1$ 時</u>,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{-st}f(t))\,\mathrm{d}t=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}tf(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\mathcal{L}\{tf(t)\}.\end{aligned}$$

假設 <u>當 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 時</u>, 式子 (2) 成立, 換言之, $\mathcal{L}\{t^k f(t)\}=(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}F(s)$。
<u>當 $n=k+1$ 時</u>,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{k+1}f(t)\}&=\mathcal{L}\{t\cdot t^k f(t)\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{t^k f(t)\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}F(s)\right)\\&=(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}s^{k+1}}F(s)。\end{aligned}$$

故由數學歸納法得知, 對所有正整數 n, 都有 $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)$。

例 **2.** 試求 $\mathcal{L}\{t\sin at\}$。

解**.**

定義 3 (第 273 頁)**.** 若函數 f 與 g 在 $[0,\infty)$ 是分段連續函數, 記 $f*g$ 代表 f 與 g 的卷積 (convolution), 定義爲

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\left(=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=(g*f)(t)\right)。$$

定理 4 (卷積定理)**.** 若 $f(t)$ 與 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上分段連續, 並且不超過指數等級, 則

$$\mathcal{L}\{f*g\}=\mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}=F(s)G(s)。$$

證明: 令 $F(s)=\int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\mathrm{e}^{-s\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 與 $G(s)=\int_{\beta=0}^{\beta=\infty}\mathrm{e}^{-s\beta}f(\beta)\,\mathrm{d}\beta$。則

$$\begin{aligned}F(s)G(s)&=\left(\int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\mathrm{e}^{-s\tau}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{\beta=0}^{\beta=\infty}\mathrm{e}^{-s\beta}g(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\\&=\int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{\beta=0}^{\beta=\infty}\mathrm{e}^{-s(\tau+\beta)}f(\tau)g(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\tau\overset{(\star)}{=}\int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{t=\tau}^{t=\infty}\mathrm{e}^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\\&\overset{(*)}{=}\int_{t=0}^{t=\infty}\int_{\tau=0}^{\tau=t}\mathrm{e}^{-st}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t=\int_{t=0}^{t=\infty}\mathrm{e}^{-st}\int_{\tau=0}^{\tau=t}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\\&=\mathcal{L}\{f*g\},\end{aligned}$$

其中 $(\star)$ 式是固定 τ 下進行變數變換 $t=\tau+\beta$; 而 $(*)$ 是將積分順序交換。

例 **5.** 試求 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^\tau \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}$。

解.

註. 由 定理 **4** 可得拉普拉斯逆變換: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$。

例 **6.** 若取 $g(t) = 1$ 與 $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s}$, 則卷積定理得知函數 f 的積分的拉普拉斯變換及其逆變換型式爲:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \underline{\hspace{3cm}}$$

定理 **7** (第 261 頁)**.** 若 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 分段連續, 且不超過指數等級, 並且具有週期 T, 則

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}} \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t。 \tag{3}$$

證明: 因爲 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$, 令 $t = u + T$, 則

$$\int_T^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(u+T)} f(u+T)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-sT}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su} f(u)\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

因此 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}$, 故 (3) 成立。

例 **8.** 試求圖 13 所呈現的週期函數的拉普拉斯變換。

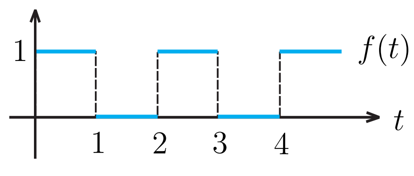

圖 13: 函數 $f(t)$ 是週期函數。

解.

4.6 狄拉克函數 (Dirac Delta Function, 第 268 頁)

考慮 單位脈衝函數 (unit impulse function):

$$\delta_c(t-t_0)=\begin{cases}0 & 若\ 0\le t<t_0-c\\ \frac{1}{2c} & 若\ t_0-c\le t<t_0+c\\ 0 & 若\ t\ge t_0+c\end{cases}。$$

單位脈衝函數的特性是: $\int_0^\infty \delta_c(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1$。

定義 1 (第 269 頁)**.** 定義 狄拉克 δ 函數 (Dirac delta function) 是單位脈衝函數的極限, 也就是:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{c\to 0}\delta_c(t-t_0)。$$

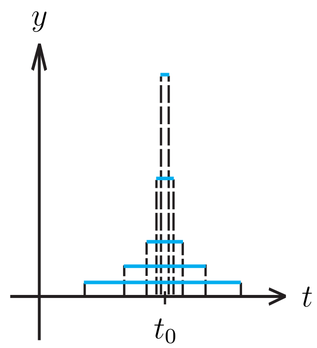

圖 14: 狄拉克函數在圖形上的刻畫。

註*.* 注意到狄拉克在數學上並不是平常所認知「函數」, 而它應理解爲 線性泛函 (linear functional)。而狄拉克函數的兩個刻畫是:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & 若\ t=t_0\\ 0 & 若\ t\ne t_0\end{cases}\quad 與\quad \int_0^\infty \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t=1。$$

定理 2 (第 270 頁)**.** 對於 $t_0>0$, 狄拉克函數的拉普拉斯變換爲*:*

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}=\mathrm{e}^{-st_0}。$$

證明: 因爲 $\delta_c(t-t_0)=\frac{1}{2c}\left(\mathcal{U}(t-(t_0-c))-\mathcal{U}(t-(t_0+c))\right)$, 所以

$$\mathcal{L}\{\delta_c(t-t_0)\}=\frac{1}{2c}\left(\frac{\mathrm{e}^{-s(t_0-c)}}{s}-\frac{\mathrm{e}^{-s(t_0+c)}}{s}\right)=\mathrm{e}^{-st_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sc}-\mathrm{e}^{-sc}}{2sc}\right)。$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}&=\lim_{c\to 0}\mathcal{L}\{\delta_c(t-t_0)\}=\lim_{c\to 0}\mathrm{e}^{-st_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sc}-\mathrm{e}^{-sc}}{2sc}\right)\\ &\overset{(\frac{0}{0}),L'}{=}\mathrm{e}^{-st_0}\cdot\lim_{c\to 0}\left(\frac{s\mathrm{e}^{sc}+s\mathrm{e}^{-sc}}{2s}\right)=\mathrm{e}^{-st_0}\cdot\lim_{c\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sc}+\mathrm{e}^{-sc}}{2}\right)=\mathrm{e}^{-st_0}。\end{aligned}$$

4.7 拉普拉斯變換表 (第 250 頁)

編號	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	註記
1.	1	$\dfrac{1}{s},\ s > 0$	常數函數
2.	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a},\ s > a$	指數函數
3.	$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	多項式
*4.	$t^p,\ p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s > 0$	冪函數
5.	$\sin at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$	三角函數
6.	$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2},\ s > 0$	三角函數
*7.	$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$	雙曲函數
*8.	$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2},\ s > \lvert a\rvert$	雙曲函數
9.	$\mathrm{e}^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$	指數函數與三角函數相乘
10.	$\mathrm{e}^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$	指數函數與三角函數相乘
11.	$\mathrm{e}^{at}t^n, n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$	指數函數與多項式相乘
12.	$\mathrm{e}^{at}f(t)$	$F(s-a)$	第一平移定理
13.	$\mathcal{U}(t-c)$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-cs}}{s},\ s > 0$	單位階梯函數
14.	$f(t-c)\mathcal{U}(t-c)$	$\mathrm{e}^{-cs}F(s)$	第二平移定理
15.	$f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$	圖形左右伸縮
16.	$\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$	函數積分
17.	$\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F(s)G(s)$	卷積 $f * g$
18.	$\delta(t-c)$	e^{-cs}	狄拉克函數
19.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} s^{n-1-i}f^{(i)}(0)$	微分
20.	$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$	乘上 t^n
21.	$Af(t)+Bg(t)$	$AF(s)+BG(s)$	線性組合

4.8 利用拉普拉斯變換解微分方程式

拉普拉斯變換可以處理帶有初始條件的常微分方程式, 特別是非齊次項可以允許是分段連續的函數, 甚至是狄拉克函數。利用拉普拉斯變換處理微分方程式的流程如下:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{欲解微分方程 } F(t,y,y',\ldots,y^{(n)})=0 & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{將方程式轉變成 } Y(s) \text{ 的代數式} \\
?\downarrow & & \downarrow \\
\text{得到微分方程式的解 } y(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & \text{求出 } Y(s) \text{ 的代數解}
\end{array}
$$

拉普拉斯變換的特色在於: 微分方程經過拉普拉斯變換下會轉變成代數式; 利用代數的操作及其理論, 再反應回方程式的解。以下將介紹四種不同類型的微分方程求解。

例 **1.** 利用拉普拉斯變換解初始值問題:

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{-4t},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=5。$$

解**.**

例 **2.** 利用拉普拉斯變換解初始值問題:

$$y''-6y'+9y=t^2\mathrm{e}^{3t},\quad y(0)=2,\quad y'(0)=17。$$

解**.**

例 **3.** 試解微分方程 $y' + y = g(t), y(0) = 5$, 其中 $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{若 } 0 \leq t < \pi \\ 3\cos t & \text{若 } t \geq \pi \end{cases}$ 。

解**.**

例 **4.** 試解微分方程: $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi)$, 其中 $y(0) = 1, y'(0) = 0$。

解**.**

4.9 伽瑪函數 (Gamma Function, 第 245 頁)

在單元 4.7 的表格編號 4. 中, 出現符號 $\Gamma(p+1)$, 它稱爲 *伽瑪函數* (gamma function), 它的定義是

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^p \,\mathrm{d}x,$$

首先我們要確定所有伽瑪函數有意義 (瑕積分收斂) 的 p 值。

例 **1** (第 245 頁)**.** 證明在 $p > -1$ 時伽瑪函數 (瑕積分) 收斂。

證明: (a) 首先觀察瑕積分在 x 趨近於無限大時的收斂或發散性。因爲

$$\mathrm{e}^{-x} x^p = \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{e}^{p\ln x} = \mathrm{e}^{p\ln x - \frac{1}{2}x} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$$

故由 ______________ 得知 $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-x} x^p \,\mathrm{d}x$ 在 ____ 時收斂。

(b) 再觀察瑕積分在 x 趨近於零時的收斂或發散性。

<u>若 $p \geq 0$</u>,

<u>若 $p < 0$</u>,

故由 ______________ 得知 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} x^p \,\mathrm{d}x$ 在 ____ 時收斂。

(c) 綜合 (a) 與 (b) 得知:<u>伽瑪函數 $\Gamma(p+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^p \,\mathrm{d}x$ 在 $p > -1$ 時收斂。</u>

例 **2** (第 245 頁)**.** 給定 $p > -1$, 驗證 $\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$。

證明:

通常在看到伽瑪函數的介紹時, 通常都會以「推廣的階乘函數」做爲出發點, 也就是希望找到光滑函數使得它具有階乘的特性。而伽瑪函數就是具有這樣的性質, 以下將明確敘述其現象, 而證明留給各位當做習題。

定理 3 (伽瑪函數的特性, 第 245 頁)**.**

(a) $\Gamma(1) = \Gamma(0+1) = 1$。

(b) 對於 $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, 由此搭配 (a) 得知若 $n \in \mathbb{N}$, 則 $\Gamma(n+1) = n!$。

(c) 對於 $p > 0$, $p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)}$。

上述定理 (c) 告知: 只要知道 $\Gamma(p+1)$ 在 $-1 < p \leq 0$ 的值, 就可以得到所有其它在 $\Gamma(p+1), p > 0$ 的值。另外, 注意到 $\Gamma(p+1)$ 的括號裡寫成 $p+1$ 的用意, 一個是這樣寫, 括號內的數恆正; 而另一個用意是這樣寫的時候, 由 (b) 知道, 它可以把階乘的 n 值做對應; 而 (a) 的結果 $\Gamma(0+1) = 1$ 與 $0! = 1$ 對應。

而這節的最後, 想要補充一個伽瑪函數與拉普拉斯變換之間的關係。

例 4 (第 246 頁)**.** 證明 $\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, s > 0$。