3　二階線性微分方程式(第 101 頁)

這一章要討論某幾類特別的二階線性微分方程。在數學上, 討論它們的原因在於這類的微分方程可以把解確實地寫出來, 並且當中有一些數學理論值得探討, 特別是解空間有線性代數的結構。在物理上, 二階線性微分方程自微積分發展的過程中就已被用來了解許多自然界的現象, 例如牛頓第二運動定律、虎克定律 — 彈簧伸縮位置與施力大小、方向之間的關係、簡單電路的電流與電壓之間的關聯等諸多應用。所以二階微分方程比起一階微分方程而言內容更爲豐富, 也更廣泛地探討。

所謂 *二階線性微分方程式* (second-order linear differential equation) 的一般式爲

$$P(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+R(x)y(x)=G(x),$$

其中 $P(x), Q(x), R(x)$ 與 $G(x)$ 是連續函數。這裡我們當然會預設 $P(x)\not\equiv 0$, 不然這個方程式就退化爲一階微分方程式了。既然 $P(x)$ 不恆爲零, 對於那些 $P(x)$ 非零的點, 由函數的連續性得知必存在一個開區間 I 使得 $P(x)\neq 0, x\in I$。這時, 在區間 I 上我們可以把二階線性微分方程式改寫成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x), \tag{1}$$

其中 $q(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}, r(x)=\frac{R(x)}{P(x)}, g(x)=\frac{G(x)}{P(x)}$。在討論二階線性微分方程式的數學理論時, 通常會先研究方程式 (1), 而那些 $P(x)=0$ 的點, 稱爲 *奇異點* (singular points), 將留到之後的章節再討論奇異點的分析。

關於二階線性微分方程式, 一般來說將探討兩大類問題, 一個是 *初始值問題* (initial value problem): 給定微分方程式之後, 再額外指定某個點的函數值及其導數, 然後問方程式在該點附近的解是否存在唯一。也就是說, 我們會考慮

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x),\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0', \tag{2}$$

其中 y_0 與 y_0' 是給定的實數。若 $q(x), r(x)$ 與 $g(x)$ 在某個包含 x_0 的區間上都是連續函數, 則有微分方程初始值問題解的存在唯一性定理。在此僅列出定理的結果, 各位若對該定理的證明感興趣, 可見柯丁頓所寫的書 — Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations*; New York; Dover, 1989. — 有詳細的論述。

定理 **2** (第 108 頁)**.** 對於初始值問題 (2), 若 $q(x), r(x)$ 與 $g(x)$ 在某個包含 x_0 的開區間 I 上都是連續函數, 則在區間 I 上存在唯一函數 $y=\phi(x)$ 滿足 (2)。

另一類問題稱爲 *邊界值問題* (boundary value problem), 它是在探討以下問題:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x),\quad y(x_a)=y_a,\quad y(x_b)=y_b,$$

其中 $y(x_a) = y_a$ 與 $y(x_b) = y_b$ 稱爲 *邊界值條件* (boundary value conditions)。我們通常會專注於介在 x_a 與 x_b 之間是否有函數滿足微分方程式與邊界值條件 (所以 x_a 與 x_b 是區間的邊界), 當然我們也可以繼續追問微分方程的解是否可以延拓到區間外部。

這裡先註記一件事, 二階線性微分方程的邊界值問題不見得有解的存在性; 此外, 就算邊界值問題有解, 解也不一定唯一, 我們會在單元 3.3 用一個例子討論這個現象。

爲了之後理論的介紹, 我們會將函數 $g(x)$ 再細分成兩種情況:

(a) 若 $g(x) \equiv 0$, 稱微分方程式 (1) 是 *齊次* (homogeneous) 的。

(b) 若 $g(x) \not\equiv 0$, 稱微分方程式 (1) 是 *非齊次* (nonhomogeneous) 的。

3.1 二階線性齊次微分方程式的一般理論(第 108 頁)

本節要討論二階線性齊次微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + r(x)y(x) = 0, \tag{3}$$

這個方程式被冠名爲「線性」與「齊次」的理由在於它的解空間有很好的線性結構, 於是可以利用線性代數的理論加以理解。一個最初步的觀察是 *疊加原理* (principle of superposition)。

定理 3 (第 110 頁)**.** 假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 (3) 的解, 任給兩實數 c_1 與 c_2, 則函數 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 也是方程式 (3) 的解。

證明: 對於 $i = 1, 2$, 我們有 $y_i''(x) + q(x)y_i'(x) + r(x)y_i(x) = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
& y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) \\
&= (c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x)) + q(x)(c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x)) + r(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\
&= c_1(y_1''(x) + q(x)y_1'(x) + r(x)y_1(x)) + c_2(y_2''(x) + q(x)y_2' + r(x)y_2(x)) \\
&= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0。
\end{aligned}$$

對函數空間而言, 當它搭配常數倍乘法還有函數的加法時, 將會形成一個 *向量空間* (vector space), 所以若把一個函數視爲一個向量時, 上述的疊加原理再搭配 $y(x) \equiv 0$ 也是微分方程式 (3) 的解, 並將 $y(x) \equiv 0$ 看成是零向量的話, 就得知二階線性齊次微分方程式的解空間是函數空間的一個 *子空間* (subspace)。

各位注意到: 上面的計算若 c_1 與 c_2 都是複數時, 等式也都成立, 而這個觀察會在之後的討論用到。

再來想了解的是二階線性齊次微分方程式解空間的維度。這時我們先搭配初始值條件進行討論: 給定兩實數 y_0 與 y_0', 假設 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 滿足方程式 (3) 以及初始值條件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, 其中 c_1 與 c_2 爲兩個待定的實數, 則有

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1 + y_2(x_0)c_2 = y_0 \\ y_1'(x_0)c_1 + y_2'(x_0)c_2 = y_0', \end{cases}$$

因此, 只要由 y_1, y_2 與 x_0 定義出的行列式

$$W[y_1, y_2](x_0) \overset{\text{定義}}{=} \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

非零, 那麼就可以用解聯立的方式得到 c_1 與 c_2。這個行列式 $W[y_1, y_2](x_0)$ 稱爲 朗斯基行列式 (Wronskian determinant)。於是上述討論可以寫成以下定理:

定理 4 (第 111 頁)**.** 假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 (3) 的解, 並且在一點 $x_0 \in I$ 上的朗斯基行列式 $W[y_1, y_2](x_0)$ 非零, 則任給兩實數 y_0 與 y_0', 必有兩實數 c_1 與 c_2 使得 $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 滿足 (3) 與初始值條件 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$。

剛才提到, 函數空間是一個向量空間, 所以給定兩個連續函數, 我們可以藉助線性代數的理論定義: 若其中一個函數可以表示成另一個函數的常數倍時, 稱兩函數互爲 線性相依 (linearly dependent), 否則稱兩函數互爲 線性獨立 (linearly independent)。實際上朗斯基行列式與兩函數是線性獨立或相依有一些關係。以下定理將說明這之間的關係:

定理 5. 假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是在開區間 I 上的可微分函數。

(a) 若存在 $x_0 \in I$ 使得 $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, 則 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 線性獨立。

(b) 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 線性相依, 則 $W[y_1, y_2](x) = 0, x \in I$。

各位不應把 定理 5 過度解讀成朗斯基行列式與線性獨立或相依互相等價。也就是說, 若存在一點使得 $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, 不見得 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是線性相依; 甚至, 縱使 $W[y_1, y_2](x) = 0, x \in I$, 而 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 有可能線性獨立。例如, 各位可以拿 $y_1(x) = x^2|x|$ 與 $y_2(x) = x^3$ 在區間 $I = (-1, 1)$ 還有 $x_0 = 0$ 進行討論。

而 定理 5 中的兩個命題互爲否逆命題, 所以我們只要證明命題 (b) 即可。

證明: 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 線性相依, 不失一般性, 可假設 $y_1(x) = c\,y_2(x), x \in I$, 其中 c 爲常數, 因此有 $y_1'(x) = c\,y_2'(x), x \in I$, 並且

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c\,y_2(x) & y_2(x) \\ c\,y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$
$$= c\,y_2(x)y_2'(x) - c\,y_2(x)y_2'(x) = 0。$$

例 **6.** 分析 $y_1(x)=\mathrm{e}^{r_1x}$ 與 $y_2(x)=\mathrm{e}^{r_2x}$ 線性獨立或線性相依的條件。

解.

現在我們要利用朗斯基行列式以及二階線性微分方程式初始值問題解的存在性一性證明: 二階線性齊次微分方程式 (不指定初始值條件) 解空間的維度是 2。

定理 **7** (第 112 頁)**.** 如果 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 (3) 的解, 而且在某個點 $x_0\in I$ 上的朗斯基行列式 $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0$, 則所有微分方程式 (3) 的解必可表示成 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$, 其中 c_1 與 c_2 爲實數。

證明: 令 $y=\phi(x)$ 是方程式 (3) 的解, 而在 $x=x_0$ 處把函數值與導數值記爲 $\phi(x_0)=y_0,\phi'(x_0)=y_0'$。考慮初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=0,\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',$$

則 $y=\phi(x)$ 是這個初始值問題的解。另一方面, 因爲 $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0$, 所以由 定理 4 知, 存在 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ 使得 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 爲初始值問題的解。由 定理 2 解的唯一性得知 $\phi(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$。

由前面的討論總結出的結果是:

二階線性齊次微分方程式的解空間是二維向量空間。

這一節的最後, 我想要說明兩件事。第一, 凡事用到線性代數的理論, 基本上都可以推廣至一般的維度, 比方說 n 階線性齊次微分方程也有一般理論, 而在單元 3.4 將看到二階線性非齊次微分方程的情形, 它也可以順勢地對維度推廣; 或是你可以將這些討論退回至一階線性微分方程重新思考所有理論, 便會發現一階線性微分方程式也有清楚的線性結構在內。這時讀者不知道有沒有產生一個疑問: 爲什麼我們不在一階線性微分方程式的時候就直接研究解空間的結構? 這個問題我的看法如下: 因爲一階線性微分方程可以很容易地找到方程式的解 (積分因子法), 所以就不需要用牛刀 — 線性代數 — 去做各種解釋; 當談論到二階甚至高階的線性微分方程式時, 需要用到線性代數的理論以了解方程式的解。

因爲「線性」這個特性在維度上很容易進行推廣, 所以在這個課程理, 基本上我不打算花時間討論高階線性微分方程式, 各位若將來遇到高階線性微分方程式, 自己試著把整個理論再重新思考一次, 就可以建立出對應的結果。

第二, 前面的討論都是理論的部分, 當我們實際遇到一個二階線性齊次微分方程時, 該如何確實地找到兩個互爲線性獨立的解呢? 這個問題便是接下來幾節所要探討的課題。

3.2 二階線性齊次常係數微分方程(第 101–131 頁)

這一節我們先專注於一個更特別、或是說更簡單的微分方程式, 就是當係數 P, Q, R 都是常數函數的情況。這時我們會故意把係數改用 a, b, c 這些符號以更突顯「常係數」這件事。換言之, 我們將考慮方程式

$$ay''(x) + by' + cy(x) = 0, \tag{4}$$

其中 a, b, c 都是常數, 並且 $a \neq 0$。

關於方程式 (4), 要找到兩個互爲線性獨立的解是容易的。若大家對指數函數有一定認識的話, 通常會嘗試函數 $y = \mathrm{e}^{rx}$, 其中 r 是常數。如此就有 $y' = r\mathrm{e}^{rx}$ 與 $y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$, 代入 (4) 後得到

$$ar^2\mathrm{e}^{rx} + br\mathrm{e}^{rx} + c\mathrm{e}^{rx} = 0 \Leftrightarrow (ar^2 + br + c)\mathrm{e}^{rx} = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0。$$

因此, $y = \mathrm{e}^{rx}$ 是方程式 (4) 的解等價於 r 是

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{5}$$

的根。我們會把 (5) 稱爲微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 的 *輔助方程* (auxiliary equation) 或是 *特徵方程* (characteristic equation)。這是一個一元二次方程式, 我們可以利用公式解進一步分析方程式的解:

(a) <u>如果 $b^2 - 4ac > 0$</u>, 則特徵方程有兩相異實根, 記爲

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad 與 \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

這時, $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 與 $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$ 就是線性獨立的兩個解 (回想單元 3.1 例 6 的討論)。於是方程式 (4) 的一般解爲 $y(x) = c_1\mathrm{e}^{r_1 x} + c_2\mathrm{e}^{r_2 x}$, 其中 c_1, c_2 爲任意實數。

(b) <u>如果 $b^2 - 4ac = 0$</u>, 那麼 $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ 是兩相等實根。我們不妨把這個實根記成 r, 則 $y_1(x) = \mathrm{e}^{rx}$ 是方程式 (4) 的一個解。這時我們只找到一個解, 該如何找到另一個與 $y_1(x)$ 獨立的解呢? 這裡將介紹一個方法稱爲 *降階法* (reduction of order): 假設 $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ 是 $ay'' + by' + cy = 0$ 的另一個解, 其中 $u(x)$ 是一個函數 (但不是常數函數)。因爲

$$\begin{aligned}
c \cdot y_2 &= c \cdot (\phantom{u''y_1 + 2u'y_1' + {}} uy_1) \\
b \cdot y_2' &= b \cdot (\phantom{u''y_1 + {}} u'y_1 + uy_1') \\
a \cdot y_2'' &= a \cdot (u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''),
\end{aligned}$$

於是

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = au''y_1 + u'(2ay_1' + by_1) + u(ay_1'' + by_1' + cy_1) = au''y_1 = 0,$$

因爲 a 與 y_1 非零, 所以勢必 $u''(x) = 0$, 積分後得到 $u'(x) = C_1$ 與 $u(x) = C_1x + C_2$, 其中 C_1 與 C_2 爲實數。因爲我們的目標是要找到一個和 $y_1(x)$ 線性獨立的函數, 故取 $C_1 = 1, C_2 = 0$ 即可, 也就是 $u(x) = x$ 爲一個候選人, 因此方程式 (4) 的一般解爲 $y = c_1\mathrm{e}^{rx} + c_2x\mathrm{e}^{rx}$。

將一開始得到的解 $y_1(x)$ 前面乘上函數倍 $u(x)$, 可以想成是對於 $y_1(x)$ 這個向量進行「擾動」, 和 $y_1(x)$ 平行的向量 (相當於乘上常數倍) 不是我們要的方向, 經過擾動之後可確實找到另一個向量與之線性獨立。至於這個方法稱爲降階法的原因在於對 $u(x)$ 而言滿足的微分方程式雖然也是二階, 但是低階項全部不見了, 這種低階項消失 (特別是零次微分項) 在這類微分方程中是普遍存在的現象, 所以若要解 $u(x)$ 的話, 只要令 $v(x) = u'(x)$, 那麼對於 $v(x)$ 而言所滿足的微分方程就降了一階, 故把這種找解的方法稱作降階法。

(c) 如果 $b^2 - 4ac < 0$, 那麼

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a} \quad \text{與} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\,i}{2a}$$

是兩個共軛複根。記 $\alpha = -\frac{b}{2a}$ 與 $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, 則兩共軛複根可表示爲 $r_1 = \alpha + \beta i$ 與 $r_2 = \alpha - \beta i$。然而 $y_1 = \mathrm{e}^{r_1x}$ 與 $y_2 = \mathrm{e}^{r_2x}$ 並非想要的解, 因爲他們是複數值的函數, 而我們希望得到的是實數值函數。這時候又該如何處理呢? 當中的想法是: 先把方程式的解放到複數的空間中, 然後適當地選取係數讓它變成實數函數。具體的作法如下: 因爲複數空間的特色是 代數封閉體 (algebraically closed field), 所以我們把解先看成如下形式:

$$y = C_1\mathrm{e}^{r_1x} + C_2\mathrm{e}^{r_2x},$$

這時 C_1 與 C_2 是複數。透過歐拉公式 (Euler's formula), 我們繼續改寫:

$$\begin{aligned} y &= C_1\mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x} + C_2\mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)x} \\ &= C_1\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x)) \\ &= (C_1 + C_2)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x。\end{aligned}$$

因爲我們希望得到的函數 y 是一個實數值函數, 也就是希望 $c_1 = C_1 + C_2$ 與 $c_2 = i(C_1 - C_2)$ 都是實數, 若 $C_1 = A_1 + B_1i, C_2 = A_2 + B_2i$, 只要 $A_1 = A_2, B_1 = -B_2$, 那麼 c_1 與 c_2 就是實數了。這麼一來, $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$ 是一般解。

從上面的分析, 就可以搭配初始值條件得到二階線性齊次常係數微分方程式的唯一解。

例 **1** (第 105 頁)**.** 試解初始值問題 $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$。

解**.**

例 **2** (第 127 頁)**.** 試解初始值問題 $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$。

解**.**

例 **3** (第 123 頁)**.** 試解微分方程 $y'' + 6y' + 10y = 0$。

解**.**

例 **4.** 試解初始值問題 $y'' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$。

解**.**

前面利用特徵方程式解二階線性齊次常係數微分方程的方法, 幾乎是所有微分方程教科書或課程中呈現的標準方式。而這一節的最後, 我想要針對微分方程 $ay''+by'+cy=0$ 做另一個詮釋。首先, 我們可以把微分方程式理解爲以下式子:

$$L_1[L_2[y]] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_2\right) y = 0,$$

其中 r_1 與 r_2 爲特徵方程的兩個根。這樣的看待方式是把 $L_1 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_1\right)$ 與 $L_2 = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_2\right)$ 視爲 微分算子 (differential operators)。所謂的微分算子, 是把「微分的操作」和「函數乘法」兩者混在一起看待, 比方說

$$L_2[y] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - r_2\right) y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - r_2 y$$

第一項與 y 的作用關係是微分, 而第二項與 y 的作用關係是函數相乘 (現在這個例子 r_2 數字, 看成常數函數)。

將微分方程看成許多微分算子的作用有一些好處, 這個概念相當於代數學中的「因式分解」, 把一些複雜的微分式整理成一個一個微分算子的作用, 然後一次處理一個微分算子, 各個擊破。

以現在這個例子來說, 首先令 $Y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + r_2\right) y$, 它是一個未知函數, 所以 $L_1[L_2[y]] = L_1[Y] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + r_1\right) Y = 0$, 先利用一階線性微分方程式的方法解出 Y, 再解 $L_2[y] = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + r_2\right) y = Y$。從這樣的觀點, 可以很容易地接受解空間會是二維的向量空間, 因爲每次處理一個微分算子, 就會得到一個積分常數, 它就是一個向量空間的自由度。

微分算子的用法當然不僅於此, 之後也會有一些例子說明微分算子的好處。

3.3 邊界值問題解不存在或不唯一的例子

分組討論下列問題, 並分享自己的看法。

例 **1.** 考慮邊界值問題: $y'' - 2y' + 2y = 0, y(a) = c, y(b) = d$。

(a) 如果邊界值條件有唯一解, 那麼 a 和 b 的關係爲何?

(b) 如果邊界值條件無解, 那麼 a, b, c, d 的關係爲何?

(c) 如果邊界值條件有無限多解, 那麼 a, b, c, d 的關係爲何?

3.4 二階線性非齊次常係數微分方程 (第 131 頁)

本單元將討論二階線性非齊次常係數微分方程的情形, 也就是考慮

$$ay'' + by' + cy = G(x), \tag{6}$$

其中 $a \neq 0, b, c$ 都是常數, 而 $G(x)$ 是連續函數。一開始也是先給出這類微分方程解空間的結構。

定理 1 (第 132 頁)**.** 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是微分方程 (6) 的解, 則 $Y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ 是微分方程 $ay'' + by' + cy = 0$ 的解。

證明: 直接計算可得

$$\begin{aligned} aY'' + bY' + cY &= a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) \\ &= (ay_1'' + by_1' + cy_1) - (ay_2'' + by_2' + cy_2) = G - G = 0\text{。} \end{aligned}$$

由此搭配前一節齊次微分方程的討論可得如下定理:

定理 2 (第 132 頁)**.** 假設 $y_p(x)$ 是微分方程 (6) 的一個解, 則微分方程 (6) 的一般解必可表示爲 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, 其中

(a) 若 $b^2 - 4ac > 0$, 則 $y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, 而 $r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

(b) 若 $b^2 - 4ac = 0$, 則 $y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$, 而 $r = \frac{-b}{2a}$。

(c) 若 $b^2 - 4ac < 0$, 則 $y_h(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$, 而 $\alpha = \frac{-b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$。

這個定理中我們用下標 $y_p(x)$ 記作方程式的 *特解* (particular solution), 而 $y_h(x)$ 記作方程式的 *齊次解* (homogeneous solution)。這個定理所要描述的仍然是解空間的結構, 將 $y_p(x)$ 視爲一個向量時, 那麼二階線性非齊次常係數微分方程式的解空間是一個不通過原點的二維平面, 它平行於齊次微分方程式解空間的平面 (該平面通過原點)。

介紹完理論之後, 接下來要問的問題是: 給定一個二階線性非齊次常係數微分方程式, 該如何尋求特解? 以下將介紹兩種找特解的方法, 一個是 *未定係數法* (the method of undetermined coefficients), 另一個稱爲 *參數變動法* (the method of variation of parameters)。

3.4.1 未定係數法(The Method of Undetermined Coefficients, 第 137 頁)

未定係數法是一種「猜答案」的方法, 能夠以猜答案的方法得到特解的理由基本上是來自於以下的觀察:

> 指數函數、多項式、正弦與餘弦函數 $(\sin mx, \cos mx)$ 還有這三類型函數的混合搭配, 在微分與加法、實數倍乘法的運算下自成代數封閉的系統。

因爲方程式的左邊是微分與實數倍的線性組合 (微分是線性算子), 所以只要方程式的非齊次項 $G(x)$ 是由這幾類函數進行組合的話, 我們就可以進行合理地猜測特解 $y_p(x)$。以下整理出未定係數法的猜特解方法:

(a) 若 $G(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 則猜特解的型式爲 $y_p(x) = x^j \sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i$。

(b) 若 $G(x) = e^{kx} \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 則猜特解的型式爲 $y_p(x) = x^j e^{kx} \sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i$。

(c) 若 $G(x) = e^{kx} \cos mx \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ 或 $G(x) = e^{kx} \sin mx \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 則猜特解的型式爲 $y_p(x) = x^j e^{kx} \left(\cos mx \sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i + \sin mx \sum\limits_{i=0}^{n} B_i x^i \right)$。

- 上述猜測特解中, A_i 與 B_i 是待定的實數。這當中都有 x^j 的出現, 在此加以解釋: 次數 j 是最小的非負整數 $j = 0$ 或 1 或 2, 使得這樣的特解表示中, 不會有任何一項是齊次方程式的解。

未定係數法的特色是將方程的問題轉換成代數問題 (解未知數); 而它的缺點是 $G(x)$ 只能是上述幾類的函數才能使用。

例 **3** (第 133 頁)**.** 試用未定係數法求解 $y'' - 3y' - 4y = 3\mathrm{e}^{2x} + 2\sin x$。

解**.**

例 **4** (第 136 頁)**.** 試用未定係數法解 $y'' - 3y' - 4y = 2\mathrm{e}^{-x}$。

解**.**

例 **5.** 試用未定係數法解 $y'' + y' - 2y = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$。

解**.**

3.4.2 參數變動法(The Method of Variation of Parameters, 第 140 頁)

在單元 3.2 我們已經介紹如何求得 $ay''+by'+cy=0$ 的一般解, 它會是兩個線性獨立的函數做線性組合:

$$y_h(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

對於非齊次微分方程 $ay''+by'+cy=G(x)$ 特解的找法, 現在要介紹的是參數變動法, 概念上仍然是把齊次解「進行擾動」, 進而得到非齊次方程的特解。

假設 $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$ 是微分方程式 $ay''+by'+cy=G(x)$ 的特解, 其中 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 是兩個待定的函數。先將 $y_p(x)$ 代入方程式之後, 看看待定函數必須滿足的條件。因爲

$$\begin{aligned}
c\cdot y_p &= (\qquad\qquad u_1y_1 \qquad\qquad + u_2y_2)\cdot c\\
b\cdot y_p' &= (\qquad u_1'y_1+u_1y_1' \qquad + u_2'y_2+u_2y_2')\cdot b\\
a\cdot y_p'' &= (u_1''y_1+2u_1'y_1'+u_1y_1''+u_2''y_2+2u_2'y_2'+u_2y_2'')\cdot a,
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
ay_p''+by_p'+cy_p &= a(u_1''y_1+2u_1'y_1'+u_2''y_2+2u_2'y_2')+b(u_1'y_1+u_2'y_2)\\
&= a(u_1''y_1+u_1'y_1'+u_2''y_2+u_2'y_2')+a(u_1'y_1'+u_2'y_2')+b(u_1'y_1+u_2'y_2)。
\end{aligned}$$

記 $u_1'y_1+u_2'y_2=F(x)$, 則 $u_1''y_1+u_1'y_1'+u_2''y_2+u_2'y_2'=F'(x)$。這麼一來, $ay_p''+by_p'+cy_p=G(x)$ 就可以改寫爲

$$\begin{cases} y_1u_1'+y_2u_2'=F(x)\\ y_1'u_1'+y_2'u_2'=\dfrac{G(x)-aF'(x)-bF(x)}{a}。\end{cases} \tag{7}$$

從 (9) 就可以解聯立將未知函數 u_1' 與 u_2' 解出來。

注意到, 函數 $F(x)$ 提供了一個找到特解的自由度, 我們可以選取特別的函數以大大地簡化計算並得到答案。比方說, 若設定 $F(x)\equiv 0$, 則方程組 (9) 變爲

$$\begin{cases} y_1u_1'+y_2u_2'=0\\ y_1'u_1'+y_2'u_2'=\dfrac{G(x)}{a},\end{cases} \tag{8}$$

此時 $u_1'(x)$ 與 $u_2'(x)$ 可解得

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{-\frac{G(x)}{a}y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)}\\
u_2'(x) &= \frac{\frac{G(x)}{a}y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)},
\end{aligned}$$

如此, 兩邊再對 x 積分之後就得到 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$。

各位有沒有注意到, 不論是 (9) 或者是 (10), 方程組能不能把 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 解出來的關鍵也是在於朗斯基行列式 $W[y_1, y_2](x)$ 是否爲零。而在二階線性齊次常係數微分方程式的三種情形下朗斯基行列式皆處處不爲零, 所以這個方法可行。

參數變動法的優點是它對於一般的函數 $G(x)$ 提供了特解的找法, 然而缺點是實際執行時, 計算量比較大, 困難度也比較高。

例 **6.** 試解微分方程 $y'' + 4y = 8\tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$。

解**.**

註. 這裡 $\tan x$ 與它的微分不好找到代數封閉的規則。

3.5 二階線性一般係數微分方程式(第 124 頁)

這一單元要介紹的是幾個二階線性一般係數的微分方程式, 而這裡觀察的重點應放在方程式求解的方法還有解空間的結構與之前幾個單元所討論的內容之間的關聯性。

3.5.1 柯西 – 歐拉方程式(第 124 頁)

所謂 *柯西 – 歐拉方程式* (Cauchy-Euler equation) 是型如以下的微分方程式:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\alpha x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\beta y=0,$$

其中 α,β 爲兩實數。這個方程式的特色是: 未知函數若微分 i 次, 前面就會乘上 x^i。

多數人在看到教科書在介紹柯西 – 歐拉方程式的時候, 都會看到昏頭轉向, 雖然按照課本每個式子的推導都能理解, 但是卻抓不到重點。實際上, 關於柯西 – 歐拉方程式, 我認爲最好的理解方式是想成微分算子的概念。考慮微分算子 $D=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 則 $D^2=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, 所以柯西 – 歐拉方程式可改寫爲

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\alpha x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\beta y=\left(x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\alpha x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\beta\right)y\\&=\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+(\alpha-1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\beta\right)y=\left(D^2+(\alpha-1)D+\beta\right)y\\&=D^2y+(\alpha-1)Dy+\beta y=0,\end{aligned}$$

因此柯西 – 歐拉方程可以視爲以 D 這個微分算子而言的二階線性齊次常係數微分方程。

另一方面, 關於二階線性齊次常係數微分方程式, 我們曾經利用特徵方程得到一般解。那時用到的特性是: 指數函數 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 是微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的 *特徵向量* (eigenvector), 其中 r 稱爲 *特徵值* (eigenvalue)。特徵函數或特徵向量的概念也是源自於線性代數的理論。而這裡要研究的是: 什麼函數是微分算子 $D=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特徵向量呢? 答案其實很簡單, 因爲 $\ln|x|$ 的微分是 $\frac{1}{x}$, 所以再乘上 x 之後就會變成 1, 所以只要把當初考慮的 x 全部替換成 $\ln|x|$ 即爲所求。換言之, 考慮 $y=\mathrm{e}^{r\ln|x|}$, 則 $Dy=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cdot\mathrm{e}^{r\ln|x|}\cdot r\cdot\frac{1}{x}=r\mathrm{e}^{r\ln|x|}$。而實際上 $y=\mathrm{e}^{r\ln|x|}=|x|^r$, 所以我們就可以列出所有柯西 – 歐拉方程式的一般解的結果:

定理 1 (第 213 頁)**.** *關於柯西 – 歐拉方程式 $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$, 相應的特徵方程式爲 $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$,*

(a) *若特徵方程式有兩相異實根, 記爲 r_1 與 r_2, 則 $y(x)=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}$。*

(b) *若特徵方程式有兩重根, 記爲 r, 則 $y(x)=c_1|x|^r+c_2\ln|x|\cdot|x|^r$。*

(c) *若特徵方程式有兩共軛複根, 記爲 $\lambda\pm\mu i$, 則*

$$y(x)=|x|^\lambda\left(c_1\cos(\mu\ln|x|)+c_2\sin(\mu\ln|x|)\right)。$$

3.5.2 用降階法找到另一個線性獨立的解(第 129 頁)

如 3.2 所述, 降階法可適用於一般的二階線性齊次微分方程式, 只要知道方程式的一個解, 就可以透過降階法找到另一個線性獨立的解。

假設 $y_1(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 $P(x)y''(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y(x)=0$ 的解。考慮函數 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$, 其中 $u(x)$ 是一個待定的函數, 並且希望它不是常數函數, 這樣 $y_2(x)$ 才會與 $y_1(x)$ 線性獨立。那麼

$$\begin{aligned}
R(x)\cdot y_2(x) &= u(x)y_1(x)R(x)\\
Q(x)\cdot y_2'(x) &= (u'(x)y_1(x)+u(x)y_1'(x))Q(x)\\
P(x)\cdot y_2''(x) &= (u''(x)y_1(x)+2u'(x)y_1'(x)+u(x)y_1''(x))P(x),
\end{aligned}$$

因爲 $P(x)y_1''(x)+Q(x)y_1'(x)+R(x)y_1(x)=0$, 所以

$$\begin{aligned}
&P(x)y_2''(x)+Q(x)y_2'(x)+R(x)y_2(x)\\
=&P(x)y_1(x)u''(x)+(2P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x))u'(x)=0,
\end{aligned}$$

因此 $u(x)$ 必須滿足以上二階微分方程式。雖然這個二階微分方程式並不是常係數, 但是方程式中並沒有 $u(x)$ 項, 只要令 $v(x)=u'(x)$, 則 $v'(x)=u''(x)$, 而方程式就可改寫成

$$P(x)y_1(x)v'(x)+(2P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x))v(x)=0,$$

對 $v(x)$ 而言, 它滿足一階線性微分方程式 (也可以看成是分離變數微分方程式), 所以可以將 $v(x)$ 解出來, 然後再將 $v(x)$ 對 x 積分後, 選取不是常數項的部分即爲 $u(x)$。

例 **2** (第 131 頁)**.** 試解微分方程 $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0, x>0$。

解.

3.5.3 用參數變動法找一般解(第 143 頁)

在單元 3.4.2 介紹的參數變動法也適用於二階線性一般係數的微分方程式, 只要知道兩個互爲線性獨立的齊次解, 就可以找到非齊次方程的特解, 所以二階線性非齊次方程式的一般解都可以解出。以下再重現一次參數變動法的概念: 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是微分方程式 $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$ 的解, 並且彼此線性獨立, 若想要得到非齊次微分方程 $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = G(x)$ 的特解, 考慮函數 $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, 其中 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 是兩個待定的函數, 並且都不是常數函數。先將 $y_p(x)$ 代入方程式之後, 看看待定函數必須滿足的條件。以下計算略去對 x 爲變數的括號, 所有量都和 x 有關。因爲

$$\begin{aligned}
R \cdot y_p &= (\qquad\qquad\qquad u_1y_1 \qquad\qquad\qquad + u_2y_2) \cdot R \\
Q \cdot y_p' &= (\qquad u_1'y_1 + u_1y_1' \qquad\qquad + u_2'y_2 + u_2y_2') \cdot Q \\
P \cdot y_p'' &= (u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2'') \cdot P,
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
Py_p'' + Qy_p' + Ry_p &= P(u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2') + Q(u_1'y_1 + u_2'y_2) \\
&= P(u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_2''y_2 + u_2'y_2') + P(u_1'y_1' + u_2'y_2') + Q(u_1'y_1 + u_2'y_2)。
\end{aligned}$$

記 $u_1'y_1 + u_2'y_2 = F(x)$, 則 $u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_2''y_2 + u_2'y_2' = F'(x)$。這麼一來, $Py_p'' + Qy_p' + Ry_p = G(x)$ 就可以改寫爲

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = F(x) \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = \dfrac{G(x) - P(x)F'(x) - Q(x)F(x)}{P(x)}。 \end{cases} \tag{9}$$

由 (9) 就可以解聯立方程將未知函數 u_1' 與 u_2' 解出來。

注意到, 函數 $F(x)$ 提供了一個找到特解的自由度, 我們可以選取特別的函數以簡化計算並得到答案。比方說, 若設定 $F(x) \equiv 0$, 則方程組 (9) 變爲

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = 0 \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = \dfrac{G(x)}{P(x)}, \end{cases} \tag{10}$$

此時 $u_1'(x)$ 與 $u_2'(x)$ 可解得

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= -\frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = -\frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} \\
u_2'(x) &= \frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)},
\end{aligned}$$

如此, 兩邊再對 x 積分之後選取非常數項的部分就得到 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$。

各位若將上一頁的討論與單元 3.4.2 介紹的參數變動法的討論相互對照, 就會發現討論的過程幾乎一模一樣, 只要把 $a, b, c, G(x)$ 分別改成 $P(x), Q(x), R(x), G(x)$ 即可, 所以得知這樣的討論與二階微分方程是否爲常係數無關。

例 **3** (第 144 頁)**.** 試解微分方程 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 6x^3, x > 0$。

解**.**

3.6 線性微分方程式的應用(第 **145** 頁)

前面幾個單元主要是探討二階線性微分方程式的數學理論, 像是初始值問題解的存在唯一性、解空間的結構、幾個如何求解的技巧。歷史上, 討論二階線性微分方程式的用意是在幫助我們了解一些物理的現象, 比方說回想牛頓第二運動定律的 $F = ma$, 若把加速度 a 理解爲位置向量對時間的二次導函數, 也就是 $s''(t) = a(t)$, 而 $F(t)$ 看成是 t 時刻施予質量爲 m 的物體的力時, 那麼牛頓第二運動定律的公式就可以看成是 $ms''(t) = F(t)$, 這就是一個對 $s(t)$ 而言的二階線性常係數非齊次微分方程式。

由上述觀點, 大家可以做進一步聯想, 當一個物體在某個系統中, 若想要討論施力與物體位置之間的關係時, 那麼位置函數與力量之間應該會滿足一個二階的非齊次微分方程式, 至於這個微分方程是不是線性, 甚至是不是常係數, 那就要看這個系統的複雜程度, 透過實驗的方式研究系統中的每個物件的關係進行適當地假設, 至少確定當你做了一些假設時, 誤差量是一個可以接受的範圍。

以下將介紹兩個模型, 它們可以和二階微分方程式的初始值問題結合, 從而用方程式的解來解釋現狀或預測未來。

3.6.1 彈簧振動 (Vibrating Springs, 第 145 頁)

考慮一個質量爲 m 的物體, 裝置在原始長度爲 l 的彈簧的一端, 並垂直懸掛如圖 1 所示。

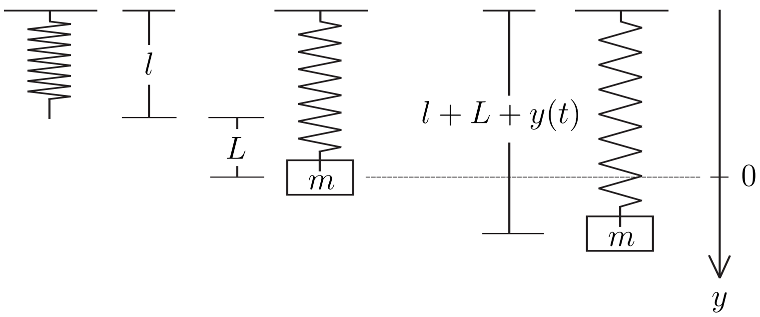

圖 1: 彈簧運動。

我們先觀察這個系統在靜止狀態下的力學。假設彈簧因爲懸掛物體的關係使得彈簧伸長了 L, 這裡不妨設定坐標系 y 軸使得指向下方爲正向, 則物體一方面受到方向向下的 *重力* (gravitational force), 力量大小爲 mg; 另一方面, 物體也受到彈簧力 F_s 的影響, 根據 *虎克定律* (Hooke's law), 只要彈簧的伸長或收縮量很小 (至少在不造成彈簧永久變形的情形下), 會有 $F_s = -kL$, 其中 $k > 0$ 爲常數, 稱爲 *彈性係數* (spring constant)。注意到這個式子的負號代表彈簧力是一個抵抗彈簧變形的力, 故方向相反。由靜力平衡得知:

$$mg - kL = 0。$$

換言之, 對於一個彈簧, 透過懸掛質量爲 m 的物體與彈簧的伸長量 L 可推得彈性係數 k。

再來我們討論彈簧的動態力學。首先設定在靜力平衡的時候, 時間爲 $t = 0$, 此時物體的質心位置爲 $y(0) = 0$。所以 $y(t)$ 表示物體在時刻 t 下對於坐標中心的位移。根據牛頓第二運動定律,

$$my''(t) = f(t),$$

其中 $f(t)$ 代表時刻 t 下作用於物體的合力。這時, 合力有以下幾種可能的力組合而成:

(A) 物體受到重力 $F_g = mg$ 的影響, 方向向下。

(B) 彈簧力 $F_s = -k(L + y(t))$, 因爲在物體在 $y(t)$ 的狀態下, 總共伸長了 $L + y(t)$。

(C) 阻力 F_d。在實際系統中, 存在著某種影響振動的阻力, 而這種阻力會不斷地消耗能量, 使振幅減小。在振動過程中的阻力都常稱爲 *阻尼* (damping)。阻尼的方向總是與物體運動的方向相反, 大小與物體的速度成正比。所以寫下來會是 $F_d = -\gamma y'(t)$。

(D) 其他外在的力, 以 $F(t)$ 表示。

所以將上述四種力的效應結合, 並代入方程式得到

$$\begin{aligned} my''(t) &= F_g + F_s + F_d + F(t) = mg - k(L + y(t)) - \gamma y'(t) + F(t) \\ &= -ky(t) - \gamma y'(t) + F(t); \end{aligned}$$

也就是說,

$$my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F(t),$$

其中 m, γ, k 都是正的常數。這是二階線性非齊次常係數微分方程式, 所以只要給定初始條件 $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ 就可以了解在彈簧振動系統中物體在時刻 t 的所在位置 $y(t)$。

現在我們繼續針對這些常數的大小細分幾種情形:

(a) 假設阻力忽略不計, 並且不受其他外力 (undamped free vibration), 則方程式為

$$my''(t) + ky(t) = 0,$$

其特徵方程式 $mr^2 + k = 0$, 而特徵方程式的根為 $r = \pm\omega_0 i$, 其中 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, 所以方程式的一般解為

$$y(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) = R\cos(\omega_0 t - \delta),$$

其中 ω_0 稱為 頻率 (frequency), $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ 稱為 振幅 (amplitude), δ 稱為 相角 (phase angle), 而相角滿足 $\cos\delta = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ 與 $\sin\delta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$。

這是彈簧振動最簡單的型式, 稱為 簡諧運動 (simple harmonic motion), 此時簡諧運動的 周期 (period) 為 $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。

關於簡諧運動, 時間 t 對於位置的函數 $y(t)$ 的圖形如圖 2 所示:

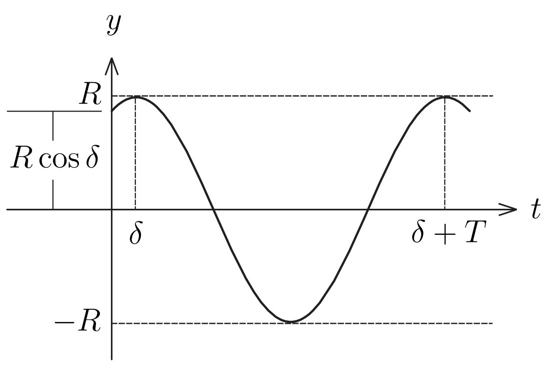

圖 2: 簡諧運動 $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$。

(b) 假設沒有其他外力, 而將阻力納入考慮時 (damped free vibration), 則方程式爲

$$my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = 0,$$

其特徵方程爲 $mr^2 + \gamma r + k = 0$, 而特徵方程的根爲

$$r_{\pm} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m},$$

根據 $\gamma^2 - 4mk$ 的大小, 又分成三種情形:

(b1) 若 $\gamma^2 - 4mk > 0$, 則 $y(t) = c_1 e^{r_+ t} + c_2 e^{r_- t}$, 這個情況稱爲 過阻尼 (overdamping)。因爲 γ, k, m 都是正數, 所以 $r_{\pm} < 0$, 因此當 $t \to \infty$ 時, $e^{r_+ t} \to 0$ 且 $e^{r_- t} \to 0$。因爲阻力過大, 所以這樣的彈簧振動最多只會造成一次的振盪。如圖 3 所示。

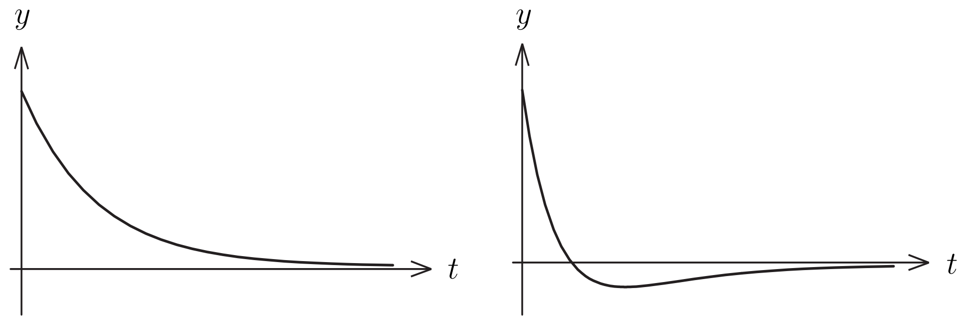

圖 3: 過阻尼的彈簧振動。左: $y(t) = e^{-t}$; 右: $y(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t}$。

(b2) 若 $\gamma^2 - 4mk = 0$, 則 $y(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2m}t}$。這個情形稱爲 臨界阻尼 (critical damping)。因爲當 $t \to \infty$ 時, $te^{-\frac{\gamma}{2m}t} \to 0$ 且 $te^{-\frac{\gamma}{2m}t} \to 0$, 所以在臨界阻尼的情形下, 彈簧振動最多只會造成一次的振盪。如圖 4 所示, 左圖呈現的函數是 $y(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} + 2te^{-\frac{t}{2}}$; 而右圖呈現的函數是 $y(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - \frac{3}{2}te^{-\frac{t}{2}}$。

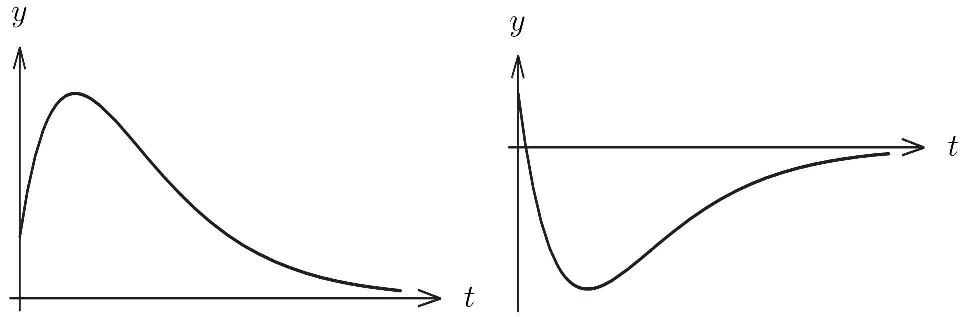

圖 4: 臨界阻尼的彈簧振動。

(b3) 若 $\gamma^2-4mk<0$, 則

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1\cos(\mu t)+c_2\sin(\mu t))=R\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\mu t-\delta),$$

其中 $R=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\mu=\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}$, δ 滿足 $\cos\delta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ 與 $\sin\delta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$。這個情形稱爲 低阻尼 (underdamping)。此時彈簧的振盪始終介於 $\pm R\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}$ 之間, 並且不斷地振盪。在圖 5 中, 黑色虛線滿足 $y''+y=0, y(0)=2, y'(0)=0$; 紅色實線滿足 $y''+\frac{1}{8}y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=0$。藍色的虛線是 $y(t)=\pm 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}t}$。

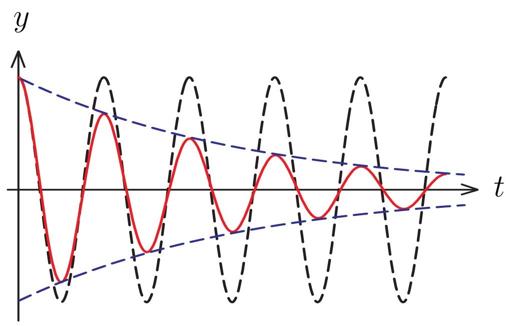

圖 5: 低阻尼的彈簧振動。

(c) 若在彈簧的裝置上施予 周期的外力 (periodic external force) $F_0\cos\omega t, \omega>0$, 而阻力忽略不計的情況下, 則方程式爲

$$my''(t)+ky(t)=F_0\cos\omega t。$$

由 (a) 的情況得知齊次解爲 $y_h(t)=c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\sin(\omega_0 t)$。
如果 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\neq\omega$, 則方程式的一般解爲

$$y(t)=c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\sin(\omega_0 t)+\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t)。\tag{11}$$

如果物體在 $t=0$ 時設定成 $y(0)=0, y'(0)=0$, 那麼 $c_1=-\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}, c_2=0$, 利用和差化積公式, 可將 (11) 式改寫爲

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t) \\ &= \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

如果 $|\omega_0-\omega|$ 很小, 則 $\omega_0+\omega$ 相對於 $|\omega_0-\omega|$ 而言很大, 因此 $\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}$ 相對於 $\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$ 而言是快速振盪的函數。

例如考慮 $y''+y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4}{5}t\right), y(0)=0, y'(0)=0$, 這時 $m=1, k=1, \omega_0=1, \omega=\frac{4}{5}, F_0=\frac{1}{2}$, 所以 $y(t)=\left[\frac{25}{9}\sin(\frac{1}{10}t)\right]\sin(\frac{9}{10}t)$, 畫出來的函數圖形如圖 6。

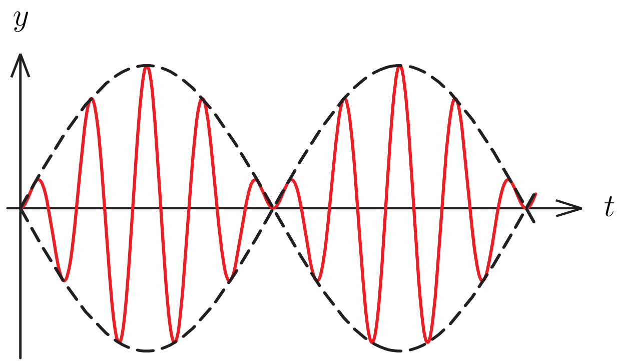

圖 6: 微分方程 $y''+y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{4}{5}t\right), y(0)=0, y'(0)=0$ 的解。

注意到式子 (12) 當中, 故意用中括號把前兩項框起來, 這是有用意的, 它將刻畫出如圖 6 當中的虛線。而紅色的實線是方程式的解, 他會被框在虛線當中。這個現象稱爲 拍頻現象 (beat)。

如果 $\omega_0=\omega$, 則方程式的一般解爲

$$y(t)=c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\sin(\omega_0 t)+\frac{F_0}{2m\omega_0}t\sin(\omega_0 t)。$$

例如考慮 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$, 此時 $m = 1, k = 1, \omega = 1, \omega_0 = 1, F_0 = \frac{1}{2}$, 所以 $y(t) = \frac{1}{4} t \sin t$。如圖 7 的紅色實線所示, 而虛線代表的是 $y(t) = \frac{1}{4}t$。

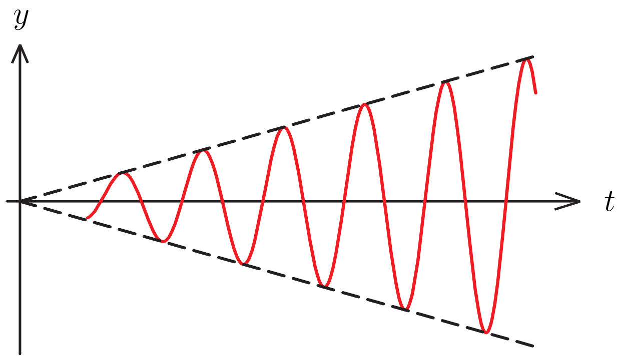

圖 7: 微分方程 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的解。

觀察特解的型式爲 $\frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$, 得知當 $t \to \infty$ 時, $y(t) \to \infty$, 所以在圖形上會看到曲線的振盪幅度會愈來愈大, 這個現象稱爲 共振 (resonance)。

(d) 當彈簧受到周期的外力 $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 與阻力 (forced vibration with damping) 影響時, 微分方程式爲 $my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F_0 \cos \omega t$, 其一般解爲

$$y(t) = y_h(t) + \frac{F_0}{\Delta}\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)m}{\Delta}\cos(\omega t) + \frac{\omega\gamma}{\Delta}\sin(\omega t)\right) = y_h(t) + R\cos(\omega t - \delta),$$

其中 $y_h(t)$ 是齊次方程式 $my''(t)+\gamma y'(t)+ky(t) = 0$ 的一般解, 如 (b) 的討論, 有三種可能; 而 $R = \frac{F_0}{\Delta}, \cos\delta = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)m}{\Delta}, \sin\delta = \frac{\omega\gamma}{\Delta}, \Delta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 m^2 + \omega^2\gamma^2}$。

以下示意幾個不同外力下的解會的現象; 黑色虛線是外力, 紅色實線是方程式的解。

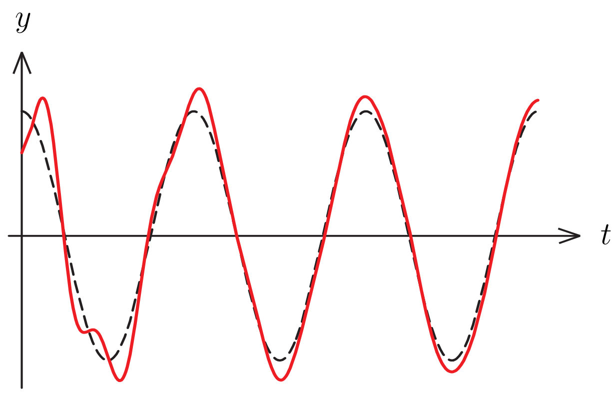

圖 8: 微分方程 $y'' + \frac{1}{8}y' + y = 3\cos(\frac{3}{10}t), y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解。

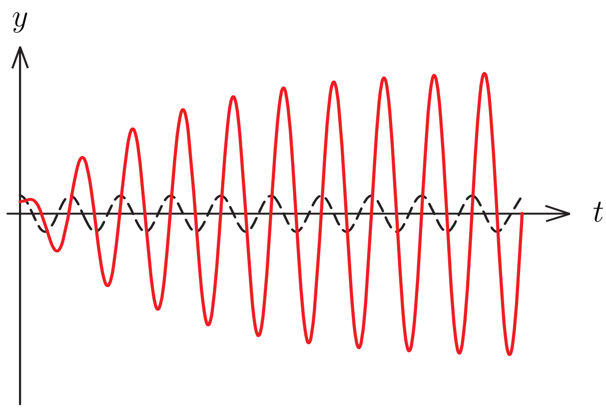

圖 9: 微分方程 $y'' + \frac{1}{8}y' + y = 3\cos t, y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解。

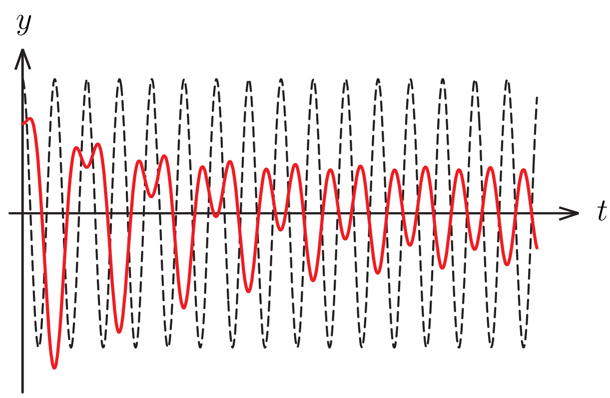

圖 10: 微分方程 $y'' + \frac{1}{8}y' + y = 3\cos(2t), y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解。

3.6.2 電子電路 (Electric Circuits, 第 154 頁)

一個最簡單的電子電路是由以下幾個元件組成:

(a) 電動勢 (electromotive force), 它代表電池或電源供應器等裝置。

(b) 電阻 (resistor), 以 R 表示, 單位是 歐姆 (ohms), 簡記爲 (Ω)。

(c) 電感 或 誘導器 (inductor), 以 L 表示, 單位是 亨利 (henries), 簡記爲 (H)。

(d) 電容器 (capacitor), 以 C 表示, 單位是 法拉 (farads), 簡記爲 (F)。

而我們想觀察一個 串聯 (series connected) 的電子電路中時刻 t 中的某個截面的三個量:

(A) 電壓 (voltage), 以 $E(t)$ 表示, 單位是 伏特 (volts), 簡記爲 (V)。電壓的產生來自於電動勢的供應。

(B) 電流 (current), 以 $I(t)$ 表示, 單位是 安培 (amperes), 簡記爲 (A)。

(C) 電荷 (charge), 以 $Q(t)$ 表示, 單位是 庫侖 (coulombs), 簡記爲 (C)。

圖 11 示意兩種電子電路裝置。左圖有電動勢、電阻與電感 — 稱爲 RL 電路; 右圖除了動勢、電阻與電感外, 另外加裝了電容 — 稱爲 RLC 電路。

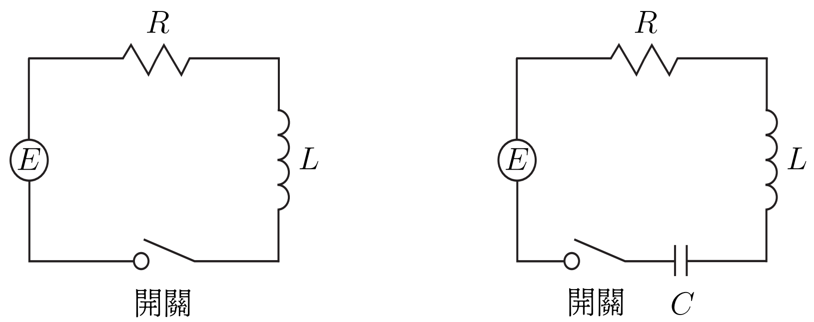

圖 11: 串聯的 RL 電路與 RLC 電路。

根據 歐姆定律 (Ohm's Law), 我們知道各裝置造成電壓下降的關係:

(a) 電阻造成電壓下降的量與電流成正比, 也就是 RI。

(b) 電容是電荷與電壓的比值, 所以 $C = \frac{Q}{V}$, 所以電容造成電壓下降的量是 $\frac{Q}{C}$。

(c) 電感造成電壓下降的量與電流的變化成正比, 也就是 $L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$。

而電壓、電流與電荷之間的關係是由 克希荷夫定律 (Kirchhoff's Law) 聯繫:

> 在一個封閉的電路中, 所有元件兩端的電位差 (電壓) 的代數和等於零。

所以對於 RL 電路, 我們可以寫出以下微分方程式:

$$L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI(t)=E(t),$$

這是對電流函數而言的一階線性非齊次常係數微分方程式。

例 **1.** 一個串聯的 RL 電路, 其電阻 $R=12\,\Omega$, 電感 $4\,\mathrm{H}$。若接上 $E(t)=60\sin 30t\,\mathrm{V}$ 的電動勢, 其中 $t\geq 0$, 並假設在 $t=0$ 時, 開關未打開, 試求電流 $I(t)$。

解**.**

再來我們考慮 RLC 電路, 根據克希荷夫定律, 因爲 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, 所以

$$L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI(t)+\frac{Q(t)}{C}=E(t)\Rightarrow L\,\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t)。\tag{13}$$

它是一個對電荷函數而言的二階線性非齊次常係數微分方程式, 若觀察到在 $t=t_0$ 時刻的電荷量 $Q(t_0)=Q_0$ 與電流量 $I(t_0)=I_0$, 則可知道在 $t>t_0$ 的電荷與電流。

這裡做一個註記: 若將方程式 (13) 兩邊對 t 微分, 可以得到對電流函數 $I(t)$ 而言的二階線性非齊次常係數微分方程式:

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2}+R\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}I(t)=E'(t)。$$

例 **2.** 一個串聯的 RLC 電路, 其電阻 $R = 2\,\Omega$, 電感 $L = 1\,\mathrm{H}$, 電容 $C = 0.25\,\mathrm{F}$, 電壓 $E(t) = 50\sin t\,\mathrm{V}$, 試求電荷 $Q(t)$。

解.

上面的電子電路模型所得到的微分方程式的解, 可以充份地模擬「當電源供應穩定」的情形下電荷或電流對於時間的關係。而到目前爲止所討論的微分方程式, 不論是方程式的每一項係數或是非齊次項的函數, 都必須要求在一點附近的區間上都要是連續函數, 這樣微分方程式的解還有理論才得以呈現。但是在現實生活中, 我們會遇到一些「特殊情況」, 例如突然停電一秒之後又復電這樣供電不穩定的情形下, 這時要如何利用微分方程式的解來解釋或是估計在停電前後幾秒當中的電荷還有電流呢? 要研究這樣的問題理由很簡單, 比方說手機在充電的時候, 這樣不正常的供電有沒有可能導致手機壞掉? 對於研發手機的工程師來說, 有什麼方法或機制可以防止因供電問題導致手機故障? 換言之, 當非齊次項的函數不再是連續函數時, 該如何了解微分方程式的解呢? 在下一章我們想要試圖回答這類的問題。