微分方程 (Differential Equations)

李國瑋

1 介紹

1.1 微分方程式的類型(第 19 頁)

常微分方程式 (ordinary differential equation, 簡記爲 ODE) 是由變數 x、未知函數 $y = f(x)$ 以及未知函數的導函數 $y^{(n)}(x) = f^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}$ 之間帶有等式關係的一個數學式。常微分方程式形式化的寫法就如以下的隱函數表達:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0。\tag{1}$$

爲了說明微分方程式的類型, 我們會用以下幾組術語區分並形容方程式的特性。

- 將未知函數 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 都視爲變數時, 若函數 F 是線性函數, 則稱方程式 (1) 是 *線性* (linear) 微分方程; 若函數 F 對於 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 而言不是線性函數, 則稱方程式 (1) 是 *非線性* (nonlinear) 微分方程。

- 方程式 (1) 中未知函數 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 的最高微分次數 n 稱爲方程式的 *階* (order)。所以一階微分方程型如 $F(x, y, y') = 0$, 而二階微分方程型如 $F(x, y, y', y'') = 0$。

除了上述的兩種類型之外, 我們還會研究不同於方程式 (1) 的微分方程, 例如:

- 當未知函數的種類超過一種時, 例如未知函數有 $x(t)$ 與 $y(t)$ 及其高次導函數, 這時候探討微分方程時需要超過一個方程式才能進行分析, 將這些方程式聯立起來稱爲 *微分方程組* (system)。

- 若是研究多變數的未知函數例如 $u(x, y)$ 與其偏導函數 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 甚至更高次的偏導函數之間帶有等式關係的數學式, 我們稱之爲 *偏微分方程式* (partial differential equation, 簡記爲 PDE)。

了解微分方程式的類型, 用意在於通常每一類型的方程式會對應於一套處理方程的方式, 不論是方程式的求解, 或是方程式的定性與定量分析, 會與微分方程式的類型有關。而我們會先從一階常微分方程開始討論起, 再談二階常微分方程, 之後會處理微分方程組, 最後才研究偏微分方程式。

例 **1.** 試說明以下微分方程式的類型:

(a) $y' + 3y = 0$ ____________________________________

(b) $y'' + 3yy' = 3x$ ____________________________________

(c) $y^{(4)} + 3y = \mathrm{e}^x + \sin x$ ____________________________________

(d) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - y(t) \end{cases}$ ____________________________________

(e) $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ____________________________________

若函數 $y = f(x)$ 滿足微分方程式 (1), 則稱 $y = f(x)$ 是常微分方程式的 解(solution)。我們“會解”的微分方程式 (找到明確的函數 $y = f(x)$ 滿足微分方程式) 其實少之又少, 這是因爲積分技巧受限, 有太多函數的積分是「積不出來」的 (反導函數存在, 可是無法表示成初等函數)。於是各位在未來如果要用到微分方程式去處理實際的問題時, 我們會利用其他非人工計算求解的方式去理解它, 比方說藉助電腦做數值計算, 畫出方向場或解曲線, 或是其他的定性分析方式去了解欲研究的微分方程式。

對於微分方程的初學者, 透過幾類特殊的微分方程式, 以及人工求解的方式, 先感受微分方程式與相應的解的關係, 這是一個學習的開端。特別是一些很基本的微分方程, 常常帶有深刻地意義。

以下章節將從一階微分方程式開始討論, 以數學的技術層面出發, 先討論如何人工求解, 之後再搭配幾個有意義的數學模型討論微分方程式解的行爲與性質。

2 一階微分方程

2.1 分離變數微分方程式 (Separable Equations, 第 42 頁)

當一階微分方程式表示成以下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y), \tag{2}$$

時, 我們稱 (2) 式爲 分離變數微分方程式 (separable equations)。也就是說, 等式左邊只有 $y'(x)$, 而等式右邊可以分解成函數 $p(x)$ 與 $q(y)$ 的乘積。分離變數的微分方程式的解法如下: 當 $q(y) \neq 0$ 的時候, 則 (2) 式可改寫爲

$$\frac{1}{q(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x) \Rightarrow \int \frac{1}{q(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int p(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = \int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

最後一式是透過變數變換關係 $y = y(x) \Rightarrow \mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ 而得。當我們寫到最後一式時, 因爲等式左邊只與 y 有關, 而等式右邊只與 x 有關, 於是分離變數的特性就完全顯現出來。假設 $Q(y)$ 是 $\frac{1}{q(y)}$ 的反導函數, $P(x)$ 是 $p(x)$ 的反導函數, 則分離變數的微分方程式的解就可以用隱函數的型式表達:

$$Q(y) = P(x) + C \Leftrightarrow Q(y) - P(x) = C,$$

其中 C 是積分常數, 它可以是任意實數。於是實際上我們會得到一族以 C 爲參數的函數, 每給一個 C, 對應到的函數滿足微分方程式 (2), 而任兩個解之間相差一個常數。

在研究微分方程式的時候, 我們常常會考慮 *初始值問題* (initial value problem), 例如給予微分方程式外加一個如 $y(x_0) = y_0$ 的條件, 像在分離變數微分方程的情況下, 如果 $p(x)$ 與 $q(y)$ 都是連續函數時, 在包含 x_0 的一個連通分支上, 常數 C 可以唯一決定。

這裡要註記一件事, 關於分離變數型的微分方程, 有的時候我們會將它寫成 *微分型式* (differential form) 的樣子; 例如從 (2) 出發, 則可改寫爲:

$$\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{或是} \quad p(x)\,\mathrm{d}x + \tilde{q}(y)\,\mathrm{d}y = 0,\ \text{其中}\ \tilde{q}(y) = -\frac{1}{q(y)}。$$

例 **1** (第 43 頁). 試解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{1-y^2}。$$

解.

例 **2.** 試解初始值問題 $yy' = xy^2 + y^2 + x + 1$, $y(0) = -1$。

解.

2.2 齊次微分方程式 (Homogeneous Equations, 第 49 頁)

若一階微分方程可以整理成以下形式時稱爲 *齊次微分方程式* (homogeneous equation):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right)。$$

例如:

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2+xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x}$。

(b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = -\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$。

解齊次微分方程式的方法是先令 $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, 則所有的齊次微分方程都可以改寫成對於未知函數 $v(x)$ 的一階分離變數微分方程式。這是因爲 $y(x) = v(x)x$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}x + v \Rightarrow F(v) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}x + v \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}(F(v) - v) = p(x)q(v),$$

其中 $p(x) = \frac{1}{x}, q(v) = F(v) - v$。

註. 關於「齊次」(homogeneous) 這個用字在眾多場合中經常被借用, 所以理解「齊次」這個詞時應以前後文判讀其概念。例如: 在下一章將介紹二階齊次微分方程式, 那時候的「齊次」與現在所討論的齊次不同。

例 **1** (第 50 頁)**.** 試解微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y - 4x}{x - y}。$$

解.

給定兩組分別以 s 與 t 爲參數的平面曲線 $\{C_s\}$ 與 $\{\tilde{C}_t\}$,。若任取 $\{C_s\}$ 與 $\{\tilde{C}_t\}$ 中的曲線, 它們在相交處互相垂直, 也就是在相交的地方曲線各自的切線互相垂直, 則稱兩組曲線互爲 *正交軌線* (orthogonal trajectory)。

給定一組平面曲線, 若要找到它的正交軌線, 將會對應於求解一個齊次微分方程式。

例 **2.** 驗證曲線族 $\{C_r : x^2 + y^2 = r^2, r > 0\}$ 與 $\{\tilde{C}_m : y = mx, m \in (-\infty, \infty]\}$ 互爲正交軌線, 此時 $\tilde{C}_{m=\infty}$ 代表的是直線 $x = 0$。

解**.**

例 **3.** 試求曲線族 $\{C_a : x^2 + y^2 = ax, a > 0\}$ 的正交軌線。

2.3 線性微分方程 (Linear Equations, 第 31 頁)

若一階微分方程式可以表示成以下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y(x) = Q(x) \tag{3}$$

時, 則稱 (3) 式爲 *線性微分方程式* (linear equation)。

線性微分方程式的求解法如下: 我們希望將方程式的左邊湊成某個函數的導函數, 這麼一來, 就可以透過微積分基本定理, 對方程式兩邊積分後就可將微分去除。

爲了實現上述想法, 我們考慮將微分方程的兩邊同乘一個待定的函數 $I(x)$, 這個函數我們稱它爲 *積分因子* (integrating factor), 所以

$$I(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + I(x)P(x)y(x) = I(x)Q(x),$$

<u>如果 $I(x)P(x) = I'(x)$</u>, 那麼微分方程式就可以改寫成

$$I(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}y(x) = I(x)Q(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(I(x)y(x)) = I(x)Q(x),$$

兩邊同時對變數 x 積分之後, 就有

$$I(x)y(x) = \int I(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + C \Rightarrow y(x) = \frac{\int I(x)Q(x)\,\mathrm{d}x + C}{I(x)},$$

其中 C 是積分常數。而最後一式就是線性微分方程式 (3) 的解。

上面討論, 我們假設了積分因子滿足 $I(x)P(x) = I'(x)$, 現在我們要追問的是: 是否真的有這種函數 $I(x)$? 而這個關係式實際上是一個分離變數的微分方程式, 所以就用前一節介紹的方式求解:

$$\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = I(x)P(x) \Rightarrow \frac{1}{I(x)}\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x} = P(x) \Rightarrow \int \frac{1}{I(x)}\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int P(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{I(x)}\,\mathrm{d}I(x) = \int P(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|I(x)| = \int P(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow |I(x)| = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}。$$

因爲我們尋找 $I(x)$ 的目的是「只要<u>找到一個函數</u>使得方程式乘上此函數後, 左邊能表示成某個函數的導函數」, 所以雖然上述的方程式找到一組函數, 但我們只要從中取一個特別的積分因子例如 $I(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ 即可。

值得注意的是, 上述討論是建立在 (3) 式中「$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前面的係數是 1 時」才有的結論, 若線性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前的係數不是 1 時, <u>可以先將係數除掉</u>, 再做剛才的論述找到積分因子。

<u>結論</u>: 解線性微分方程式的方法是同乘積分因子 <u>$I(x) = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$</u>。

例 **1** (第 33 頁). 試解初始值問題 $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}$。

解.

例 **2** (第 77 頁). 伯努力方程 (Bernoulli's equation) 是如下的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n, \quad \text{其中} \quad n \in \mathbb{R}。$$

- <u>若 $n = 0$</u>, 則方程式爲一階線性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$。
- <u>若 $n = 1$</u>, 則方程式爲 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (p(x) - q(x))y = 0$, 這也是一階線性微分方程。
- <u>若 $n \neq 0, 1$</u>, 試透過變數變換 $v(x) = y^{1-n}(x)$, 則可以將伯努力方程改寫成對於未知函數 $v(x)$ 而言的一階線性微分方程。

(a) 試對於 $n \neq 0, 1$ 的情況將伯努力方程改寫成一階線性微分方程。

(b) 試解初始值問題 $y' - 2y = \mathrm{e}^{-3x}y^{-2}, y(0) = 2$。

解.

現在要重新討論一階線性微分方程, 當 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前面的係數不是 1 的時候, 該如何解微分方程。爲了和一開始討論的微分方程式 (3) 做比較, 我們考慮方程式的型式爲

$$n(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y(x)=q(x)。\tag{4}$$

和 (3) 對照, 則有 $P(x)=\frac{p(x)}{n(x)}$ 與 $Q(x)=\frac{q(x)}{n(x)}$。首先對於 (4) 乘上積分因子 $i(x)$ 得到

$$i(x)n(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+i(x)p(x)y(x)=i(x)q(x),$$

如果 $\underline{(i(x)n(x))'=i(x)p(x)}$, 則上述上方可以改寫爲 $(i(x)n(x)y(x))'=i(x)q(x)$, 這麼一來就有

$$i(x)n(x)y(x)=\int i(x)q(x)\,\mathrm{d}x+C\Rightarrow y(x)=\frac{\int i(x)q(x)\,\mathrm{d}x+C}{i(x)n(x)}。$$

再來要確實地找到一個積分因子 $i(x)$:

$$\begin{aligned}(i(x)n(x))'=i(x)p(x)&\Rightarrow i'(x)n(x)+i(x)n'(x)=i(x)p(x)\\ \Rightarrow i'(x)n(x)=i(x)(p(x)-n'(x))&\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(i(x))=\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)},\end{aligned}$$

於是可選擇的積分因子爲

$$i(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x}。$$

最後我們要驗證的是這個作法與先將方程式對於 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的係數調整成 1 之後再考慮積分因子 $I(x)$ 的結果一致。注意到

$$\int\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x-\int\frac{n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x-\ln n(x),$$

所以

$$i(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x-\ln n(x)}=\frac{\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x}}{n(x)}=\frac{\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{n(x)}=\frac{I(x)}{n(x)},$$

於是

$$y(x)=\frac{\int i(x)q(x)\,\mathrm{d}x+C}{i(x)n(x)}=\frac{\int\frac{I(x)}{n(x)}q(x)\,\mathrm{d}x+C}{I(x)}=\frac{\int I(x)Q(x)\,\mathrm{d}x+C}{I(x)}。$$

至此已驗證這兩者結果一致, 所以當遇到線性微分方程要求解時, 兩種方法都可行, 不過通常會採用先把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的係數除掉變成 1 之後考慮積分因子 $I(x)$ 會比較容易。

例 **3.** 試解初始值問題: $(\cos^2 x \sin x)y' + (\cos^3 x)y = 1$, $y(\frac{\pi}{3}) = 1$。

解.

2.4 數學模型 (Mathematical Models, 第 51 頁)

我們爲什麼要學數學? 學數學的目的又是什麼? 其實這件事必須自己找到一個答案, 之後才會願意學, 也才會快樂學。撇開個人學習的意願層面不看, 我們會拿數學以一套帶有邏輯推演的方式幫助我們了解並解決問題。也就是說, 當我們想要用數學解決問題的時候, 通常會依循以下的流程:

$$\begin{array}{ccc} \text{實際生活問題} & \longrightarrow & \text{數學模型} \\ & & \downarrow \\ \text{解釋生活問題} & \longleftarrow & \text{數學結論} \end{array}$$

另一方面, 我們到底該以何種角度學數學, 這其實也是要仔細深思的問題。就微分方程這個課題, 除了數學的技術層面 (如何把微分方程式解出來) 之外, 還必須著重於如何合理地將原先要研究或討論的問題改寫成數學式, 並且要將解出來的結果進行適當地解釋。

以下將由淺入深地探討幾個數學模型, 然後討論這些數學模型是否如實地推測過去、反應現狀或是預測未來, 如果沒有, 那又該如何修改模型以達到更好地詮釋。

2.4.1 人口模型 (Population Growth, 第 79 頁)

1798 年英國經濟學家馬爾薩斯 (Malthus) 的著作人口原理中提到了一句話:

> 人口的增長與人口數成正比。

如果我們想要把這句話用數學的模式寫出來, 那就變成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP, \tag{5}$$

其中 $P(t)$ 代表在時刻 t 時的人口數, 而 k 是一個<u>正的常數</u>。對於微分方程式 (5), 它是分離變數的微分方程? 還是線性微分方程? 一旦確定好類型, 那就把它的解算出來吧!

例 **1.** 試解微分方程: $P'(t) = kP$, $P(0) = P_0$。

解.

例 **2.** 以下表格爲 20 世紀各年份印度的人口數 (單位: 百萬)。

年份	1951	1961	1971	1981	1991	2001
人口	361	439	548	683	846	1029

(a) 試以 1961 and 1981 爲基準預估 2001 年的人口, 並與實際人口數比較。

(b) 呈 (a) 的人口模型預測 2020 年印度人口。

解. 將 1961 年設定爲 $t = 0$, 而 1981 年設定爲 $t = 20$。由 $P(t) = P(0)\mathrm{e}^{kt} = 439\,\mathrm{e}^{kt}$, 而 $P(20) = 439\,\mathrm{e}^{20k} = 683$ 解得 $k = \frac{1}{20}\ln\frac{683}{439} \doteq 0.022099$, 得到模擬人口成長的函數爲

$$P(t) = 439\,\mathrm{e}^{0.022099t}。$$

由此推測 2001 年的人口數並預測 2020 年的人口數爲

$$\begin{aligned} P(40) &= 439\,\mathrm{e}^{0.022099\cdot 40} = 439\,\mathrm{e}^{0.88396} \doteq 1063 \\ P(59) &= 439\,\mathrm{e}^{0.022099\cdot 59} = 439\,\mathrm{e}^{1.30389} \doteq 1617。\end{aligned}$$

思考. 你對人口模型 (5) 的看法爲何?

2.4.2 放射性元素的衰退 (Radioactive Decay)

實驗得知:「放射性元素的衰退速率與其總質量呈正比」, 記 m_0 是某個 t_0 時刻放射性元素的質量, 而 $m(t)$ 爲從 t_0 之後經過了 t 時刻放射性元素的質量, 若將上述引號中的話用數學式寫下, 則爲:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = km, \quad m(t_0) = m_0,$$

其中 k 是一個負的常數。而方程式的解爲 ______________。

研究放射性元素的衰退率會使用 *半衰期* (half-life) 的概念, 半衰期的意思是"當質量衰退爲原本的一半時所經過的時間。" 換言之, 由半衰期可以決定每一種放射性物質相應的 k 值。

例 **3.** 研究得知碳 14 的半衰期爲 5730 年。在非洲挖掘出人頭蓋骨, 其碳 14 的含量相對於正常量爲 74%, 試推估其存在年代。

解**.**

2.4.3 牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling)

牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling) 是物體冷卻的速度與物體溫度和環境溫度的差呈正比, 其中溫度差不能過大。假設 $T(t)$ 是 t 時刻物體的溫度, 而 T_s 是環境溫度 (假設爲常數), 牛頓冷卻定律得知 $T(t)$ 滿足以下微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_s),$$

其中 k 爲負的常數。對於牛頓冷卻定律, 一個比較好的理解微分方程式的方法爲:

$$\frac{\mathrm{d}(T - T_s)}{\mathrm{d}t} = k(T - T_s),$$

所以函數 $T(t)$ 的解爲:

$$T(t) - T_s = (T(0) - T_s)\mathrm{e}^{kt} \Rightarrow T(t) = T_s + (T(0) - T_s)\mathrm{e}^{kt}。$$

當初始溫度 $T(0)$ 比室溫高, 則過程爲冷卻; 若初始溫度 $T(0)$ 比室溫低, 則過程爲升溫, 比方說退冰。

例 **4** (名偵探柯南). 一場兇殺案, 屍體溫度於下午 1:30PM 爲 32.5°C, 一小時過後, 屍體降溫至 30.3°C。若當天氣溫爲 20.0°C, 請以人體正常體溫爲 37.0°C 推估兇殺案發生的時間。

解.

問題. 某個人喜歡喝到比較熱的咖啡, 今天他買了一杯咖啡後想要過十分鐘再喝, 你覺得他要在買的當下就先加奶精, 還是要喝的時候再加奶精比較好? (假設溫度關係爲奶精 $<$ 室溫 $<$ 咖啡。)

2.4.4 連續複利 (Continuously Compounded Interest, 第 55 頁)

記本金爲 A_0, 年利率爲 r, 銀行記息方式有單利與複利兩種, 其中 t 年之後的本利和計算方式如下 (n 爲一年當中計算複利的期數):

(a) 單利: 本利和 $=$ 本金 $\times$ $(1+$ 年利率 $\times$ 年份$)$, $A = A_0(1+rt)$。

(b) 複利: 本利和 $=$ 本金 $\times \left(1+\dfrac{\text{年利率}}{\text{期數}}\right)^{\text{期數}\times\text{年份}}$, $A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$。

連續複利 (continuously compounded interest) 指的是當期數 n 趨近於無限大的結果, 於是

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{\frac{n}{r}\to\infty} A_0\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}\cdot rt} = A_0\left(\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{rt} = A_0\mathrm{e}^{rt}。$$

所以連續複利公式會滿足微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = rA。$$

例 **5.** 以年利率爲 6% 的連續複利計息方式, 投資一筆錢後多久本利和增倍?

解.

2.4.5 邏輯斯模型 (Logistic Models, 第 80 頁)

第 2.4.1 節所討論的馬爾薩斯人口模型並不適合預測未來長時間的人口數, 這是因爲人口不可能依循指數函數的關係無限制增長下去, 理由在於有很多其他的因素會影響人口增加, 一個最容易想到的因素就是自然資源有限, 糧食無法無限制供應給愈來愈多的人。

所以我們觀察到人口數的增長現象應該比較像是以下的概念:

> 當人口較少的時候, 人口增長率可視爲常數; 當人口到達某個數量之後, 增長率會隨著人口數繼續增加而逐漸減少。

於是我們要如何修正原先的人口模型以貼近上述概念呢? 以下介紹的 邏輯斯模型 (logistic model) 是由比利時社會學家霍更斯特 (P.F. Verhurst) 於 1845 年所提出的修正人口模型:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \tag{6}$$

其中常數 $M > 0$ 稱爲 飽合値 (carrying capacity), 表示某一地區根據各方面的條件允許的最多的人口數。

例 **6.** 討論邏輯斯模型 (6) 符合上述人口數的觀察。

解.

例 **7.** 試解邏輯斯模型 (6), 其中 $P(0) = P_0 \in (0, M)$。

解.

2.4.6 其他的數學模型

如前所述, 當我們學微分方程時, 不只是純粹在學習如何將答案解出來而已, 而是要多花一些時間思考實際問題與相應的微分方程之間的聯繫。

而從一開始介紹的人口成長模型到修正後的人口模型(邏輯斯方程), 可以得到一個心得: 當我們想建立一個相對完整的數學模型時, 一個可以嘗試的做法是將實際問題中最重要的因子找出來, 相應地先設計出一個簡單的模型, 然後探討這個模型對於現狀而言是否有達到一定程度的精準。所謂的精準是依賴於你的研究目標, 可能是解釋過去、評估現狀、或是預測未來。一旦認定這個模型與實際情況誤差過大, 那麼就要繼續追問: 是否有另外一個不能忽略的因子, 如果有的話, 該如何將這個因子納入數學模型中, 然後再重新探討方程並重做評估。這樣不斷地修正後就可以得到較完整的數學模型。

以下的幾個例子會接續人口模型的討論而得到各式各樣的數學模型。

例 **8.** 美國生物學家珀爾 (Raymond Pearl) 於 1920 年發現在有限的空間中果蠅總數之增長也可以用邏輯斯方程作爲模型:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0.2P\left(1 - \frac{P}{1035}\right)。$$

試畫此方程式的 *解曲線* (solution curve), 並分析解的 *漸進行爲* (asymptotic behavior)。

解.

上例當中, 初始值介於 0 到 1035 的解曲線稱爲 S 規律: 曲線 $P = P(t)$ 最初上升緩慢, 接著急速上升, 最後趨於水平漸近線 $P = M$。除了生物的繁殖外, 許多現象如傳染病的傳播, 本質上都符合這種模型。

一般說來, 我們並不一定要把解明確寫出來才能做解的行爲分析, 單純從方程式就可以告訴我們一些現象, 例如:

這個例子中, $P = 0$ 與 $P = 1035$ 稱爲 *平衡點* (equilibrium points); 而 $P = 1035$ *穩定態* (stable), $P = 0$ 是 *不穩定態* (unstable)。

例 **9.** 有些生物會有一個現象, 當總數小於一個數字 m 時, 該物種將瀕臨絕種。若要將這個因素能夠呈現於微分方程中, 我們可以考慮以下方程:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1-\frac{P}{M}\right)\left(1-\frac{m}{P}\right)。$$

試由方程式討論解的特性。

解.

例 **10.** 對於生態學中某些生物總數的增長, 還要考慮一些其他因素, 所以會再對邏輯斯方程再加以修改。例如考慮魚群的數量, 因爲每天魚都會被捕捉, 假設魚群以常數 c 的速率被捕, 於是可以設定微分方程爲

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1-\frac{P}{M}\right) - c$$

作爲魚群總數的增長模型。試由方程式討論解的特性。

解.

例 **11.** 有些季節性變化因素, 例如水果的產量, 對時間 t 而言會有周期性變化, 所以可以考慮以下的季節性增長模型 (seasonal-growth model):

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\cos(rt-\phi)。$$

試解釋每一個參數代表的意義。

解.

2.5 正合方程式 (Exact Equations, 第 95 頁)

本節將探討另一類型的一階微分方程:

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{7}$$

若存在一個二變數函數 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

則稱微分方程式 (7) 是 *正合方程式* (exact equation)。在這個情況之下, 正合方程式的解是 $\varphi(x,y) = C$, 其中 C 是常數。

現在要問的是, 這個二變數函數 $\varphi(x,y) = C$ 該如何尋找? 這時, 要們要再做一些觀察: 給定可微分函數 $\varphi(x,y)$, 我們知道這個函數的 *全微分* (total differential) 爲

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}y,$$

所以將方程式 (7) 與 $\varphi(x,y)$ 的全微分兩者對照之下, 得知正合微分方程的解必須滿足

$$P(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{與} \quad Q(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}。$$

若 $P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$ 具有連續的偏導函數時, 那麼函數 $\varphi(x,y)$ 就是一個二次偏導數仍連續的函數, 由 Clairaut's 定理, 得知

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}。$$

所以, 若微分方程式 (7) 是正合時, 其必要條件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。

反之, 若所要討論的區域是 *單連通* (simply connected) 時, 則可由格林定理 (Green's Theorem) 得知若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 那麼方程式 (7) 是正合的。

例 **1.** 試解微分方程

$$(x + \sin y)\,\mathrm{d}x + (x\cos y - 2y)\,\mathrm{d}y = 0。$$

解**.**

對於非正合的微分方程, 有時我們可透過將方程式乘上 積分因子 (integrating factor) $\mu(x,y)$ 之後得到新的微分方程表達

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

之下, 它是一個正合方程。首先觀察 $\mu(x,y)$ 必須滿足的性質: 假設 $\varphi(x,y)$ 滿足

$$\mathrm{d}\varphi=\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0。$$

因爲 $\mu(x,y)P(x,y)$ 與 $\mu(x,y)Q(x,y)$ 滿足

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}\Rightarrow\mu_xQ+\mu Q_x=\mu_yP+\mu P_y\Rightarrow\underline{\mu=-\frac{Q\mu_x-P\mu_y}{Q_x-P_y}}。$$

現在我們討論以下三種特殊情況:

(a) 若 $-\frac{Q}{Q_x-P_y}$ 只與 x 有關, 那麼可以考慮乘上只與 x 有關的積分因子 $\mu(x)$。

$$\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=-\frac{Q}{Q_x-P_y}\Rightarrow\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=-\frac{Q_x-P_y}{Q}\Rightarrow\mu(x)=\underline{\hspace{4cm}}。$$

(b) 若 $\frac{P}{Q_x-P_y}$ 只與 y 有關, 那麼可以考慮乘上只與 y 有關的積分因子 $\mu(y)$。

$$\frac{\mu(y)}{\mu'(y)}=\frac{P}{Q_x-P_y}\Rightarrow\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{Q_x-P_y}{P}\Rightarrow\mu(x)=\underline{\hspace{4cm}}。$$

(c) 若 $-\frac{(yQ-xP)}{Q_x-P_y}=f(xy)$, 那麼可以考慮積分因子的型式爲 $\mu(v)=\mu(xy)$。

$$\frac{\mu(v)}{\mu'(v)}=-\frac{(yQ-xP)}{Q_x-P_y}=f(v)\Rightarrow\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}=\frac{1}{f(v)}\Rightarrow\mu(xy)=\underline{\hspace{3cm}}。$$

例 **2** (第 98 頁)**.** 試解微分方程 $(3xy+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+xy)\,\mathrm{d}y=0$。

解.

例 **3.** 試解微分方程 $(3xy+2y^2)\,\mathrm{d}x+(3xy+2x^2)\,\mathrm{d}y=0$。

解.

2.6 一階微分方程的綜合討論

例 **1.** 分組討論下列問題, 並分享自己的看法。

(a) 什麼是分離變數微分方程式? 任何分離變數微分方程都是正合方程嗎? 爲什麼?

(b) 什麼是一階線性常微分方程? 任何一階線性常微分方程都是正合方程嗎? 爲什麼?

(c) 什麼是一階齊次微分方程式? 任何一階齊次微分方程都是正合方程嗎? 對於一般的一階齊次微分方程式, 我們可以考慮的積分因子的形式是什麼?

(d) 什麼類型的微分方程可以考慮使用積分因子如 $\mu(x+y)$?

(e) 一個微分方程式只會有一種積分因子嗎? (考慮 $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$。)

2.7 一階微分方程的存在唯一性定理(第 112 頁)

這一節欲證明一階微分方程初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), \quad y(0)=0 \tag{8}$$

解的存在 (existence) 唯一 (uniqueness) 性。

定理 1 (第 113 頁)**.** 若 $F(x,y)$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ 在矩形區域 $R=[-a,a]\times[-b,b]$ 上連續, 則存在區間 $[-h,h]\subset[-a,a]$ 使得微分方程 (8) 在 $x\in[-h,h]$ 中存在唯一解 $y=\phi(x)$。

在證明這個定理之前, 我們先複習幾個分析 (高等微積分) 中重要的概念:

定義 (連續函數)**.** 若函數 $f(x)$ 在閉區間 $I=[a,b]$ 有定義, 我們說函數 $f(x)$ 在 $x=c, c\in[a,b]$ 連續, 定義爲: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)=f(\lim\limits_{x\to c} x)$。端點的連續性只考慮單邊極限。

定理 (最大最小值定理)**.** 若函數 $y=f(x)$ 在閉區間 $I=[a,b]$ 上連續, 則存在 $c,d\in[a,b]$ 使得 $f(c)=\min\limits_{x\in I} f(x)$ 與 $f(d)=\max\limits_{x\in I} f(x)$。

定理 (微積分基本定理)**.**

(a) 若 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 定義函數 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 則 $F'(x)=f(x)$。

(b) 若 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 是一次微分仍連續的函數, 則 $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$。

定義 (均勻收斂)**.** 考慮定義於閉區間 $I=[a,b]$ 上的函數數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 我們說函數數列在閉區間 I 上 *均勻收斂* (uniformly convergent) 至函數 $f(x)$, 定義爲: 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 時, 對所有的 $x\in I$, 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。

注意到均勻斂斂與逐點收斂 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 之間最重要差別在於均勻收斂的定義中, N 只與 ε 有關, 和 x 無關。注意到均勻收斂必逐點收斂, 反之不對。

定理 (均勻收斂檢驗法)**.** 假設在閉區間 $I=[a,b]$ 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$。令 $M_n=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$, 則函數數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至 $f(x)$ 等價於 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=0$。

關於均勻收斂檢驗法, 應該要覺得很自然, 因爲 $M_n=\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ 這個量, 就是研究 $f_n(x)$ 與 $f(x)$ 差距最大的值, 於是 M_n 這個數字與 x 無關, 因此問題就轉變爲數列 M_n 是否趨近於零。

定理 (魏爾斯特拉斯判別法, Weierstrass M-test)**.** 假設 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是定義於閉區間 $I=[a,b]$ 上的函數數列, 若存在一組正數 M_n 使得對每個 $n\in\mathbb{N}$, 對所有 $x\in I$ 都有 $|f_n(x)|\leq M_n$, 並且級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收斂, 則函數級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在閉區間 I 上均勻收斂。

注意到上述定理的結論是探討函數級數 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的均勻收斂性。關於級數的收斂, 應理解為「部分和數列的極限」, 所以定理應看成研究部分和函數數列 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的均勻收斂性, 其中 $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$。

定理 (均勻收斂的性質)**.** 若一組連續函數數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在閉區間 $I = [a, b]$ 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在閉區間 $I = [a, b]$ 上連續。

以下將給予定理 1 的證明。

證明: 由 $F(x, y)$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ 在矩形區域 R 連續的連續性先推得以下兩個性質:

(A) 由最大最小值定理得知, 存在正數 M_0 與 M_1 使得在矩形區域 R 上滿足

$$|F(x, y)| \leq M_0 \quad \text{與} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right| \leq M_1。$$

(B) 由平均值定理 (Mean Value Theorem) 知, 任給 $x \in [-a, a]$, 存在 y^* 介於 y_1, y_2 之間使得

$$|F(x, y_2) - F(x, y_1)| = \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x, y^*)\right| |y_2 - y_1| \leq M_1 |y_2 - y_1|。$$

現取一正數 $h, h \leq a$, 滿足 $M_0 h < b$ 與 $M_1 h < 1$。接下來我們要在區間 $[-h, h]$ 中找到 $y = \phi(x)$ 滿足初始值問題 (8), 並證明唯一性。
首先, 我們要證明: 初始值問題 (8) 解的存在性等價於 $y = \phi(x)$ 滿足以下的積分方程

$$\phi(x) = \int_0^x F(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s \quad \text{與} \quad \phi(0) = 0。$$

($\Rightarrow$) 若 $y = \phi(x)$ 滿足 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = F(x, \phi(x))$, 由微積分基本定理, 兩邊積分, 並修改啞吧變數為 s, 得到

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}s = \int_0^x F(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s \Rightarrow \phi(x) = \int_0^x F(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s。$$

($\Leftarrow$) 若 $y = \phi(x)$ 滿足 $\phi(x) = \int_0^x F(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s$, 由微積分基本定理, 兩邊對 x 求導得到

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = F(x, \phi(x))。$$

以下證明積分方程解的存在性的方法稱為 *皮卡德迭代法* (Picard's iteration method): 考慮 $\phi_1(x) \equiv 0$, 以及 $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x F(s, \phi_n(s))\, \mathrm{d}s,$$

我們將依序證明以下事情:

(a) 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(x)$ 在 $[-h, h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

當 $n = 1$, 函數 $\phi_1(x) \equiv 0$ 在 $[-h, h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

假設 $n = k$ 時, 函數 $\phi_k(x)$ 在 $[-h, h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

則當 $n = k + 1$ 時, 因爲 $F(x, y)$ 是連續函數, 所以 $F(x, \phi_n(x))$ 是對 x 而言的連續函數, 因此

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x F(s, \phi_n(s))\,\mathrm{d}s,$$

在 $x \in [-h, h]$ 都有定義, 並且爲連續函數。

故由數學歸納法得知, 函數 $\phi_n(x)$ 在 $[-h, h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

(b) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 與 $x \in [-h, h]$, 都有 $|\phi_n(x)| \leq b$。

當 $n = 1$, 則 $|\phi_1(x)| \equiv 0 \leq b$ 成立。

假設 $n = k$ 時條件成立, 即對所有 $x \in [-h, h]$ 都有 $|\phi_k(x)| \leq b$。

則當 $n = k + 1$ 時,

$$\begin{aligned} |\phi_{k+1}(x)| &= \left| \int_0^x F(s, \phi_n(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_0^x |F(s, \phi_n(s))|\,\mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_0^x M_0\,\mathrm{d}s \right| \\ &= M_0|x| \leq M_0 h < b\text{。} \end{aligned}$$

由數學歸納法得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 與 $x \in [-h, h]$, 都有 $|\phi_n(x)| \leq b$。

(c) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 有以下估計: $|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq (M_1 h)^{n-1} M_0 h$。

當 $n = 1$, 則

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| = \left| \int_0^x F(s, 0)\,\mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_0^x |F(s, 0)|\,\mathrm{d}s \right| < M_0 h\text{。}$$

假設 $n = k$ 時條件成立, 即

$$|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| \leq (M_1 h)^{k-1} M_0 h\text{。}$$

則當 $n = k + 1$ 時, 因爲

$$\begin{aligned} |\phi_{k+2}(x) - \phi_{k+1}(x)| &= \left| \int_0^x F(s, \phi_{k+1}(s)) - F(s, \phi_k(s))\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \left| \int_0^x |F(s, \phi_{k+1}(s)) - F(s, \phi_k(s))|\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \left| \int_0^x M_1 \left|\phi_{k+1}(s) - \phi_k(s)\right|\,\mathrm{d}s \right| \\ &\leq M_1 (M_1 h)^{k-1} M_0 h |x| \leq (M_1 h)^k M_0 h\text{。} \end{aligned}$$

由數學歸納法得知: 對於 $n \in \mathbb{N}$ 不等式 $|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq (M_1 h)^{n-1} M_0 h$ 成立。

(d) 對於 $x \in [-h, h]$, 函數數列 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至連續函數 $\phi(x)$, 且 $|\phi(x)| \le b$。

我們將函數數列 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 理解爲級數的型式, 則爲

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= \phi_1(x) + (\phi_2(x) - \phi_1(x)) + \cdots + (\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)) \\ &= (\phi_2(x) - \phi_1(x)) + \cdots + (\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)),\end{aligned}$$

因爲對所有 $k = 1, 2, \ldots, n$ 有 $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| \le (M_1h)^{k-1}M_0h$, 而

$$\sum_{k=1}^{n}(M_1h)^{k-1}M_0h$$

是公比爲 M_1h 的等比級數, 因爲 $|M_1h| < 1$, 所以級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(M_1h)^{k-1}M_0h$ 收斂, 由魏爾斯特拉斯判別法得知 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至某個函數 $\phi(x)$, 並且 $\phi(x)$ 是連續連續函數, 因爲 $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)$ 且 $|\phi_n(x)| \le b$, 所以 $|\phi(x)| \le b$。

(e) 函數數列 $\{F(x, \phi_n(x))\}_{n=0}^{\infty}$ 均勻收斂至 $F(x, \phi(x))$。這是因爲

$$\begin{aligned}&|F(x,\phi_n(x)) - F(x,\phi(x))| \le M_1|\phi_n(x) - \phi(x)| \\ &\Rightarrow \sup_{x\in I}|F(x,\phi_n(x)) - F(x,\phi(x))| \le \sup_{x\in I} M_1|\phi_n(x) - \phi(x)| = M_1\sup_{x\in I}|\phi_n(x) - \phi(x)| \\ &\Rightarrow 0 \le \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|F(x,\phi_n(x)) - F(x,\phi(x))| \le \lim_{n\to\infty} M_1\sup_{x\in I}|\phi_n(x) - \phi(x)| \\ &\quad = M_1\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|\phi_n(x) - \phi(x)| = 0。\end{aligned}$$

所以函數數列 $\{F(x, \phi_n(x))\}_{n=0}^{\infty}$ 均勻收斂至 $F(x, \phi(x))$。

(f) 我們將迭代式 $\phi_{n+1}(x) = \int_0^x F(s, \phi_n(s))\,\mathrm{d}s$ 兩邊取極限後得到

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{n\to\infty}\phi_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^x F(s,\phi_n(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^x \lim_{n\to\infty}F(s,\phi_n(s))\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^x F\left(s, \lim_{n\to\infty}\phi_n(s)\right)\,\mathrm{d}s = \int_0^x F\left(s,\phi(s)\right)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

於是 $\phi(x)$ 爲初始值問題 (8) 的解。

(g) 現在要證明唯一性: 假設 $y = \psi(x)$ 是另一個滿足初始值問題 (8) 的解, 考慮

$$\begin{aligned}|\psi(x) - \phi(x)| &= \left|\int_0^x F(s,\psi(s)) - F(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_0^x |F(s,\psi(s)) - F(s,\phi(s))|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le M_1\left|\int_0^x |\psi(s) - \phi(s)|\,\mathrm{d}s\right|,\end{aligned}$$

令 $M = \max_{s\in[0,h]} |\psi(s)-\phi(s)|$ (或者是 $M = \max_{s\in[-h,0]} |\psi(s)-\phi(s)|$), 其中最大值發生於 x_0, 並考慮

$$M = |\psi(x_0)-\phi(x_0)| \le M_1 \left| \int_0^{x_0} |\psi(s)-\phi(s)| \,\mathrm{d}s \right| \le M_1 M |x_0| \le M_1 M h$$

如果 $M \neq 0$, 則得到 $M \le (M_1 h) M < M$ 矛盾, 所以 $M = 0$, 因此唯一性得證。

證明完定理 1 之後, 最後要做的註記是: 若要考慮一般初始條件的一階微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), y(x_0) = y_0$ 解的存在唯一性, 只需透過坐標變換 $X = x - x_0, Y = y - y_0$, 則原問題可轉變爲 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F(X + x_0, Y + y_0), Y(0) = 0$ 再利用定理 1 討論即可。

2.8 一階微分方程解不唯一的例子

和前一節對照, 現在要介紹一個帶有初始值條件的微分方程式, 而方程式的解不只一個。如此可讓各位了解定理的條件 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ 必須連續之重要性。

例 **1** (第 72 頁). 考慮初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0。 \tag{9}$$

很淸楚地 $y(x) \equiv 0$ 即爲一個解。另一方面, 若先針對 $y(x) \neq 0$ 的那些點, 將方程式改寫成分離變數微分方程並求解:

$$y^{-\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \,\mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{3}} \,\mathrm{d}y = \int 1 \,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C,$$

於是我們可以把解表示成函數的型式:

$$y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}(x + C) \right)^{\frac{3}{2}}。$$

因爲函數 $y(x)$ 的表達式是連續函數, 所以可以連續地定義於 $y(0) = 0$, 解得 $C = 0$, 因此 $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ 是另外兩個滿足微分方程 (9) 的解。

更一般地, 對任意正數 x_0, 定義函數

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } 0 \le x < x_0 \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^{\frac{3}{2}} & \text{若 } x \ge x_0, \end{cases}$$

則 $y(x)$ 皆滿足微分方程式 (9)。

最後我們檢視微分方程式 (9), 若要和微分方程式解的存在唯一性定理做比較, 那麼 $F(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$, 而 $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$ 在 $y = 0$ 無定義, 所以 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 $y = 0$ 附近不是連續函數, 定理的條件不成立。