數學軟體導論(一) 課程學習單 活動 8

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 利用數學軟體重新檢視微積分課程當中的幾個觀念。

2 用 Desmos Calculator 學微積分

例題 **1.** 關於 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的幾個觀點。

解**.**

(1) 畫出函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的圖形, 然後研究曲線上的點當 x 接近 0 的時候 y 值的變化, 得到 y 值與 1 很靠近, 在數學上會寫 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 表示這個概念。注意到, 討論極限問題時, 函數在該點的取值不重要。以此爲例, 當點移到 $x=0$ 的時候, 電腦顯示 $(0,\mathrm{undefined})$。

輸入的指令: $f(x)=\frac{\sin x}{x}$。

(2) 把極限式理解爲 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0}{x-0}$, 其幾何意義是考慮函數 $f(x)=\sin x$ 圖形通過 $(0,0)$ 與動點 $(x,f(x))$ 的割線斜率當 x 趨近於 0 的極限 — 得到曲線在 $(0,0)$ 的切線斜率, 切線斜率即 $f'(0)$。

輸入的指令: $f(x)=\sin x;\quad (a,f(a)), 0\le a\le 2,$ 增量 0.01; $y=\frac{f(a)}{a}x;\quad y=x$。

(3) 當函數 $f(x)$「很好」的時候, 我們可以利用求導法則 (四則運算、鏈鎖律) 快速得到導函數 $f'(x)$, 這個方法就可以取代利用導數的定義 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (割線斜率的極限) 而得到結果。割線斜率的極限<u>有時候</u>會等於切線斜率的極限。而這句話的數學意義是 $f'(a)=\lim_{x\to a}f'(x)$。若將 $f'(a)$ 寫成 $f'(\lim_{x\to a}x)$, 那麼 $f'(\lim_{x\to a}x)=\lim_{x\to a}f'(x)$ 告知「函數 f'」與「極限的操作」可以互換; 換言之, 這個條件等價於要求 f' 是「連續函數」。以 $f(x)=\sin x$ 爲例, 我們要觀察的是切線 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ 當 a 接近 0 的時候是否會貼近直線 $y=x$。

輸入的指令: $f(x)=\sin x;\quad (a,f(a)), 0\le a\le 2,$ 增量 0.01; $y-f(a)=f'(a)(x-a);\ y=x$。

(4) 函數圖形在一點的切線, 在切點附近的切線值與函數值之間的關係稱爲「線性近似」(linear approximation)。以此爲例, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 以線性近似的方式解讀之, 它表示: 當 x 很接近 0 的時候 $\sin x\sim x$。從圖形來看, 你會發現 $y=\sin x$ 與直線 $y=x$ 在 $x=0$ 附近是相當貼近的。

輸入的指令: $f(x)=\sin x;\quad y=x$。

例題 **2.** 割線斜率的極限不等於切線斜率的極限的例子。

解**.** 由上述討論, 當一個函數的一次導函數不連續 (數學上會寫成 $f(x) \notin C^1(\mathbb{R})$) 時, 在那些導數不連續的地方, 割線斜率的極限就不會等於切線斜率的極限。當一個函數是分段定義的時候, 在相接的地方就必須注意, 很有可能會有這種現象。例如:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{若 } x \neq 0 \\ 0 & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

課堂中用定義與夾擠定理證明 $f'(0) = 0$ (現在若對這件事還是不清楚的話, 應該要加點油了), 然而對於 $x \neq 0$ 的地方, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, 得到 $\lim_{x \to 0} f'(x)$ 不存在。
輸入的指令: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$; $(a, f(a)), 0 \leq a \leq 1$, 增量 0.001; $y - f(a) = f'(a)(x - a)$; $f'(x)$。

例題 **3.** 考慮函數

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sin x} & \text{若 } x \geq 0 \\ ax + b & \text{若 } x < 0, \end{cases}$$

希望找到常數 a, b 使得函數 $f(x)$ 爲可微分 (differentiable) 的函數。

解**.** 利用 Desmos Calculator 確實觀察這一個例題代表的幾何意義。

例題 **4** (極限的精確定義)**.** 可進入 `goo.gl/56x1NH` 與 `goo.gl/HnSwN3` 再次體會給定 ε 之下, δ 應如何選取。

例題 **5** (星形線的幾何意義)**.** 可進入 `goo.gl/fG7ESq` 了解星形線的特性。

作業 **1** (歐拉數 (Euler number) e 的定義)**.** 請利用 Desmos Calculator 依指示體會歐拉數的意義。

(1) 畫出函數 $f(x) = a^x$, 其中參數 a 介於 1.5 到 3.5 之間, 增量爲 0.001。

(2) 畫出函數 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 處的切線。

(3) 畫出通過 $(0, 1)$ 並且斜率爲 1 的直線。

(4) 調整 a 讓 (1) 的切線與 (3) 的直線重合, 這個 a 大概在哪裡呢?

(5) 心得: 所謂 e^x 函數, 指的是函數在 $(0, 1)$ 處的切線斜率爲 1 的指數函數。

(6) 在「分享圖形」的地方, 複製「分享連結」, 將網址貼到雲端學院的作業/報告 $\Rightarrow$ 活動 `8` 裡面的框框中 $\Rightarrow$ 確定繳交。