

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

☐ 用數學函數作圖統整。

2 如何用數學曲線臨摹圖形

到目前為止我們已經大致介紹如何從基本的函數圖形或是曲線參數式出發(只剩極坐標方程式還沒有介紹), 利用參數變動的方式得到原圖的平移、伸縮、旋轉、甚至整體的變形。現在我將做一個統整, 以便各位在用數學函數作圖時可以參考。

- (1) 使用截圖功能: 打開 Desmos Calculator 之後, 左上方有一個「+」的符號, 使用最後一個功能「截圖」, 就可以從電腦中將圖形引入至 Desmos Calculator。
- (2) 用數學函數臨摹曲線的方法: 先觀察要畫的曲線和什麼函數或隱函數或參數式類似, 透過平移、伸縮、以及變動參數的方法調整。

例如: 你覺得卡通圖案的眼睛像橢圓, 那麼就可先輸入標準式 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, 這個時候就會得到四個參數 a, b, h, k 可供調整平移與伸縮, 將四個參數的「範圍」還有「增量」調整到適合的區域, 比方說看似橢圓的中心, x 的坐標大概在 3 到 4 之間, 這時, 就把 h 這個參數調整至 $3 \leq h \leq 4$, 還有增量 0.01。

如果卡通圖案的眼睛利用平移伸縮的方式不論怎麼調整都還是差一點點沒有對在一起的話, 可以再對次方做修改, 例如 $\frac{(x-h)^c}{a^2} + \frac{(y-k)^c}{b^2} = 1$ 甚至是 $\frac{(x-h)^c}{a^2} + \frac{(y-k)^d}{b^2} = 1$, 透過參數 c 或 d 的調整再做修正。

- (3) 選取部分曲線的方法: 如果只想要函數或曲線的某一部分, 則可對 x 或 y 而言設定畫圖的範圍。直接在函數 (或是隱函數) 的後面加註 $\{1 < x < 2\} \{3 < y < 4\}$, 那麼它就只會畫出 x 介於 1 到 2 之間、 y 介於 3 到 4 之間的曲線。
- (4) 畫出函數的圖形: 直接輸入你想要的函數, 例如 $\arcsin x$ 。如果你想要畫函數的導函數, 可以先在前面補上 $f(x) = \arcsin x$, 然後在下一個欄位打 $f'(x)$ 即可, 也可以輸入 $\frac{d}{dx}f(x)$ 也可以達到一樣的結果。若想要針對這個函數做平移伸縮, 就在欄位中輸入 $af(bx+c)+d$, 然後針對參數 a, b, c, d 做調整。
- (5) 兩個函數圖形的相接: 視覺上很容易感受兩條曲線是否連續, 還有它們的左導數與右導數是否一致, 而左、右導數一致與否對應的圖形現象是在接點處平滑或是產生折角, 左、右導數一致的話圖形比較平滑, 否則會看似有折角。

- (6) 曲線參數式：有的時候一條曲線無法以函數的型式表達，那麼可以採用更一般的概念——參數式處理之。例如輸入 $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ 之後，底下就會要求限定 t 的範圍。而 Desmos Calculator 預設以 t 為參數式，若用其他的符號都不會被理解為參數式。

特別地，函數圖形也可以用參數式表示，像是 $\sin x$ 的圖形，可輸入 $(t, \sin t)$ 。

- (7) 圖形的旋轉：可利用坐標旋轉矩陣與矩陣乘法的觀點再進行改寫。若有一個向量記為 $v = (v_1, v_2)$ ，將它對著坐標原點逆時針旋轉 θ 之後得到的向量為

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cdot v_1 - \sin \theta \cdot v_2 \\ \sin \theta \cdot v_1 + \cos \theta \cdot v_2 \end{bmatrix}。$$

所以，如果想要畫出函數圖形 $(t, \sin t)$ 逆時針旋轉 u 弧度之後得到的新圖形，可輸入指令

$$(\cos(u)t - \sin(u)\sin t, \sin(u)t + \cos(u)\sin t),$$

這時將得到一個對 u 而言的滑桿，以調整旋轉角度。

- (8) 使用極坐標式：將平面用極坐標定位，然後曲線用極坐標方程式 (polar equation) 表示也會得到不一樣的效果。在 Desmos Calculator 中，若要使用極坐標方程式，必須寫出 $r = r(\theta)$ 的型式才行。而極坐標式的討論我們留到下一個活動再做仔細探討。以下列出幾個常見的極坐標式與曲線供參考：

- (a) $r = 1$: 圓。 (b) $r = 1 + \sin \theta$: 心臟線。
(c) $r = \cos 2\theta$: 四葉玫瑰線。 (d) $r = \theta$: 阿基米德螺線。
(e) $r = \sqrt{\cos 2\theta}$: 雙紐線。

作品 1. 請利用 Desmos Calculator 依指示完成電腦作業。

- (1) 在雲端學院的作業/報告 \Rightarrow 活動 5 下載圖形「QuestionMark.png」並截圖至 Desmos Calculator。
- (2) 請利用目前所學的函數，畫出問號上方黑色的輪廓。這一題並沒有標準答案，我自己是找了兩個函數圖形相接，你也可以嘗試用更多段函數相接。設計這個題目是要讓大家思考一下看到曲線要如何去模擬近似它。
- (3) 在「分享圖形」的地方，複製「分享連結」，將網址貼到雲端學院的作業/報告 \Rightarrow 活動 5 裡面的框框中 \Rightarrow 確定繳交。

作品 2. 期末作品是利用 Desmos Calculator 畫出喜歡的圖案，如果已經選好圖形，可將圖案上傳到雲端學院的「作業/報告」—「期末作品圖檔」中審核。繳交期限：10 月 16 日 23:59。