

學號: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

你的伙伴: \_\_\_\_\_

## 1 單元介紹與學習目標

- ☐ 了解圖形的旋轉及其數學表達式。
- ☐ 圖形參數式的平移伸縮理論。
- ☐ 如何在 Desmos Calculator 呈現動態的曲線。

## 2 圖形的旋轉

一條參數曲線  $(x(t), y(t))$  對著坐標中心旋轉  $\phi$  角之後所得的新曲線該如何表達？因為曲線實際上是由無限多個點所成的集合，所以我們不妨先研究一個點對著坐標中心旋轉。此時，我們必須重新討論一個點  $P$  的所在位置。首先，我們考慮以下兩個量：

- 用  $r^2 = x^2 + y^2$  度量點  $P$  與坐標中心  $O$  的距離平方。
- 用  $\theta$  代表  $x$ -軸到  $\overline{OP}$  之間的逆時針夾角。

由三角函數，我們得到  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ；將  $P$  利用  $(r, \theta)$  重新表達所在位置的方式稱為 極坐標 (polar coordinates)。極坐標的理論我們會在之後的活動才會仔細討論。

當點  $P(x, y)$  對著坐標中心旋轉  $\phi$  角之後得到  $P'(x', y')$ ，則

$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \phi) = \underline{\hspace{4cm}} = \cos \phi \cdot x - \sin \phi \cdot y \\ y' = r \sin(\theta + \phi) = \underline{\hspace{4cm}} = \sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y. \end{cases}$$

因此，若要把一條曲線  $(x(t), y(t))$  旋轉  $\phi$  角後得到新曲線的參數式為

$$(\cos \phi \cdot x(t) - \sin \phi \cdot y(t), \sin \phi \cdot x(t) + \cos \phi \cdot y(t)).$$

討論 1. 寫出以下曲線對著坐標原點旋轉  $\frac{\pi}{4}$  之後的參數式，並用 Desmos Calculator 驗證其結果。

(A1)  $(t - \sin t, 1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ .      (A2)  $(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ .

- ☐ 利用「方框與箭頭的圖案」取得連結，再將連結貼到雲端學院的「作業/報告」—「活動 4」中。

### 3 參數式圖形的平移縮放理論

討論 2. 請在 Desmos Calculator 的第一個欄位輸入  $(\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$ , 將曲線記為  $\alpha(t)$ 。

(B1) 若要將  $\alpha(t)$  向上平移 2 單位的話, 則必須修改參數式的哪個地方? 請在第二個欄位呈現。

(B2) 若要將  $\alpha(t)$  向右平移 2 單位的話, 則必須修改參數式的哪個地方? 請在第二個欄位呈現。

(C1) 若要將  $\alpha(t)$  上下壓縮 2 倍的話, 則必須修改參數式的哪個地方? 請在第三個欄位呈現。

(C2) 若要將  $\alpha(t)$  左右壓縮 2 倍的話, 則必須修改參數式的哪個地方? 請在第三個欄位呈現。

□ 利用「方框與箭頭的圖案」取得連結, 再將連結貼到雲端學院的「作業/報告」—「活動 4」中。

### 4 曲線的動畫與限制

如何在 Desmos Calculator 將曲線的軌跡以動態的方式呈現? 以下將介紹一些可能的方法。

- (1)  $(t, \sin t\{a \leq t \leq b\}), -10 \leq t \leq 10$ , 注意到連同大括號中的所有符號是放在第二個分量的位置。此時,  $a$  和  $b$  會產生新的滑桿, 播放它們曲線就會變動。
- (2)  $\sin x\{a \leq x \leq b\}$ , 同樣地,  $a$  和  $b$  會產生新的滑桿, 播放它們曲線就會變動。
- (3) 上述的方法, 將  $a$  和  $b$  改成明確的數字, 那麼它就只會呈現在範圍內的曲線。

你可以想一想在你的作品上有沒有可能加上煙火或是流星之類的特效。

作品 3. 期末作品是利用 Desmos Calculator 畫出喜歡的圖案, 如果已經選好圖形, 可將圖案上傳到雲端學院的「作業/報告」—「期末作品圖檔」中審核。繳交期限: 10 月 16 日。