

## 16.10 Summary, page 1147

The main results of this chapter are all higher dimensional versions of the Fundamental Theorem of Calculus. In each case, we have an integral of a “derivative” over a region on the left side, and the right side involves the values of the original function only on the boundary of the region.

**Fundamental Theorem of Calculus.** *Suppose  $F'(x)$  is continuous on  $[a, b]$ . Then*

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Fundamental Theorem of Line Integrals.** *Let  $C : \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$  be a smooth curve. Let  $f(\mathbf{x})$  be a function whose gradient  $\nabla f(\mathbf{x})$  is continuous on  $C$ . Then*

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$



Figure 1: Fundamental theorem of calculus and line integrals.

**Green’s Theorem.** *Let  $C$  be a positively oriented, piecewise smooth, simple closed curve in the plane and let  $D$  be the region bounded by  $C$ . If  $P, Q \in C^1(\tilde{D})$ , where  $\tilde{D} \supset D$  is open, then*

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C P dx + Q dy.$$

**Stokes’ Theorem.** *Let  $S$  be an oriented piecewise smooth surface that is bounded by a simple, closed, piecewise smooth boundary curve  $C$  with positive orientation. Let  $\mathbf{F}$  be a  $C^1$  vector field in an open region  $\tilde{S} \supset S$ . Then*

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



Figure 2: Green’s theorem and Stokes’ theorem.

**The Divergence Theorem.** *Let  $E$  be a simple solid region and let  $S$  be the boundary surface of  $E$ , given with positive outward orientation. Let  $\mathbf{F}$  be a  $C^1$  vector field in an open region  $\tilde{S} \supset E$ . Then*

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

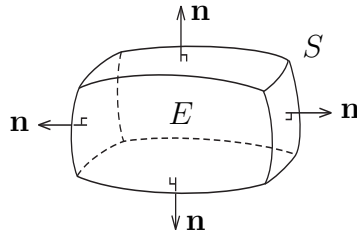


Figure 3: The divergence theorem.

## 第一類曲線積分

(1) 設  $C$  為空間曲線, 其參數式為  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $a \leq t \leq b$ , 定義

$$\begin{aligned}\int_C f(x, y, z) ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.\end{aligned}$$

(2) 若  $C$  為平面曲線, 則  $C$  可視為分量  $z(t) \equiv 0$  的空間曲線。

(3) 應用: 曲線弧長  $f \equiv 1$ ; 線圈質量  $f = \rho$ ; 矩 (moment)  $f = x\rho, y\rho, z\rho$  等; 質心。

(4)  $ds$  為弧長參數 (恆正), 所以積分式的下限與上限分別代入參數式之下界與上界。

## 第二類曲線積分

(1) 設  $C$  為空間曲線, 其參數式為  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $a \leq t \leq b$ ; 假設  $\mathbf{r}(a)$  為曲線的起點,  $\mathbf{r}(b)$  為曲線的終點,  $\mathbf{T}(t)$  為曲線之單位切向量。記  $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  為  $\mathbb{R}^3$  中的向量場, 定義

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.\end{aligned}$$

(2) 若  $C$  為平面曲線, 則  $C$  可視為分量  $z(t) \equiv 0$  的空間曲線。

(3) 應用: 功 (work done by the force  $\mathbf{F}$ ); 環流量 (circulation)。

(4)  $d\mathbf{r}$  有方向性, 所以積分式的下限與上限分別代入曲線起點與終點相應的參數值。

(\*) 若  $C$  為平面曲線, 有時會考慮向量場  $\mathbf{F}$  沿曲線  $C$  與單位法向量  $\mathbf{n}$  內積的線積分:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b -Q dx + P dy.$$

## 第一類曲面積分

(1) 設  $S$  為曲面, 其參數式為  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ , 其中  $D = \{(u, v) | a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ , 定義

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA.$$

(2) 若  $S$  為平面區域, 則  $S$  可視為分量  $z(u, v) \equiv 0$  的曲面。

(3) 應用: 曲面面積  $f \equiv 1$ ; 曲面質量  $f = \rho$ ; 矩 (moment)  $f = x\rho, y\rho, z\rho$  等; 質心。

(4)  $dA$  為面元參數 (恆正), 所以積分式的下限與上限分別代入參數式之下界與上界。

## 第二類曲面積分

- (1) 設  $S$  為曲面, 其參數式為  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ , 其中  $D = \{(u, v) | a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$ 。記  $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  為  $\mathbb{R}^3$  中的向量場, 定義

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, v) \, dA.$$

- (2) 若  $S$  為平面區域, 則  $S$  可視為分量  $z(u, v) \equiv 0$  的曲面。
- (3) 應用: 通量 (flux integral)。
- (4)  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} \, dS$  有方向性, 所以單位法向量  $\mathbf{n}$  必須明確指定。
- (5) 規定封閉曲面, 法向量  $\mathbf{n}$  指向外; 非封閉區域, 法向量  $\mathbf{n}$  與邊界的定向呈右手定則。

## 微積分基本定理: 區域(含微分) 及其邊界(不含微分) 的關係

(1)  $\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$ . 微積分基本定理

(2)  $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$ . 線積分基本定理

(3)  $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Green, Stoke 定理 (封閉曲線)

(4)  $\iiint_E \text{div } \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ . 散度定理 (封閉曲面)

## 各種積分的形式都要熟悉(向量內積的表示法、坐標表示法、算子表示法)

- (1) 封閉的平面曲線之 Green 定理 (切向量版本):

$$\iint_D \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k} \, dA = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \stackrel{\text{G.T.}}{=} \oint_C P \, dx + Q \, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

- (2) 封閉的平面曲線之 Green 定理 (法向量版本):

$$\iint_D \text{div } \mathbf{F} \, dA = \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dA \stackrel{\text{G.T.}}{=} \oint_C -Q \, dx + P \, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

(3)  $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$

(4)  $\iiint_E \text{div } \mathbf{F} \, dV = \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV.$

## 特別的向量場

(1) 定義  $\mathbf{F}$  為保守向量場 (conservative vector field): 若存在函數  $f$  使得  $\nabla f = \mathbf{F}$ 。

(2) 性質:

- 保守向量場的旋度為零向量, 即:  $\text{curl } \mathbf{F} = \text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$ 。
- 線積分與路徑選取無關。
- 封閉曲線上之線積分為零。

(3) 應用: 線積分基本定理與 Stoke 定理可以合併: 若曲面  $S$  的邊界為  $C$  (封閉), 則

$$\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = 0.$$

(4) 判定  $\mathbf{F}$  為保守向量場的方法: 檢查  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 。以坐標式寫下, 則為

- $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ :  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。
- $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ :  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。

(5) 若區域為單連通 (simply connected), 且  $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , 則  $\mathbf{F}$  為保守場。

## 活用定理

(1) 若平面曲線非封閉曲線, 可適當補上一條曲線讓它封閉, 便可用 Green 定理。

(2) 若空間曲線非封閉曲線, 可適當補上一條曲線讓它封閉, 並且它是某個曲面的邊界, 便可用 Stoke 定理。

(3) 若曲面非封閉曲面, 可適當補上一個曲面使之為某個實體的邊界, 便可用散度定理。

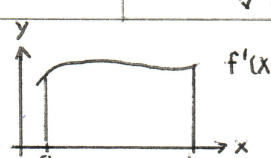
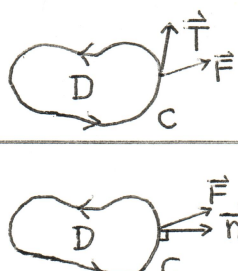
(4) 若向量場  $\mathbf{F}$  非保守向量場, 可試著找到保守向量場  $\mathbf{F}_1$  使得  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , 則線積分對於  $\mathbf{F}_1$  的部分可以用線積分基本定理。

第二類曲線、曲面積分的計算方式: 透過曲線、曲面參數式  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{r}(u, v)$

$$(1) \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

$$(2) \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)(u, v) dA.$$

	三維	二維	一維	零維
平面			$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ Fundamental Theorem of Calculus (5.4)	
		$\iint_D \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{k} dA = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ Green's Theorem (tangent vector) (16.4)		
		$\iint_D \text{div } \vec{F} dA = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} ds$ Green's Theorem (normal vector) (16.5)		
空間			$\int_C \nabla f \cdot \vec{T} ds = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$ Fundamental Theorem of Line Integral (16.3)	
		$\iint_S \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ Stokes' Theorem (16.8)		
	$\iiint_E \text{div } \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ The Divergence Theorem (16.9)			

	三維	二維	一維	零維
平面				
				
空間			