

## 11.7 Strategy for Testing Series (page 739)

本文將討論如何利用直覺的方式判斷級數是絕對收斂 (Absolutely Convergent)、條件收斂 (Conditionally Convergent) 或發散 (Divergent), 以及歸納出幾個心得以快速找到證明級數收斂或發散的判別法。

判斷級數的收斂或發散並沒有完整的標準程序 (Standard Operation Procedure), 以下只是提供幾個經驗分享。以下的原則大體上可以涵蓋各位將面臨到的 90% 的級數。剩下的 10% 算是比較特殊的級數, 例如第 25, 35, 36, 38, 50, 62, 65 題, 各位需額外花時間仔細研究其性質, 再將結果納入心得。

(1) 心中一定要非常清楚以下兩類基本的級數收斂與發散:

- $p$ -級數 ( $p$ -series)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ : 此級數當  $p > 1$  時收斂, 當  $0 < p \leq 1$  時發散。
- 另一個是等比級數 (geometric series)  $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ : 此級數當  $|r| < 1$  時收斂, 當  $|r| \geq 1$  時發散。

(2) 利用等級 (order) 的觀念“猜測”級數是絕對收斂 (A.C.)、條件收斂 (C.C.) 或是發散 (Div.)。常見也常用的等級順序如下:

$$1 \ll \ln n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{其中 } k > 0, a > 1.$$

(3) 尋找適當的定理 (判別法), 通常來說,

- 只有單一類型, 或是不同類型的「相加」 $\Rightarrow$  比較判別法 (CT, LCT)。
- 兩種以上類型「相乘」, 或是帶有階乘  $\Rightarrow$  比值法 (Ratio T)。
- 級數型如  $(b_n)^n \Rightarrow$  根式法 (Root T)。
- 級數正負交錯  $\Rightarrow$  交錯級數法 (AST)。
- 特殊函數, 例如  $\ln n$ , 觀察它是否連續化之後可以積分  $\Rightarrow$  積分法 (IT)。
- 發散  $\Rightarrow$  (DT), 除了 AST 以外的判別法都有可能用到。

(3) 剩下的 10% 會遇到比較特殊或不顯而易見的等級 (order), 必須重新理解, 並設法納入“心得”。

(4) 注意到  $\sin n, \cos n, \sin \frac{1}{n}, \cos \frac{1}{n}, \tan \frac{1}{n}$  對待的方式不同, 可見第 14, 21, 22, 23, 24, 34, 45, 55, 73, 87 題的分析。

(5) 熟悉以下極限也有助於判斷級數收斂或發散:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = 1 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1 & \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e & \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e & \end{array}$$

## 11.7 Exercises and 11 Review

Determine whether the series is conditionally convergent, absolutely convergent, or divergent. (page 743, 746)

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

$$7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{1}{3^n} \right)$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{1+2^n}$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} 3^{k+1}}{k^k}$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}$$

$$18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+\sin k}$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$$

$$30. \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$$

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$$

$$32. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$$

$$33. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n \cos^2 n}$$

$$35. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

$$36. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{2}-1 \right)^n$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{2}-1 \right)$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

$$43. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{\ln n}}$$

$$44. \sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n+1}\right)$$

45.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1.2)^n}$       46.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$       47.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{5^n n!}$       48.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$
49.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$       50.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$       51.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-\frac{1}{3}}$       52.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$
53.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1) 3^n}{2^{2n+1}}$       54.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$       55.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$       56.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$
57.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$       58.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$       59.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$       60.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
61.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} 100^n}{n!}$       62.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$       63.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$       64.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k} - 1}{k(\sqrt{k} + 1)}$
65.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$       66.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$       67.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$       68.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{4^n}$
69.  $\sum_{n=0}^{\infty} (\tan^{-1} n)^n$       70.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$       71.  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$       72.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln n}\right)^n$
73.  $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{2^n}$       74.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$       75.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$       76.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+2}{2}}}$
77.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$       78.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$       79.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{n^{n+1}}$       80.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n+1}{n}\right)$
81.  $1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$
82.  $\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$       83.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{n!}$       84.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdots (3n+2)}$
85.  $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \cdots$       86.  $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \cdots + \frac{1+n}{1+n^2} + \cdots$       87.  $\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2^2} + \cdots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \cdots$