1.4 Exponential Functions, page 51

Definition 1 (page 45)**.** An *exponential function* (指數函數) is a function of the form

$$f(x) = a^x,$$

where a is a positive constant.

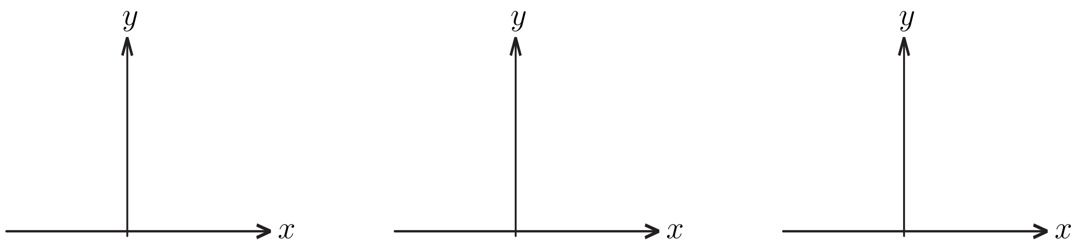

Figure 1: Three types of exponential functions $y = a^x$: $0 < a < 1$, $a = 1$, $a > 1$.

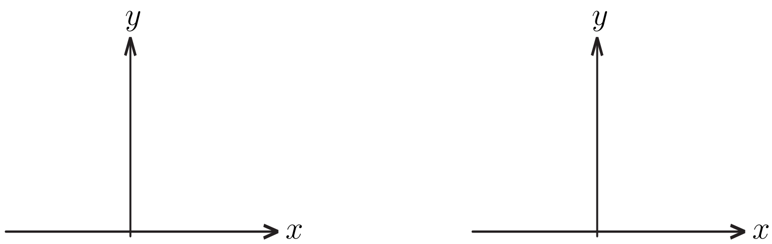

Figure 2: Compare $y = a^x$ and $y = b^x$. Left: $0 < a < b < 1$. Right: $1 < a < b$.

Laws of Exponents (page 47)**.** *If a and b are positive numbers and x and y are any real numbers, then*

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(2) $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.

(4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Example 2. The meaning of 2^{3^2} is $\underline{\hspace{2cm}}$.

Applications of exponential functions

☐ 大腸桿菌的生菌數: 大腸桿菌進行無性生殖, 約 20 分鐘分裂一次。

☐ 人口增長模型: 自 18 世紀開始馬爾薩斯便以此進行人口與社會狀況的研究。

☐ 放射性元素的半衰期: 判定化石或地層的年代。

☐ 銀行複利問題。

The number e

Example 3. 某人拿 1 元去「佛心銀行」存款, 只見銀行櫃姐口沫橫飛地推銷最新優儲方案: 利率 100%, 並以複利計算, 可選擇年複利、季複利、月複利、日複利、時複利、分複利、秒複利。

(1) 哪種方案的本利和最多?

(2)「佛心銀行」有沒有可能佛心到以某種複利計算, 一年後的本利和任意大?

Solution. (1) 複利公式爲:

$$\text{本利和} = \text{本金} \times \left(1 + \frac{\text{利率}}{\text{期數}}\right)^{\text{期數}},$$

所以我們可以得到各種複利方式的本利和, 記 n 表複利的期數, 於是

複利	n	本利和
年複利	1	2
季複利	4	2.44140625
月複利	12	2.61303529
日複利	365	2.71456748
時複利	8760	2.71812669
分複利	525600	2.71827924
秒複利	31536000	2.71828178

所以秒複利的方案獲利最多。
(2) 由二項式定理知

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + C_1^n\left(\frac{1}{n}\right) + C_2^n\left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_3^n\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\le 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\
&\le 1 + 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&\le 1 + 1 + 1 - \frac{1}{n} < 3,
\end{aligned}$$

所以不會有一種複利方案讓本利和無限制增大。

瑞士數學家 Leonhard Euler 於 1727 年發現當 n 愈來愈大的時候, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 不可能無止盡地增大, 並證明它有一個極限, 他首先以符號 e 代表 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 當 n 愈來愈大的極限值。這個數字對往後微積分以及近代數學的發展相當重要。