微分方程講義第 4 章

授課教師　李國瑋

目錄

4

拉普拉斯變換

接續前一章討論的電子電路問題, 當你想要了解電路在停電那瞬間前後的電流現象, 或是想知道電路在未通電狀態到立刻給予直流電或交流電的時候電流的現象, 那麼該如何用數學刻畫這些情況? 又或者是有一個電路裝置, 假設突然來了一個不正常地供電 (脈衝), 那麼這麼脈衝所造成的後續電流現象是什麼? 而這個脈衝是否會導致該裝置壞掉? 這些都是生活中會遇到的問題, 必須了解並解決它。

若要回答上述問題, 在經過初步討論後就會發現: 之前所學的那些微分方程理論以及找解的方法與技巧已經不敷使用, 原因在於: 若要模擬突然來電、突然斷電或瞬間脈衝時, 方程式的右邊若給定不連續的函數會比較符合現狀。而拉普拉斯變換 (Laplace transform) 是一套處理微分方程式的理論, 這個理論的發展就是爲了要處理並解決當非齊次項是不連續函數或是脈衝函數的情形。而各位之後也將看到, 這個理論也適用於之前所學的非齊次項是連續函數的微分方程式, 所以拉普拉斯變換的應用層面比起古典求解來說更爲廣泛。

這一章主要是建立拉普拉斯變換的數學理論, 並以例題示範如何利用拉普拉斯變換解微分方程式。單元 4.1 是要給出拉普拉斯函數的定義, 然後逐一推導出幾個基本函數的拉普拉斯變換, 並確定它們的定義域, 而這件事情牽涉到的是瑕積分的收斂理論; 而這一個單元我們還會給出幾個拉普拉斯變換的基本性質。由於拉普拉斯變換是把一個函數對應到另一個函數, 所以我們也需要知道拉普拉斯逆變換, 單元 4.2 主要是在了解每一個基本函數的拉普拉斯逆變換; 此外, 這個單元的另一個重點是要得到導函數的拉普拉斯變換公式, 這麼一來, 我們才有辦法把微分方程式進行轉換。

單元 4.3 有兩個重點, 首先是要介紹兩個平移定理, 因爲拉普拉斯變換是一個非常複雜的轉換, 所以我們需要知道兩個函數若是有平移的關係式的時候, 對應到的函數之間的關係式是什麼; 另一個重點則是介紹卷積算子, 它在拉普拉斯變換中的特色在於兩個函數的卷積作用了拉普拉斯變換後會是各別函數經拉普拉斯變換後之乘積。這當中我們還需要花時間了解階梯函數的特性, 而階梯函數的另一個特色是它可以幫助我們重新理解分段連續函數的意義。單元 4.4 則是引進狄拉克算子並給出狄拉克算子的拉普拉斯變換, 狄拉克算子的產生是由物理的問題而來, 而這個概念花了數學家相當多的時間終於把它建構完畢。單元 4.5 則是給出拉普拉斯變換表。單元 4.6 是要討論伽瑪函數。伽瑪函數在數學上有許多的應用, 至於它在拉普拉斯變換的部分則是回答了冪函數的拉普拉斯變換。單元 4.7 則是給出一些例題, 利用拉普拉斯變換的方法解微分方程式, 如果非齊次式是連續函數時, 可以和之前學過的方法兩者對照並比較優劣性。當我們看完在非齊次項是階梯函數或是脈衝函數的例子後, 更能體會拉普拉斯的厲害之處。

4.1 拉普拉斯變換的建構

拉普拉斯變換在微分方程式的理論中可說是一個全新的思維, 打破以往總是從微分方程式的原貌努力尋找方程式的解, 取而代之的是將微分方程式進行非常特殊的變形; 更仔細地說, 拉普拉斯變換會將微分算子的操作轉換成代數的次方, 於是方程式變換完之後會形成一個代數式, 透過我們對於代數式的處理手法相對成熟, 於是得到代數式的分解, 最後再逐一還原而得到微分方程式的解。

以下將試圖把上面那段話給出具體地數學描述。首先給出拉普拉斯變換的定義。

定義 **1** (第 241 頁)**.** 假設函數 $f(t)$ 的定義域是 $[0,\infty)$, 定義瑕積分

$$F(s) \overset{記}{=} \mathcal{L}\{f(t)\} \overset{定義}{=\!=\!=} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

在收斂的地方形成的函數稱爲函數 $f(t)$ 的 *拉普拉斯變換* (Laplace transform)。

以下從幾個簡單的函數出發, 得到它們的拉普拉斯變換, 藉此看出拉普拉斯變換的一些數學結構, 並建立幾個重要的拉普拉斯變換性質。

例 **2** (第 243 頁)**.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{1\}$。

解.

(A) 首先計算

$$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot 1\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \overset{s\neq 0}{=\!=\!=} \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-sb}-1\right),$$

- <u>如果 $s>0$</u>, 因爲 $\lim\limits_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-sb}=0$, 所以 $F(s) = -\frac{1}{s}\cdot(-1) = \frac{1}{s}$。
- <u>如果 $s<0$</u>, 則 $F(s) = \lim\limits_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-sb}-1\right)$ 極限不存在。

(B) <u>如果 $s=0$</u>, 因爲被積分函數 $\mathrm{e}^{-st}\cdot 1 = 1$ 滿足 $\lim\limits_{t\to\infty} 1 = 1 \neq 0$, 所以瑕積分 $F(0) = \int_0^\infty 1\,\mathrm{d}t$ 發散。

(C) 由上討論得知 $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, 其中 $F(s) = \mathcal{L}\{1\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R} | s>0\}$。

由上面的例子可以知道: 一個函數 $f(t)$ 的拉普拉斯變換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 是以 s 爲變數, 而 $F(s)$ 的定義域是指瑕積分收斂的範圍, 它並非是整個實數 $\mathbb{R}$。在 $s=0$ 的時候, 它牽涉到的問題是瑕積分 $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ 的收斂性, 因爲瑕積分收斂的必要條件是 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, 所以我們可以先從函數是否趨近於零先進行初步判斷, 就能省去一些冗長的計算與論述。至於 $s<0$ 的情況, 因爲 e^{-st} 貢獻了指數的增長, 所以若要讓瑕積分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ 收斂的話, 那麼函數 $f(t)$ 趨近於零的速度必須更快才行。

由上述觀察, 我們可以利用瑕積分的比較判別法 (Comparison Test for Improper Integral) 推論出以下結果: 假設 $f(t)\geq 0$, 若有 $s_0\in\mathbb{R}$ 使得瑕積分 $F(s_0) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t$ 發散, 則對所有 $s<s_0$, 瑕積分 $F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ 發散。

例 **3** (第 243 頁). 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{t\}$。

解. 首先計算

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot t\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}\cdot t\,\mathrm{d}t \xlongequal{s\neq 0} \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\int_0^b t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st} \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(\left[t\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(b\mathrm{e}^{-sb} + \left[\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_{t=0}^{t=b}\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{b\mathrm{e}^{-sb}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right), \end{aligned}$$

(A) 如果 $s>0$, 因為

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{b\mathrm{e}^{-sb}}{s} = \lim_{b\to\infty} -\frac{b}{s\mathrm{e}^{sb}} \xlongequal{(\frac{\infty}{\infty},L')} \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s^2\mathrm{e}^{sb}} = 0,$$

所以 $F(s) = \frac{1}{s^2}$。

(B) 如果 $s<0$, 因為被積分函數 $\mathrm{e}^{-st}\cdot t$ 滿足 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-st}\cdot t \neq 0$, 所以瑕積分 $F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot t\,\mathrm{d}t$ 發散。

(C) 如果 $s=0$, 因為被積分函數 $\mathrm{e}^{-st}\cdot t = t$ 滿足 $\lim\limits_{t\to\infty} t \neq 0$, 所以瑕積分 $F(0) = \int_0^\infty t\,\mathrm{d}t$ 發散。

(D) 由上討論得知 $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, 其中 $F(s) = \mathcal{L}\{t\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

例 **4.** 證明: 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 則 $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, 其中 $F_n(s) = \mathcal{L}\{t^n\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

證明:

(A) 當 $n=1$, 由 例 **3** 知 $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} = \frac{1!}{s^{1+1}}$ 成立, 而且 $F_1(s) = \mathcal{L}\{t\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

(B) 假設 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 時 $\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$ 成立, 而且 $F_k(s) = \mathcal{L}\{t^k\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

當 $n=k+1$, 且 $s>0$ 時,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^{k+1}\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot t^{k+1}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\int_0^b t^{k+1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st} \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(\left[t^{k+1}\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_{t=0}^{t=b} - \int_0^b \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t^{k+1}\right) \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{b^{k+1}}{s\mathrm{e}^{sb}} + \frac{k+1}{s}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}t^k\,\mathrm{d}t \xlongequal{(*)} \frac{k+1}{s}\cdot\frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{s^{(k+1)+1}}, \end{aligned}$$

其中 $(*)$ 式成立是因為: 若 $s>0$, 則

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{b^{k+1}}{s\mathrm{e}^{sb}} \xlongequal{(\frac{\infty}{\infty},L')} \lim_{b\to\infty} -\frac{(k+1)b^k}{s^2\mathrm{e}^{sb}} \xlongequal{(\frac{\infty}{\infty},L')} \cdots \xlongequal{(\frac{\infty}{\infty},L')} \lim_{b\to\infty} -\frac{(k+1)!}{s^{k+2}\mathrm{e}^{sb}} = 0。$$

注意到上述討論在 $s>0$ 的情況下成立, 故沒有改變拉普拉斯變換的定義域。

(C) 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 我們有 $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, 其中 $F_n(s) = \mathcal{L}\{t^n\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

□

例 **5** (第 243 頁)**.** 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\}$。

解**.**

(A) 如果 $s \neq a$, 則

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \overset{s\neq a}{=\!=} \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-s+a}\left[\mathrm{e}^{(-s+a)t}\right]\Big|_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-s+a}\left(\mathrm{e}^{-(s-a)b}-1\right) \overset{(*)}{=\!=} \frac{1}{s-a}, \end{aligned}$$

其中 $(*)$ 式成立 (也就是極限存在) 的條件是 $s-a>0$, 即 $s>a$。

(B) 如果 $s = a$, 則

$$F(s) = \int_0^\infty 1\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b 1\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\left[t\right]\Big|_{t=0}^{t=b} = \lim_{b\to\infty} b$$

極限不存在, 所以瑕積分發散。

(C) 綜合上述討論, 我們得到: $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, 其中 $F(s) = \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>a\}$。

接下來想要探討的是正弦函數與餘弦函數的拉普拉斯變換。在此之前, 我們要花一點時間了解不定積分 $\int \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\,\mathrm{d}t$ 與 $\int \mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\,\mathrm{d}t$。一般來說, 各位在處理這兩個不定積分時, 通常會用分部積分 (Integration by Parts) 的方法得到結果。由於指數函數對於求導的運算下有封閉性, 而正弦函數與餘弦函數兩者在求導的運算下也有封閉性, 所以在使用分部積分 $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ 的時候, 哪一個函數要當 u, 哪一個函數要當 v, 其實都是可行的。以下就各示範一次如何處理不定積分。

比方說, 在 $A\neq 0$ 的情況下計算不定積分

$$\begin{aligned} \mathtt{I}_{A,B} &\overset{記}{=} \int \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\,\mathrm{d}t \overset{A\neq 0}{=\!=} \frac{1}{A}\int \sin(Bt)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{At} = \frac{1}{A}\left(\sin(Bt)\mathrm{e}^{At} - B\int \mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{A}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) - \frac{B}{A^2}\int\cos(Bt)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{At} \\ &= \frac{1}{A}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) - \frac{B}{A^2}\left(\cos(Bt)\mathrm{e}^{At} + B\int \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{A}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) - \frac{B}{A^2}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) - \frac{B^2}{A^2}\mathtt{I}_{A,B}, \end{aligned}$$

由此得知

$$\begin{aligned} \mathtt{I}_{A,B} &= \frac{A^2}{A^2+B^2}\left(\frac{1}{A}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) - \frac{B}{A^2}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\right) \\ &= \frac{1}{A^2+B^2}\left(-B\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) + A\mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\right) + C, \end{aligned}$$

其中 $C\in\mathbb{R}$。

另一方面, 若 $B \neq 0$, 則

$$
\begin{aligned}
\amalg_{A,B} &\overset{記}{=} \int \mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\,\mathrm{d}t \overset{B\neq 0}{=\!=\!=} \frac{1}{B}\int \mathrm{e}^{At}\,\mathrm{d}\sin(Bt) = \frac{1}{B}\left(\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) - \int \sin(Bt)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{At}\right) \\
&= \frac{1}{B}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) - \frac{A}{B}\int \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{B}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) + \frac{A}{B^2}\int \mathrm{e}^{At}\,\mathrm{d}\cos(Bt) \\
&= \frac{1}{B}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) + \frac{A}{B^2}\left(\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) - \int \cos(Bt)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{At}\right) \\
&= \frac{1}{B}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) + \frac{A}{B^2}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) - \frac{A^2}{B^2}\amalg_{A,B},
\end{aligned}
$$

由此得知

$$
\begin{aligned}
\amalg_{A,B} &= \frac{B^2}{A^2+B^2}\left(\frac{1}{B}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) + \frac{A}{B^2}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\right) \\
&= \frac{A}{A^2+B^2}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) + \frac{B}{A^2+B^2}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) + C,
\end{aligned}
$$

其中 $C \in \mathbb{R}$。

有關不定積分 $\int \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\,\mathrm{d}t$ 與 $\int \mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\,\mathrm{d}t$, 這裡想要給出另外一種處理積分的方法, 也就是結合線性代數還有微積分基本定理處理問題。首先, 我們知道一個函數的不定積分是要試圖找到這個函數的反導函數, 觀察指數函數 e^{At} 的各階求導, 發現其結果都會與自身相關; 而 $\cos(Bt)$ 與 $\sin(Bt)$ 的各階求導則是會落在這兩個函數所生成出來的空間, 這意味著 $\mathrm{e}^{At}\cos(Bt)$ 與 $\mathrm{e}^{At}\sin(Bt)$ 在求導的操作上也有系統的封閉性。

於是我們先將 $\mathrm{e}^{At}\cos(Bt)$ 與 $\mathrm{e}^{At}\sin(Bt)$ 求導的結果用矩陣的方式呈現 (注意到以下矩陣表示我們先將 $\mathrm{e}^{At}\cos(Bt)$ 放在第一個, 而 $\mathrm{e}^{At}\sin(Bt)$ 放在第二個, 這樣做是想和極坐標的順序一致):

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{At}\cos(Bt) \\ \mathrm{e}^{At}\sin(Bt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{At}\cos(Bt) \\ \mathrm{e}^{At}\sin(Bt) \end{bmatrix},
$$

得到

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{At}\cos(Bt) \\ \mathrm{e}^{At}\sin(Bt) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}\cos(Bt) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}\sin(Bt) \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

根據微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus), 我們得到這兩個函數的反導函數爲

$$
\begin{bmatrix} \int \mathrm{e}^{At}\cos(Bt)\,\mathrm{d}t \\ \int \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \frac{1}{A^2+B^2}\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{At}\cos(Bt)+C \\ \mathrm{e}^{At}\sin(Bt)+C \end{bmatrix},
$$

各位可以看到上述利用矩陣的表現可以看出一些結構性, 比起分部積分的手法來說可能在 u, v 變數的選取或是正、負號與移項的判斷上減少一些出錯的可能性。

有了上述的討論, 接下來要討論的是正弦函數與餘弦函數的拉普拉斯變換。

例 **6** (第 244 頁). 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$ 與 $\mathcal{L}\{\cos(at)\}$。

解. 這裡我們感興趣的是 $a \neq 0$ 的情況 (若 $a = 0$, 則 $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = 0, \mathcal{L}\{\cos(at)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$)。因爲

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(at)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}\sin(at)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-st}\cos(at) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-st}\sin(at)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=b} \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab) + \frac{a}{s^2+a^2},\end{aligned}$$

所以它牽涉到極限 $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab)$ 是否存在的問題, 現分析如下:

(A) <u>如果 $s > 0$</u>, 因爲

$$\left|-\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab)\right| = \left|-\frac{a}{s^2+a^2}\right|\left|\mathrm{e}^{-sb}\right||\cos(ab)| \leq \frac{|a|}{s^2+a^2}\cdot\mathrm{e}^{-sb}\cdot 1 = \frac{|a|}{s^2+a^2}\cdot\mathrm{e}^{-sb}$$

且 $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{|a|}{s^2+a^2}\cdot\mathrm{e}^{-sb} = \frac{|a|}{s^2+a^2}\lim\limits_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-sb} = 0$, 所以 $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab) = 0$。此外, 因爲

$$\left|-\frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab)\right| = \left|-\frac{s}{s^2+a^2}\right|\left|\mathrm{e}^{-sb}\right||\sin(ab)| \leq \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\mathrm{e}^{-sb}\cdot 1 = \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\mathrm{e}^{-sb}$$

而且 $\lim\limits_{b\to\infty}\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\mathrm{e}^{-sb} = \frac{s}{s^2+a^2}\lim\limits_{b\to\infty}\mathrm{e}^{-sb} = 0$, 所以 $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab) = 0$。因此

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}。$$

(B) <u>如果 $s < 0$</u>, 取 $\{b_n\}_{n=1}^\infty = \{2n\pi\}_{n=1}^\infty$, 因爲

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-s\cdot 2n\pi}\cos(a\cdot 2n\pi) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-s\cdot 2n\pi}\sin(a\cdot 2n\pi) = \infty,$$

所以 $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$ 不存在。

(C) <u>如果 $s = 0$</u>, 取 $\{b'_n\}_{n=1}^\infty = \{2n\pi\}_{n=1}^\infty$, 則

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb'_n}\cos(ab'_n) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb'_n}\sin(ab'_n) = -\frac{a}{s^2+a^2},$$

另一方面, 取 $\{b''_n\}_{n=1}^\infty = \{2n\pi + \frac{\pi}{2}\}_{n=1}^\infty$, 則

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb''_n}\cos(ab''_n) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb''_n}\sin(ab''_n) = -\frac{s}{s^2+a^2},$$

因爲 $-\frac{a}{s^2+a^2} \neq -\frac{s}{s^2+a^2}$, 所以 $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab) - \frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab)$ 不存在, 於是 $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$ 不存在。

(D) 由上討論可知: $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$, 其中 $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$ 的定義域是 $\{s \in \mathbb{R} | s > 0\}$。

以下再看 $\mathcal{L}\{\cos(at)\}$。因爲

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(at)\} &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} \mathrm{e}^{-st}\cos(at)\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-st}\cos(at)+\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-st}\sin(at)\right]\Bigg|_{t=0}^{t=b}\\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab)+\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab)+\frac{s}{s^2+a^2} \overset{(*)}{=\!=} \frac{s}{s^2+a^2},\end{aligned}$$

因爲 $-\frac{s}{s^2+a^2}$ 與 $\frac{a}{s^2+a^2}$ 與 b 無關, 所以極限 $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{s}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\cos(ab)+\frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{e}^{-sb}\sin(ab)$ 的存在與否和前面的討論是一樣的; 也就是說, 如果 $s>0$, 則 $(*)$ 式才會成立。因此, $\mathcal{L}\{\cos(at)\}=\frac{s}{s^2+a^2}$, 其中 $\mathcal{L}\{\cos(at)\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

接下來要介紹的是階梯函數, 階梯函數在拉普拉斯變換中是重要的函數, 必須好好認識它。

定義 7 (第 255 頁)**.** 給定 $c\geq 0$, 定義 單位階梯函數 (unit step function) $\mathcal{U}(t-c)$ 爲

$$\mathcal{U}(t-c)=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\leq t<c\\ 1 & \text{若 } t\geq c。\end{cases}$$

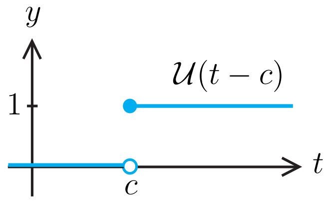

圖 4.1: 單位階梯函數 $\mathcal{U}(t-c)$。

例 8. 計算拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-c)\}$。

解.

(A) 如果 $s\neq 0$, 直接計算得到

$$\begin{aligned}F(s)=\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-c)\} &= \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\cdot\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\mathrm{e}^{-st}\cdot\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^{c}\mathrm{e}^{-st}\cdot\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t+\int_c^{b}\mathrm{e}^{-st}\cdot\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \lim_{b\to\infty}\left(\int_0^{c}0\,\mathrm{d}t+\int_c^{b}\mathrm{e}^{-st}\cdot 1\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{b\to\infty}\int_c^{b}\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \overset{s\neq 0}{=\!=} \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left[\mathrm{e}^{-st}\right]\Big|_{t=c}^{t=b}\\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-sb}-\mathrm{e}^{-sc}\right) \overset{(*)}{=\!=} \frac{\mathrm{e}^{-cs}}{s},\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 式成立的條件是 $s>0$。

(B) 如果 $s=0$, 因爲 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{U}(t-c)=1\neq 0$, 所以瑕積分 $F(0)=\int_0^{\infty}\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t$ 發散。

(C) 由上討論得知: $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-c)\}=\frac{\mathrm{e}^{-cs}}{s}$, 其中 $F(s)=\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-c)\}$ 的定義域是 $\{s\in\mathbb{R}|s>0\}$。

前面的討論都是根據拉普拉斯變換的定義還有極限的概念確定瑕積分的收斂條件。然而函數千變萬化, 我們不太可能每次遇到一個新的函數都用定義的方式操作而得到結果, 若我們知道一些通則, 則可對拉普拉斯變換有更快地認識。

以下將介紹幾個重要且一般性的拉普拉斯變換結果。在此之前, 我們要先給出幾個描述函數 $f(t)$ 的定義。

定義 9. 一個函數 $f(t): I \to \mathbb{R}$ 除了有限個數的點是不連續點外, 其它點都是連續點的話, 我們稱函數 $f(t)$ 在區間 I 上是 *分段連續函數* (piecewise continuous function)。

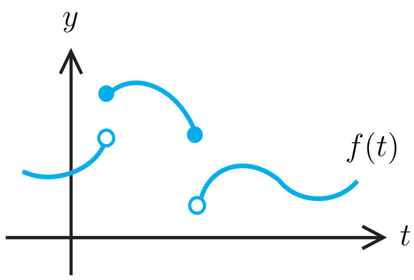

圖 4.2: 分段連續函數 $f(t)$。

定義 10 (第 242 頁)**.** 給定函數 $f(t)$, 若存在常數 $c, M > 0$, 以及 $T > 0$ 使得對所有 $t > T$ 都有 $|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{ct}$, 則稱 $f(t)$ 是 *不超過指數等級 c 成長* (exponential order c)。

定理 11 (第 242 頁)**.** 若 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上是分段連續函數並且不超過指數等級 c 成長, 則拉普拉斯變換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 在 $s > c$ 處有定義。

證明: 給定 $T > 0$, 將 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 改寫爲

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^T \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathtt{I} + \mathtt{II},$$

因爲 $\mathrm{e}^{-st} f(t)$ 在 $[0, T]$ 上是分段連續的函數, 所以積分 $\mathtt{I}$ 存在。而關於積分 $\mathtt{II}$, 它是第一類瑕積分, 進行以下估計: 因爲

$$|\mathrm{e}^{-st} f(t)| = |\mathrm{e}^{-st}||f(t)| \leq \mathrm{e}^{-st} \cdot M\mathrm{e}^{ct} = M\mathrm{e}^{-(s-c)t},$$

而

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty M\mathrm{e}^{-(s-c)t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{b\to\infty} \int_T^b M\mathrm{e}^{-(s-c)t}\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{M}{s-c}\mathrm{e}^{-(s-c)t}\right]\Bigg|_{t=T}^{t=b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{M}{s-c}\mathrm{e}^{-(s-c)b} + \frac{M}{s-c}\mathrm{e}^{-(s-c)T}\right) \overset{(*)}{=\!=} \frac{M}{s-c}\mathrm{e}^{-(s-c)T},
\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 式成立的條件是 $s > c$, 此時有 $\lim\limits_{b\to\infty} -\frac{M}{s-c}\mathrm{e}^{-(s-c)b} = 0$, 由瑕積分的比較定理 (Comparison Test for Improper Integral) 得知瑕積分 $\mathtt{II}$ 在 $s > c$ 處存在。

綜合上述討論, 我們得到 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $s > c$ 有定義。 $\square$

定理 12 (第 244 頁)**.** 拉普拉斯變換是一個 線性變換 (linear transformation)*;* 換言之, 若 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ 與 $\mathcal{L}\{g(t)\}$ 皆存在, 則對任意 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 都有

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\} = c_1 F(s) + c_2 G(s)。$$

證明: 根據定義, 我們有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}(c_1 f(t) + c_2 g(t))\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}(c_1 f(t) + c_2 g(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(c_1\int_0^b \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t + c_2\int_0^b \mathrm{e}^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t\right),\end{aligned}$$

因爲 $\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$ 以及 $\mathcal{L}\{g(t)\} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-st}g(t)\,\mathrm{d}t$ 皆存在, 所以

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(t)\} = c_1 F(s) + c_2 G(s)。$$

□

例 **13.** 證明雙曲函數的拉普拉斯變換公式爲: $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$ 與 $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$。

證明: 因爲 $\sinh(at) = \frac{\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{-at}}{2}$ 以及 $\cosh(at) = \frac{\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}}{2}$, 所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sinh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{at}-\mathrm{e}^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\} - \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-(-a)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2a}{(s-a)(s+a)} = \frac{a}{s^2-a^2}\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cosh(at)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{at}+\mathrm{e}^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\} + \mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-(-a)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2s}{(s-a)(s+a)} = \frac{s}{s^2-a^2}。\end{aligned}$$

注意到因爲 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at}\}$ 的定義域是 $\{s \in \mathbb{R} | s > a\}$, 而 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\}$ 的定義域是 $\{s \in \mathbb{R} | s > -a\}$, 所以 $\mathcal{L}\{\sinh(at)\}$ 的定義域是 $\{s \in \mathbb{R} | s > a\}$; 而 $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}$ 的定義域是 $\{s \in \mathbb{R} | s > a\}$。 □

這一個單元的最後, 我們再給出有關拉普拉斯變換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 的漸近行爲。

定理 14 (第 246 頁)**.** 若 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 分段連續且不超過指數等級成長, 記 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, 則 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$。

證明: 因爲 $f(t)$ 不超過指數等級成長, 存在 $\gamma, M_1 > 0$ 與 $T > 0$ 使得對所有 $t > T$, 都有 $|f(t)| \le M_1\mathrm{e}^{\gamma t}$。因爲 $f(t)$ 在 $0 \le t \le T$ 分段連續, 所以存在 $M_2 > 0$ 使得 $|f(t)| \le M_2 = M_2\mathrm{e}^{0\cdot t}$。令 $M = \max(M_1, M_2)$ 以及 $c = \max(0, \gamma)$, 因爲

$$|\mathrm{e}^{-st}f(t)| = |\mathrm{e}^{-st}||f(t)| \le \mathrm{e}^{-st}M\mathrm{e}^{ct} = M\mathrm{e}^{-(s-c)t}$$

而且對所有 $s > c$, 都有

$$0 \le |F(s)| \le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}|f(t)|\,\mathrm{d}t \le M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t = M\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-c)}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{s-c}。$$

因爲 $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{M}{s-c} = 0$, 故由夾擠定理 (Squeeze Theorem) 得知 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$。 □

4.2 拉普拉斯逆變換與導函數的拉普拉斯變換

前一個單元介紹的是函數 $f(t)$ 的拉普拉斯變換 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$, 這一個單元首先想要討論拉普拉斯逆變換; 也就是說, 所謂 *拉普拉斯逆變換* (inverse Laplace transform) 是指: 給定函數 $F(s)$, 我們想要找到哪一個函數 $f(t)$ 的拉普拉斯變換會是 $F(s)$。而拉普拉斯逆變換記爲 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$。

由單元 4.1 的討論, 我們整理出一些基本函數的拉普拉斯逆變換:

$F(s)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	1	t^n	e^{at}	$\sin(at)$	$\cos(at)$	$\sinh(at)$	$\cosh(at)$

搭配拉普拉斯變換的線性性質, 我們可以得到再稍微複雜一點的拉普拉斯逆變換之結果。

例 **1.** 試求拉普拉斯逆變換 (A) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$ 與 (B) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$。

解.

(A) 因爲 $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, 所以 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4!}\cdot\frac{4!}{s^5}\right\}=\frac{1}{4!}\mathcal{L}\{\frac{4!}{s^5}\}=\frac{1}{24}t^4$。

(B) 因爲 $\mathcal{L}\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$, 所以

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{s^2+(\sqrt{7})^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{7}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+(\sqrt{7})^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t)。$$

例 **2.** 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-7}{(s+1)(s-3)}\right\}$。

解. 首先將 $\frac{s-7}{(s+1)(s-3)}$ 進行分解, 假設

$$\frac{s-7}{(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-3},$$

其中 A, B 爲待定常數。將右式通分, 並將分子與左式的分子比較, 得到

$$A(s-3)+B(s+1)=s-7。$$

- 將 $s=-1$ 代入後得到 $-4A=-8$, 所以 $A=2$。
- 將 $s=3$ 代入後得到 $4B=-4$, 於是 $B=-1$。

這麼一來, 就有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-7}{(s+1)(s-3)}\right\}&=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s-3}\right\}=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\\&=2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{3t}。\end{aligned}$$

以下要介紹的定理是在說明一個函數的 n-階導函數之拉普拉斯變換與函數的拉普拉斯變換之間的關聯。

定理 **3** (第 247 頁)**.** 對於 $n \in \mathbb{N}$, 若 $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ 在 $[0, \infty)$ 連續, 並且都是不超過指數等級成長, 若 $f^{(n)}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上是分段連續函數, 則

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

其中 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$。

證明:

(A) 當 $n = 0$, 則 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$。

(B) 假設 $n = k$, k 爲非負整數時有 $\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = s^k F(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} f^{(i-1)}(0)$。

則當 $n = k + 1$ 時,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}f^{(k)}(t) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\mathrm{e}^{-st} f^{(k)}(t)\right]\Big|_{t=0}^{t=b} - \int_0^\infty f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-st} \\
&= \lim_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-sb} f^{(k)}(b) - f^{(k)}(0) + s \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(*)}{=\!=} -f^{(k)}(0) + s\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = -f^{(k)}(0) + s\left(s^k F(s) - \sum_{i=1}^{k} s^{k-i} f^{(i-1)}(0)\right) \\
&= s^{k+1} F(s) - \sum_{i=1}^{k+1} s^{k+1-i} f^{(i-1)}(0),
\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 式成立必須建立在極限 $\lim\limits_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-sb} f^{(k)}(b) = 0$, 而它是有條件的: 因爲函數不超過指數等級成長, 即存在常數 $c, M > 0$, 以及 $T > 0$ 使得對所有 $t > T$ 都有 $|f^{(k)}(t)| \le M\mathrm{e}^{ct}$, 其中 $k = 0, 1, \ldots, n-1$。若 $s > c$, 因爲

$$|\mathrm{e}^{-sb} f^{(k)}(b)| = |\mathrm{e}^{-sb}||f^{(k)}(b)| \le \mathrm{e}^{-sb} M\mathrm{e}^{cb} = M\mathrm{e}^{-(s-c)b},$$

而且 $\lim\limits_{b\to\infty} M\mathrm{e}^{-(s-c)b} = 0$, 因此 $\lim\limits_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-sb} f^{(k)}(b) = 0$。

(C) 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

對所有 n 爲非負整數時皆成立。此時, 公式成立的條件是對所有 s 滿足 $s > c$ 的地方。

□

這個定理對於微分方程式的求解非常重要, 若要使用拉普拉斯變換解微分方程式, 方法如下: 先將微分方程進行拉普拉斯變換, 由 定理 **3** 告知, 我們可以把方程式的所有資訊轉變爲 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ 還有初始條件 $f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ 的關係式, 而這個關係式可以解出 $F(s)$, 它是對於 s 的一個函數表達式, 最後再用拉普拉斯逆變換得到微分方程式的解 $f(t)$。

上述的定理是在觀察函數 $f(t)$ 與各階導函數 $f^{(n)}(t)$ 在作用拉普拉斯變換後的關聯。現在想要問的是: 給定 $f(t)$, 假設 $F(s)$ 是函數 $f(t)$ 的拉普拉斯變換, 將 $F(s)$ 對於 s 求導後得到 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)$, 將它取拉普拉斯逆變換後之結果與 $f(t)$ 的關係爲何?

定理 4 (第 254 頁)**.** 若 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ 而 $n\in\mathbb{N}$, 則

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)。$$

證明:

(A) <u>當 $n=1$ 時</u>,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F(s)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t\overset{(*)}{=\!=}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{-st}f(t))\,\mathrm{d}t=-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}tf(t)\,\mathrm{d}t\\&=-\mathcal{L}\{tf(t)\},\end{aligned}$$

注意到 $(*)$ 式成立必須建立在函數 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\mathrm{e}^{-st}f(t))=\mathrm{e}^{-st}tf(t)$ 在 $s\in[0,\infty)$ 上是均勻收斂的。

(B) 假設<u>當 $n=k, k\in\mathbb{N}$ 時</u>, 式子 $\mathcal{L}\{t^kf(t)\}=(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}F(s)$ 成立。

<u>當 $n=k+1$ 時</u>,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^{k+1}f(t)\}&=\mathcal{L}\{t\cdot t^kf(t)\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\{t^kf(t)\}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}F(s)\right)\\&=(-1)^{k+1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}s^{k+1}}F(s)。\end{aligned}$$

(C) 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知, 對所有 $n\in\mathbb{N}$, 都有

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\}=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s)。$$

□

例 5. 試求拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{t\sin(at)\}$。

解. 因爲 $\mathcal{L}\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$, 所以

$$\mathcal{L}\{t\sin(at)\}=(-1)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{a}{s^2+a^2}=\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}。$$

我們也可以用 **定理 4** 重新驗證一些結果。

例 6. 試證: 拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$。

證明: 考慮 $f(t)=1$, 則 $F(s)=\frac{1}{s}$, 於是

$$\mathcal{L}\{t^n\}=\mathcal{L}\{t^n\cdot f(t)\}=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\frac{1}{s}=(-1)^n(-1)^nn!s^{-n-1}=\frac{n!}{s^{n+1}}。$$

□

4.3 平移定理與卷積算子

在拉普拉斯變換中, 平移定理是很重要的結果, 而平移定理有兩個面向, 第一平移定理是在觀察兩個函數在經過拉普拉斯變換後若有平移關係的話, 那麼原函數之間的關聯; 至於第二平移定理則是在討論兩個函數若有平移關係的話, 那麼想要了解兩個函數在經過拉普拉斯變換之後的關係。

定理 1 (第一平移定理, First Translation Theorem, 第 260 頁)**.** 若 $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, 而 a 是任意實數, 則

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\} = F(s-a);$$

而拉普拉斯逆變換滿足 $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = \mathrm{e}^{at} f(t)$。

證明: 直接計算可得

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\mathrm{e}^{at} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = F(s-a)。$$

□

就幾何上來說, 函數 $F(s-a)$ 的圖形是把函數 $F(s)$ 的圖形向右移動 a 單位而得; 換言之, 若 $a>0$, 則 $F(s-a)$ 的圖形是把 $F(s)$ 的圖形向右 $|a|$ 單位。若 $a<0$, 則 $F(s-a)$ 的圖形是把 $F(s)$ 的圖形向左 $|a|$ 單位。

有的時候我們會把上述結果寫成 $\underline{\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{at} f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}|_{s\to s-a}}$; 也就是說, 函數 $f(t)$ 先乘上指數函數 e^{at} 再做拉普拉斯變換的結果等於函數 $f(t)$ 先做拉普拉斯變換後, 再向右平移 a 單位。

我們也可以用以下箭頭流程圖 (diagram) 的方式理解第一平移定理:

$$\begin{array}{rcl} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ \text{乘以 } \mathrm{e}^{at} \downarrow & & \downarrow \text{ 右移 } a \text{ 單位} \\ \mathrm{e}^{at} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s-a) \end{array}$$

例 2. 試求拉普拉斯變換 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{5t}t^3\}$。

解. 根據第一平移定理 (First Translation Theorem), 得到

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{5t}t^3\} = \mathcal{L}\{t^3\}\big|_{s\to s-5} = \left.\frac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-5} = \frac{6}{(s-5)^4}。$$

例 3. 試求拉普拉斯逆變換 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-2t}\cos(4t)\}$。

解. 根據第一平移定理 (First Translation Theorem), 得到

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-2t}\cos(4t)\} = \mathcal{L}\{\cos(4t)\}|_{s\to s+2} = \left.\frac{s}{s^2+4^2}\right|_{s\to s+2} = \frac{s+2}{(s+2)^2+16}。$$

除了第一平移定理的原始結果, 我們也可以從中解讀拉普拉斯逆變換的平移定理: 先將變換後的函數整理成某個標準型再平移的型式 $F(s)|_{s\to s-a}$, 那麼逆變換的結果則是把原函數 $f(t)$ 乘上 e^{at}。

例 **4.** 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\}$。

解. 直接計算可得

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s-3)^2}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-3)+11}{(s-3)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+11}{s^2}\Big|_{s\to s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{11}{s^2}\Big|_{s\to s-3}\right\}\\ &= e^{3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{11}{s^2}\right\} = e^{3t}\left(2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right) = e^{3t}(2+11t)。\end{aligned}$$

為了介紹第二平移定理, 我們需要回顧單位階梯函數 (unit step function) $\mathcal{U}(t-c)$:

$$\mathcal{U}(t-c) = \begin{cases} 0 & 若\ 0\le t<c \\ 1 & 若\ t\ge c。\end{cases}$$

對於一個分段定義的函數, 我們需要學會把它改寫成一些階梯函數的組合式。

例 **5.** 將函數 $f(t)$ 表示成階梯函數的組合。

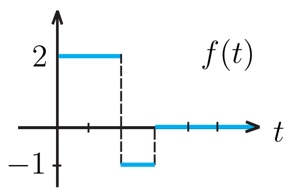

圖 4.3: 函數 $f(t)$ 可以表示成數個階梯函數的加總。

解. 若要將 $f(t)$ 表示成階梯函數的組合, 這裡提供以下兩種觀點:

- 將 $\mathcal{U}(t-c)$ 想成是在 $t=c$ 時開啟的一種裝置; 也就是說, 在 $t<c$ 的時候裝置未開啟, 在 $t\ge c$ 之後裝置是開啟的狀態, 所以若想要呈現裝置在 $[a,b)$ 這段時間開啟的話, 那麼就是 $\mathcal{U}(t-a)-\mathcal{U}(t-b)$, 利用減號將裝置關閉。至於倍數就想像成是訊號的強度, 所以圖示的 $f(t)$ 可以表示為 $f(t)=2(\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-2))-(\mathcal{U}(t-2)-\mathcal{U}(t-3))$。

- 函數 $f(t)$ 圖形的第一個階段是在水平高度為 2 的狀態, 所以先寫出 $2\mathcal{U}(t)$, 到 $t=2$ 的時候的水平高度比前一個階段來說下降三個單位, 所以用 $-3\mathcal{U}(t-2)$ 修正它, 在 $t=3$ 的時候的水平高度比前一個階段來說要上升一個單位, 所以再補上 $\mathcal{U}(t-3)$。因此, 我們得到 $f(t)=2\mathcal{U}(t)-3\mathcal{U}(t-2)+\mathcal{U}(t-3)$。

例 **6.** 將 $f(t)=\begin{cases}20t & 若\ 0\le t<5\\ 0 & 若\ t\ge 5\end{cases}$ 表示成階梯函數的組合。

解. 分段定義的函數, 用第一種開關的觀點再配上倍數可能比較好理解, 此時有

$$f(t)=20t(\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(t-5))。$$

定理 7 (第二平移定理, Second Translation Theorem, 第 257 頁)**.** 若 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ 且 $c>0$, 則

$$\mathcal{L}\{f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\}=\mathrm{e}^{-cs}F(s)。$$

若以拉普拉斯逆變換的觀點看這個結果, 則爲

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathrm{e}^{-cs}F(s)\}=f(t-c)\mathcal{U}(t-c)=f(t)\mathcal{U}(t)|_{t\to t-c}。$$

證明: 根據定義

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\}&=\int_0^c \mathrm{e}^{-st}f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t+\int_c^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\,\mathrm{d}t\\&=\int_c^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t-c)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

考慮變數變換 $v=t-c$, 則 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}t$, 積分下限爲 $v=0$, 而積分上限爲 $v=\infty$, 所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-c)\mathcal{U}(t-c)\}&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(v+c)}f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sv}\cdot\mathrm{e}^{-sc}\cdot f(v)\,\mathrm{d}v\\&=\mathrm{e}^{-cs}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-cs}F(s)。\end{aligned}$$

□

第二平移定理較常使用的情況是: 若某個函數的拉普拉斯變換可表示成 $F(s)$ 乘上 e^{-cs}, 那麼這個函數會是 $f(t)$ 乘上階梯函數 $\mathcal{U}(t)$ 之後再向右平移 c 單位。

同樣地, 我們也可以用箭頭流程圖 (diagram) 的方式理解第二平移定理:

$$\begin{array}{rcl} f(t)=f(t)\mathcal{U}(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ \text{右移 } c \text{ 單位}\downarrow & & \downarrow\text{乘上 } \mathrm{e}^{-cs} \\ f(t-c)\mathcal{U}(t-c) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathrm{e}^{-cs}F(s) \end{array}$$

例 8. 試求 $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\,\mathrm{e}^{-2s}\right\}$.

解. 因爲 $\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{4t}\}=\frac{1}{s-4}$, 記 $f(t)=\mathrm{e}^{4t}$ 與 $F(s)=\frac{1}{s-4}$, 由第二平移定理 (Second Translation Theorem) 可知:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\,\mathrm{e}^{-2s}\right\}=f(t)\mathcal{U}(t)|_{t\to t-2}=\mathrm{e}^{4(t-2)}\mathcal{U}(t-2)。$$

到目前爲止, 各位應該會發現到拉普拉斯變換是一個在兩個函數空間當中進行一個非常特殊的轉換, 每個轉換式的樣貌皆具特色, 需要靜下心來思考, 就能夠理出一個頭緒。

接下來想要問的是: 假設 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的拉普拉斯變換分別爲 $F(s)$ 與 $G(s)$, 那麼將兩個函數做什麼樣的操作再作用拉普拉斯變換結果會是 $F(s)G(s)$? 令人驚豔地是, 數學上確實找到一種操作達成此事, 這個概念我們稱爲卷積。

定義 9 (第 273 頁)**.** 若函數 f 與 g 在 $[0,\infty)$ 是分段連續函數, 記 $f*g$ 代表 f 與 g 的 卷積 (convolution), 定義爲

$$(f*g)(t) \overset{\text{定義}}{=\!=} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \left(= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (g*f)(t)\right)。$$

注意到上述定義當中關於括號部分的內容, 是經過變數變換而得的結果: 先用啞巴變數將定義寫成 $\int_{u=0}^{u=t} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u$, 考慮變數變換 $u=t-\tau$, 則 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}\tau$, 積分下限爲 $\tau=t$, 積分上限爲 $\tau=0$, 所以

$$\int_{u=0}^{u=t} f(u)g(t-u)\,\mathrm{d}u = -\int_{\tau=t}^{\tau=0} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau=0}^{\tau=t} f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = (g*f)(t)。$$

定理 10 (卷積定理)**.** 若 $f(t)$ 與 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上分段連續, 並且不超過指數等級, 則

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)。$$

這個結果反應在拉普拉斯逆變換時則爲: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)*g(t)$。

證明: 令 $F(s) = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \mathrm{e}^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 與 $G(s) = \int_{\beta=0}^{\beta=\infty} \mathrm{e}^{-s\beta} f(\beta)\,\mathrm{d}\beta$。則

$$\begin{aligned}
F(s)G(s) &= \left(\int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \mathrm{e}^{-s\tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\left(\int_{\beta=0}^{\beta=\infty} \mathrm{e}^{-s\beta} g(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\\
&= \int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{\beta=0}^{\beta=\infty} \mathrm{e}^{-s(\tau+\beta)} f(\tau)g(\beta)\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\tau \overset{(\star)}{=\!=} \int_{\tau=0}^{\tau=\infty}\int_{t=\tau}^{t=\infty} \mathrm{e}^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\\
&\overset{(*)}{=\!=} \int_{t=0}^{t=\infty}\int_{\tau=0}^{\tau=t} \mathrm{e}^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t=\infty} \mathrm{e}^{-st}\int_{\tau=0}^{\tau=t} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\\
&= \mathcal{L}\{f*g\},
\end{aligned}$$

其中 $(\star)$ 式是固定 τ 下進行變數變換 $\beta=t-\tau$, 那麼 $\mathrm{d}\beta=\mathrm{d}t$, 積分下限變成 $t=\tau$, 積分上限變成 $t=\infty$; 至於 $(*)$ 式成立則是將積分順序交換, 示意圖如下:

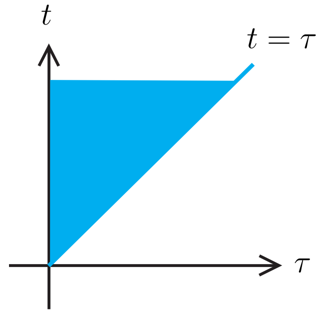

圖 4.4: 積分變數變換區域。

□

例 11. 試求 $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^\tau \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}$。

解. 記 $f(t)=\mathrm{e}^t$ 與 $g(t)=\sin t$, 則 $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s-1}$ 以及 $G(s)=\mathcal{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$, 於是

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^\tau \sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} = \mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1}。$$

例 **12.** 若考慮 $g(t)=1$ 與 $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)=\frac{1}{s}$, 則卷積定理得知函數 $f(t)$ 的積分的拉普拉斯變換及其逆變換型式爲:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}=\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}=F(s)G(s)=\frac{F(s)}{s},$$

這個結果若以拉普拉斯逆變換的角度來看, 則爲

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau。$$

這一個單元的最後想要討論週期函數的拉普拉斯變換。

定理 **13** (第 261 頁)**.** 若 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 分段連續, 且不超過指數等級, 並且具有週期 T, 則

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t。$$

證明: 因爲

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

令 $t=u+T$, 則 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}u$, 積分下限爲 $u=0$, 積分上限爲 $u=\infty$, 得到

$$\int_T^\infty \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s(u+T)}f(u+T)\,\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-sT}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-su}f(u)\,\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}。$$

因此 $\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-sT}\mathcal{L}\{f(t)\}$, 故有

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t。$$

□

例 **14.** 試求圖 4.5 所呈現的週期函數之拉普拉斯變換。

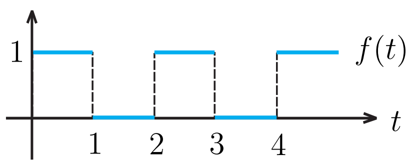

圖 4.5: 函數 $f(t)$ 是週期函數。

解**.** 因爲函數 $f(t)$ 的週期 $T=2$, 所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\int_0^2 \mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\cdot 1\,\mathrm{d}t+\int_1^2 \mathrm{e}^{-st}\cdot 0\,\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\left[-\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\right]\Bigg|_{t=0}^{t=1}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2s}}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}\right)=\frac{1}{s(1+\mathrm{e}^{-s})}。\end{aligned}$$

4.4 狄拉克函數

這一個單元想要介紹在數學上頗具特色也值得深思的概念, 稱爲狄拉克函數。爲引進此概念, 我們先從脈衝函數開始說起。

定義 1. 對於 $c>0$, 考慮 單位脈衝函數 (unit impulse function):

$$\delta_c(t-t_0)=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\le t<t_0-c\\ \frac{1}{2c} & \text{若 } t_0-c\le t<t_0+c\\ 0 & \text{若 } t\ge t_0+c\end{cases}。$$

注意到定義中所寫的「單位」, 並不是指函數值是 1, 而是指函數圖形與 t-軸之間所圍的區域面積爲 1; 更仔細地說, 由於這裡是想要介紹拉普拉斯理論, 所以我們討論 t 的範圍是選定在 $t>0$ 的部分, 對於 $t_0>0$, 我們感興趣的是對於那些 $c<t_0$ 的單位脈衝函數 $\delta_c(t-t_0)$, 在這樣的情況下, 單位脈衝函數滿足

$$\int_0^{\infty}\delta_c(t-t_0)\,\mathrm{d}t=\int_{t_0-c}^{t_0+c}\delta_c(t-t_0)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2c}\cdot 2c=1。$$

定義 2 (第 269 頁)**.** 定義 狄拉克 δ 函數 (Dirac delta function) 是單位脈衝函數的極限, 也就是:

$$\delta(t-t_0)=\lim_{c\to 0^+}\delta_c(t-t_0)。$$

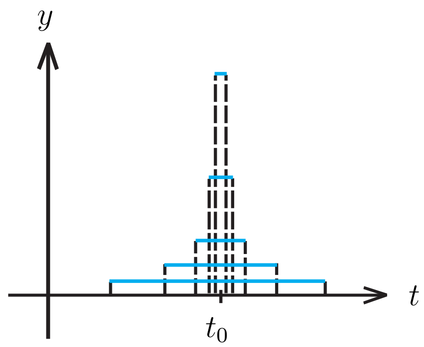

圖 4.6: 狄拉克函數在圖形上的刻畫。

爲什麼會有狄拉克函數的產生? 起因是來自於早期物理學家在探討一些物理現象並建立理論時, 習慣以理想狀態的方式去探討, 比方說在現實生活中的一個物體考慮極限化後就變成質點, 在這些物理理論的建構中就會發現將單位脈衝函數取極限是一個必要的過程, 於是定義了狄拉克函數。

各位在看完狄拉克函數的定義後, 想必會覺得這件事情很莫名其妙, 這個定義和我們平常認識的函數 (function) 是無法對應的。以我們對於函數的了解, 首先要給出定義域與對應域, 而函數必須要求在定義域上的每個元素都要指定對應域上唯一的元素, 在這個概念下, 若選取定義域爲 $\{t\in\mathbb{R}|t>0\}$ 然後對應域是 $\mathbb{R}$ 的話, 先將 $\delta(t-t_0)=\lim\limits_{c\to 0^+}\delta_c(t-t_0)$ 以逐點收斂 (pointwise convergent) 的意義去討論狄拉克函數的時候, 會得到

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & \text{若 } t=t_0\\ 0 & \text{若 } t\ne t_0,\end{cases}$$

所以 $\delta(t-t_0)$ 在 $t=t_0$ 處無法對應到一個實數; 換言之, 狄拉克函數並非我們平常認知的「函數」。

就如上面的討論, 這件事情對數學家來說曾經是一個無法跨過去的障礙, 我們到底要不要把這個玩意也叫做「函數」? 只因爲這個玩意經常討論且使用然後就把函數的概念重新設定嗎? 還是說物理學家經常使用的這個玩意有沒有可能給出另外一個解釋的方式好讓所有事情合理化?

而這件事情經過相當長的一段時間, 最終數學家得到了滿意的答案。若要了解狄拉克 δ 函數, 那麼需要藉助線性代數還有泛函分析 (functional analysis) 的理論才有辦法說清楚。

線性代數的理論中, 我們也會研究具有內積結構的向量空間, 稱爲內積空間 (inner product space) $(V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, 對於內積空間 $(V^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的線性泛函 $(V^n)^*$, 也就是 V^n 的對偶空間 (dual space), 裡面的元素 $F \in (V^n)^*$ 可以用瑞斯表現定理 (Riesz Representation Theorem) 呈現: 對於 $F \in (V^n)^*, F: V^n \to \mathbb{R}$, 存在唯一 $\mathbf{u} \in V^n$ 使得對所有 $\mathbf{v} \in V^n$ 都有 $F(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$。

至於泛函分析, 若要一言以蔽之去解釋, 它是在研究無窮維向量空間的理論, 所以該理論是奠基於線性代數之上, 配合著微積分 (因爲牽涉到無窮, 就要從極限的角度去看它) 進行討論。在數學家的眼中, 狄拉克 δ 函數並不是函數, 而是要從線性泛函的角度看待它才說得通: 考慮 $C([0,\infty))$ 是所有定義在 $[0,\infty)$ 上的連續函數所成的集合, 它形成一個向量空間。然後考慮 $C([0,\infty))$ 的對偶空間 $(C([0,\infty)))^*$ 中的元素, 也就是 $F_{t_0}: C([0,\infty)) \to \mathbb{R}$, 定義爲 $F_{t_0}(\varphi) \overset{\text{定義}}{=\!=} \varphi(t_0)$, 根據泛函分析版本的瑞斯表現定理 (Riesz Representation Theorem), 存在唯一元素 $\delta(t-t_0)$ 使得以下 $(*)$ 式成立:

$$F_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0) \overset{(*)}{=\!=} \int_0^\infty \delta(t-t_0)\varphi(t)\,\mathrm{d}t。$$

各位在看完上段文字之後不應感到過度恐慌, 本來已經提起興致想要認識狄拉克函數卻因爲上面這段文字又讓人更摸不著頭緒。關於瑞斯表現定理的 $(*)$ 式, 或許我們用機率的角度看它應該會覺得很自然, 比方說我們把單位脈衝函數想成是在 (t_0-c, t_0+c) 之間的均勻分布機率密度函數, 當 c 變小的時候, 事件發生的區域集中在 (t_0-c, t_0+c) 之間, 而函數變高代表著那個範圍內受到更高的權重 (weight), 而我們想要計算的積分值則對應於整個隨機事件的期望值 (expectation)。所以 $\delta(t-t_0)$ 指的是當權重全部集中在 $t=t_0$ 上, 那麼就會顯現出 $\varphi(t_0)$ 這個值。

介紹完狄拉克函數之後, 這裡需要討論的是狄拉克函數的拉普拉斯變換。

定理 3 (第 270 頁)**.** *對於 $t_0 > 0$, 狄拉克函數的拉普拉斯變換爲:*

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \mathrm{e}^{-st_0}。$$

證明: 因爲 $\delta_c(t-t_0) = \frac{1}{2c}\left(\mathcal{U}(t-(t_0-c)) - \mathcal{U}(t-(t_0+c))\right)$, 所以

$$\mathcal{L}\{\delta_c(t-t_0)\} = \frac{1}{2c}\left(\frac{\mathrm{e}^{-s(t_0-c)}}{s} - \frac{\mathrm{e}^{-s(t_0+c)}}{s}\right) = \mathrm{e}^{-st_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sc}-\mathrm{e}^{-sc}}{2sc}\right)。$$

因此

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} &= \lim_{c\to 0^+}\mathcal{L}\{\delta_c(t-t_0)\} = \lim_{c\to 0^+}\mathrm{e}^{-st_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{sc}-\mathrm{e}^{-sc}}{2sc}\right)\\ &\overset{(\frac{0}{0},L')}{=\!=\!=} \mathrm{e}^{-st_0}\cdot\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{s\mathrm{e}^{sc}+s\mathrm{e}^{-sc}}{2s}\right) = \mathrm{e}^{-st_0}\cdot\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{\mathrm{e}^{sc}+\mathrm{e}^{-sc}}{2}\right) = \mathrm{e}^{-st_0}。\end{aligned}$$

□

4.5 拉普拉斯變換表

這個單元是整理出基本函數的拉普拉斯變換以及幾個重要結果:

編號	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	註記
1.	1	$\frac{1}{s},\ s>0$	常數函數
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a},\ s>a$	指數函數
3.	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	多項式
*4.	$t^p,\ p>-1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}},\ s>0$	冪函數
5.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$	三角函數
6.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$	三角函數
*7.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$	雙曲函數
*8.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2},\ s>\lvert a\rvert$	雙曲函數
9.	$\mathrm{e}^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$	指數函數與三角函數相乘
10.	$\mathrm{e}^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$	指數函數與三角函數相乘
11.	$\mathrm{e}^{at}t^n, n\in\mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a$	指數函數與多項式相乘
12.	$\mathrm{e}^{at}f(t)$	$F(s-a)$	第一平移定理
13.	$\mathcal{U}(t-c)$	$\frac{\mathrm{e}^{-cs}}{s},\ s>0$	單位階梯函數
14.	$f(t-c)\mathcal{U}(t-c)$	$\mathrm{e}^{-cs}F(s)$	第二平移定理
15.	$f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$	圖形左右伸縮
16.	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	函數積分
17.	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F(s)G(s)$	卷積 $f*g$
18.	$\delta(t-c)$	e^{-cs}	狄拉克函數
19.	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{i=0}^{n-1}s^{n-1-i}f^{(i)}(0)$	各階導函數
20.	$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$	乘上 t^n
21.	$c_2f(t)+c_2g(t)$	$c_1F(s)+c_2G(s)$	線性組合

4.6 伽瑪函數

在單元 4.5 的表格編號 4. 中, 出現符號 $\Gamma(p+1)$, 現介紹如下:

定義 1. 考慮 伽瑪函數 (gamma function), 定義爲

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx。$$

首先我們要確定所有讓伽瑪函數有意義的 p 值; 也就是瑕積分收斂的範圍。

例 2 (第 245 頁)**.** 證明: 伽瑪函數在 $p>-1$ 時有意義; 也就是說, 在 $p>-1$ 的時候瑕積分收斂。

證明: 首先確定瑕積分的位置: (A) 若 $p<0$, 則 $x=0$ 是瑕點。(B) 對所有 $p\in\mathbb{R}$, $x=\infty$ 是瑕點。將瑕積分拆解成兩部份

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^pe^{-x}\,dx=\int_0^1 x^pe^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^pe^{-x}\,dx=\mathtt{I}+\mathtt{II},$$

現分別討論 $\mathtt{I}$ 和 $\mathtt{II}$ 的收斂性。

(A) <u>若 $p\geq 0$</u>, 則 $\mathtt{I}$ 是定積分。
<u>若 $p<0$</u>, 因爲在 $x\in[0,1]$ 上有不等式 $e^{-1}\leq e^{-x}\leq 1$, 所以

$$0\leq x^pe^{-1}\leq x^pe^{-x}\leq x^p。$$

(A1) <u>若 $-1<p<0$</u>, 因爲 $\int_0^1 x^p\,dx$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\mathtt{I}$ 收斂。

(A2) <u>若 $p\leq -1$</u>, 因爲 $\int_0^1 x^pe^{-1}\,dx$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\mathtt{I}$ 發散。

(B) 這裡先證明: 對所有 $p\in\mathbb{R}$, 極限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{p+2}e^{-x}=0$。現分成以下兩種情況討論:

(B1) <u>若 $p+2\leq 0$</u>, 則

$$\lim_{x\to\infty}x^{p+2}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{-(p+2)}e^x}=0。$$

(B2) <u>若 $p+2>0$</u>,

$$\lim_{x\to\infty}x^{p+2}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p+2}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{p+2}}}\right)^{p+2}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{p+2}}}\right)^{p+2}$$
$$\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=\!=}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{p+2}e^{\frac{x}{p+2}}}\right)^{p+2}=0。$$

因爲 $\lim\limits_{x\to\infty}x^{p+2}e^{-x}=0$, 所以存在 $X=X(p)>1$ 使得對所有 $x>X$ 都有 $x^{p+2}e^{-x}<1$, 得到在 $x>X$ 有不等式 $0\leq x^pe^{-x}<\frac{1}{x^2}$。因爲 $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$ 收斂, 所以由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 對所有 $p\in\mathbb{R}$, 瑕積分 $\mathtt{II}$ 收斂。

(C) 綜合 (A) 與 (B) 的討論知: 瑕積分 $\Gamma(p+1)=\int_0^\infty x^pe^{-x}\,dx$ 在 $p>-1$ 時收斂。

$\square$

伽瑪函數有很多的性質, 現整理以下兩個重要特色:

定理 **3** (伽瑪函數的性質, 第 245 頁)**.**

(A) $\Gamma(1)=\Gamma(0+1)=1$。

(B) 對於 $p>0$, $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$。

證明:

(A) 直接計算得到

$$\begin{aligned}\Gamma(1)=\Gamma(0+1)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cdot x^0\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to\infty}\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]\Big|_{x=0}^{x=b}\\&=\lim_{b\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-b}+1\right)=1。\end{aligned}$$

(B) 對於 $p>0$,

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^p\,\mathrm{d}x=-\lim_{b\to\infty}\int_0^b x^p\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\lim_{b\to\infty}\left(\Big[x^p\mathrm{e}^{-x}\Big]\Big|_{x=0}^{x=b}-\int_0^b \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x^p\right)\\&=-\lim_{b\to\infty}b^p\mathrm{e}^{-b}+\lim_{b\to\infty}p\int_0^b \mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\,\mathrm{d}x\overset{(*)}{=\!=}p\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{p-1}\,\mathrm{d}x=p\Gamma(p),\end{aligned}$$

其中 $(*)$ 式成立的原因是

$$-\lim_{b\to\infty}b^p\mathrm{e}^{-b}=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{\mathrm{e}^{\frac{b}{p}}}\right)^p=-\left(\lim_{b\to\infty}\frac{b}{\mathrm{e}^{\frac{b}{p}}}\right)^p\overset{(\frac{\infty}{\infty},L')}{=\!=\!=\!=}-\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{p}\mathrm{e}^{\frac{b}{p}}}\right)^p=0。$$

□

在數學上, 伽瑪函數是將階乘連續化 (光滑化) 的一種方法, 這裡我們花一點時間討論伽瑪函數與階乘的關係: 從 (B) 的證明中看到, 我們利用分部積分的原理推導出 $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$, 其中 $p>0$, 所以若我們特別將 p 代入正整數 n 再配合 (A) 的結果: $\Gamma(1)=1=0!$ 就可以得到伽瑪函數與階乘的關係, 即 $\Gamma(n+1)=n!$; 也就是說, $\Gamma(\bullet+1)=\bullet!$, 其中 $\bullet$ 可代入任何非負整數。

此外, 由 (B) 這個遞迴關係式也說明伽瑪函數在代入的兩個變數之間若相差整數的話, 那麼伽瑪函數的值也有關係, 所以對於伽瑪函數 $\Gamma(p+1)$, 我們只要知道伽瑪函數在 $-1<p\leq 0$ 上的取值, 就可以推出伽瑪函數在任何 $p>0$ 的值。

在數學的進程上, 數學家曾經提出一個問題: 伽瑪函數是唯一將非負整數階乘連續化 (光滑化) 的方法嗎? 關於這個問題, 如果從幾何的圖形來看應該很容易得到結論: 若在坐標平面上指定一些點的分佈, 則會有無限多條光滑曲線連接這些點。換言之, 若只要求把整數階乘光滑化的話, 伽瑪函數並非唯一的選擇。而 定理 **3** 當中關於 (B) 的性質說明在不是整數點且相差整數單位的點的取值也要求彼此有關係這件事情似乎大大限制了函數的形狀, 但經過一些討論後也發現它不足以給出伽瑪函數的刻畫, 於是, 數學家還想要繼續嶼找一些更特別或更好的性質, 在那樣的範疇下完全刻畫伽瑪函數。

從伽瑪函數的圖形來看, 我們發現到它是一個凸函數 (convex function), 所以我們可以問的下一個問題是: 伽瑪函數會是唯一把階乘光滑化的凸函數嗎? 這個答案其實也是否定的。數學家當然對此不死心, 又經過一段時間, 這個問題最終得到了滿意的答案:

定理 (玻爾-莫勒魯普定理, Bohr-Mollerup Theorem[1]). 如果 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 滿足以下三個條件:

(1) $f(1)=1$;

(2) $f(x+1)=xf(x)$;

(3) $\ln f(x)$ 是凸函數;

則 $f(x)=\Gamma(x)$。

在簡單介紹完伽瑪函數之後, 這裡我們感興趣的是伽瑪函數與拉普拉斯變換之間的關係。首先, 我們證明單元 4.5 的表格編號 4. 之結果。

例 **4** (第 245 頁)**.** 給定 $p>-1$, 試證: $\mathcal{L}\{t^p\}=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$。

證明: 根據定義, 我們有 $\mathcal{L}\{t^p\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\cdot t^p\,\mathrm{d}t$。固定 $s>0$, 考慮變數變換 $u=st$, 則 $t=\frac{u}{s}$ 且 $\mathrm{d}u=s\,\mathrm{d}t$, 積分下限爲 $u=0$, 積分上限爲 $u=\infty$, 則

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^p\}&=\int_{t=0}^{t=\infty}\mathrm{e}^{-st}\cdot t^p\,\mathrm{d}t=\int_{u=0}^{u=\infty}\mathrm{e}^{-u}\cdot\left(\frac{u}{s}\right)^p\cdot\frac{1}{s}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{s^{p+1}}\int_{u=0}^{u=\infty}\mathrm{e}^{-u}u^p\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x}x^p\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}。\end{aligned}$$

□

除了冪函數的拉普拉斯變換之一般式與伽瑪函數有關, 對於某些特別的 p 值我們可以確實求出其值。以下就示範如何得到 $\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}$。

例 **5** (第 246 頁)**.** 證明 $\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}=\sqrt{\frac{\pi}{s}}, s>0$。

證明: 因爲 $\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-st}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$, 固定 $s>0$, 考慮變數變換 $u=\sqrt{st}$, 則 $\mathrm{d}u=\sqrt{s}\cdot\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$, 而積分下限爲 $u=0$, 積分上限爲 $u=\infty$, 於是

$$\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\}=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-st}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t=\int_{u=0}^{u=\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{s}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

注意到上述的討論中, 我們用到一個非常經典的瑕積分結果:

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

至於這個結果就留給各位自行延伸閱讀, 網路上或是一些經典的數學分析書籍都有相關的討論。 □

[1]神奇的伽瑪函數, 靳志輝著, 高等教育出版社, 2018。

4.7 利用拉普拉斯變換解微分方程式

拉普拉斯變換可以處理帶有初始條件的常微分方程式, 特別是非齊次項是分段連續的函數甚至是狄拉克函數的情形。利用拉普拉斯變換處理微分方程式的流程如下:

$$\begin{array}{ccc} \text{欲解微分方程 } F(t,y,y',\ldots,y^{(n)})=0 & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{將方程式轉變成 } Y(s) \text{ 的代數式} \\ ?\downarrow & & \downarrow \\ \text{得到微分方程式的解 } y(t) & \xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}} & \text{求出 } Y(s) \text{ 的代數解} \end{array}$$

拉普拉斯變換的特色在於: 微分方程式經過拉普拉斯變換下會轉變成代數式; 利用代數的操作及其理論, 再反應回方程式的解。以下將示範如何用拉普拉斯變換求微分方程式的解。

例 **1.** 試解初始值問題:

$$y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{-4t},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=5。$$

解**.** 先將方程式的兩邊進行拉普拉斯變換, 得到

$$\begin{aligned} & s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3(sY(s)-y(0))+2Y(s)=\frac{1}{s+4} \\ \Rightarrow\ & s^2Y(s)-s-5-3(sY(s)-1)+2Y(s)=\frac{1}{s+4} \\ \Rightarrow\ & (s^2-3s+2)Y(s)=\frac{1}{s+4}+s+2=\frac{s^2+6s+9}{s+4}, \end{aligned}$$

整理後得到

$$Y(s)=\frac{s^2+6s+9}{(s+4)(s^2-3s+2)}=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}。$$

將右式通分後並比較分子得 $A(s-1)(s-2)+B(s+4)(s-2)+C(s+4)(s-1)=s^2+6s+9$。

- 代入 $s=-4$, 得到 $30A=16-24+9=1$, 於是 $A=\frac{1}{30}$。
- 代入 $s=1$, 得到 $-5B=1+6+9=16$, 於是 $B=-\frac{16}{5}$。
- 代入 $s=2$, 得到 $6C=4+12+9=25$, 於是 $C=\frac{25}{6}$。

所以我們得到

$$Y(s)=\frac{1}{30}\frac{1}{s+4}-\frac{16}{5}\frac{1}{s-1}+\frac{25}{6}\frac{1}{s-2},$$

將函數兩邊取拉普拉斯逆變換之後得到

$$\begin{aligned} y(s) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{30}\frac{1}{s+4}-\frac{16}{5}\frac{1}{s-1}+\frac{25}{6}\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}-\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} \\ &= \frac{1}{30}\mathrm{e}^{-4t}-\frac{16}{5}\mathrm{e}^{t}+\frac{25}{6}\mathrm{e}^{2t}。 \end{aligned}$$

例 **2.** 試解初始值問題:

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 17。$$

解. 先將方程式的兩邊進行拉普拉斯變換, 得到

$$\begin{aligned}
& s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3} \\
\Rightarrow\ & s^2 Y(s) - 2s - 17 - 6(sY(s) - 2) + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3} \\
\Rightarrow\ & (s^2 - 6s + 9)Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s + 5,
\end{aligned}$$

整理後得到

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2s+5}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2(s-3)+11}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2}。$$

將函數兩邊取拉普拉斯逆變換之後得到

$$\begin{aligned}
y(s) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{(\frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3} + \frac{11}{(s-3)^2}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{4!} \cdot \frac{4!}{(s-3)^5} + 2 \cdot \frac{1}{s-3} + 11 \cdot \frac{1}{(s-3)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{12}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + 11\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{12}t^4 e^{3t} + 2e^{3t} + 11te^{3t}。
\end{aligned}$$

前面的兩個例子, 我們都可以用之前介紹的求解法得到答案, 比方說它們都是二階線性常係數微分方程式, 所以首先用特徵方程式的方法得到二階線性常係數齊次微分方程式的解, 然後再試圖尋求這個方程式的特解。至於特解的找法, 我們可以利用未定係數法, 也可以用參數變動法, 這麼一來就可以得到關於微分方程式的一般解。

除了上述方法外, 我們也曾初步介紹了微分算子的理論, 將等式的左邊進行對於微分算子與係數混合的組合式之因式分解, 將微分方程式視爲未知函數作用了兩個一階微分算子, 這麼一來, 就可以用一階微分方程式的求解法逐一拆掉一階微分算子而得到最後答案。

這裡應註記的是: 雖然前面兩個例子都是二階線性微分方程式, 但這些方法都可以推廣至高階線性微分方程式。拉普拉斯變換也是如此, 由於導函數的拉普拉斯變換公式是對任意階求導都有的結果, 各位在日後若遇到高階微分方程式的問題時, 也可以考慮用拉普拉斯變換法處理。

到目前爲止, 或許你還看不出拉普拉斯變換到底有什麼厲害之處, 你可能只是覺得它是有一點酷炫的東西, 將微分方程式做一個很奇怪的變形, 經過整理並重新拆解後再還原竟然和以前的解法所得的答案一致。而拉普拉斯變換的厲害之處在於我們可以用它解非齊次項是分段連續函數甚至是狄拉克函數的情形。

以下就用兩個例子示範如何用拉普拉斯變換解決非齊次項並非一般的連續函數的微分方程式之初始值問題。

例 **3.** 試解微分方程式 $y' + y = g(t), y(0) = 5$, 其中 $g(t) = \begin{cases} 0 & 若\ 0 \le t < \pi \\ 3\cos t & 若\ t \ge \pi \end{cases}$。

解. 先將方程式的兩邊進行拉普拉斯變換, 得到

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \mathcal{L}\{g(t)\},$$

注意到 $3\cos t = -3\cos(t-\pi)$, 所以 $\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{-3\cos(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)\} = -3\mathrm{e}^{-\pi s} \cdot \frac{s}{s^2+1}$, 於是

$$(s+1)Y(s) = 5 - 3\mathrm{e}^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

得到

$$Y(s) = \frac{5}{s+1} - 3\mathrm{e}^{-\pi s}\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{5}{s+1} - 3\mathrm{e}^{-\pi s}\left(\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}\right),$$

欲解 A, B, C, 將式子通分並比較分子得到 $A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1) = s$。

- 取 $s = -1$, 則 $2A = -1$, 所以 $A = -\frac{1}{2}$。
- 取 $s = 0$, 則 $A + C = 0$, 所以 $C = \frac{1}{2}$。
- 取 $s = 1$, 則 $2A + 2(B+C) = 1$, 所以 $B = \frac{1}{2}$。

於是

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{5}{s+1} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\pi s}\left(-\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+1}\right) \\ &= \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\pi s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)。\end{aligned}$$

將函數兩邊取拉普拉斯逆變換之後得到

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\pi s}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right\} \\ &= 5\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{-t} - \cos t + \sin t\right)\mathcal{U}(t)\big|_{t \to t-\pi} \\ &= 5\mathrm{e}^{-t} + -\frac{3}{2}\left(\mathrm{e}^{-(t-\pi)} - \cos(t-\pi) - \sin(t-\pi)\right)\mathcal{U}(t-\pi)。\end{aligned}$$

例 **4.** 試解微分方程式 $y'' + y = 4\delta(t-2\pi)$, 其中 $y(0) = 1, y'(0) = 0$。

解. 先將方程式的兩邊進行拉普拉斯變換, 得到

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 4\mathrm{e}^{-2\pi s} \Rightarrow (s^2+1)Y(s) = 4\mathrm{e}^{-2\pi s} + s$$

整理後得到

$$Y(s) = \frac{4\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1},$$

將函數兩邊取拉普拉斯逆變換之後得到

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\right) = 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2\pi s}}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\ &= 4\sin t\,\mathcal{U}(t)|_{t\to t-2\pi} + \cos t = 4\sin(t-2\pi)\mathcal{U}(t-2\pi) + \cos t。\end{aligned}$$