微分方程講義第 3 章

授課教師　李國瑋

目錄

3

二階線性微分方程式

這一章主要是想探討二階線性微分方程式, 包括其數學理論還有相關的應用。單元 3.1 是給出二階線性微分方程式的定義, 由此引出二階線性微分方程式初始值問題解的存在性與唯一性定理。關於這個定理的證明, 我們將在單元 3.8 仔細介紹。另一方面, 有關二階線性微分方程式也可以討論邊界值問題, 但這類問題不見得有解的存在性; 而且就算邊界值問題有解, 解也不見得有唯一性。關於邊界值問題解的存在唯一性的討論是在單元 3.7 進行說明。

單元 3.2 主要是給出二階線性齊次微分方程式的一般理論, 特別是研究解空間的結構。透過二階線性微分方程式初始值問題解的存在唯一性定理, 對於一個二階線性齊次微分方程式來說, 若設定好特別的初始值, 那麼就可以得到兩個彼此線性獨立的解, 然後再透過疊加原理, 就能證明二階線性微分方程式的解都可以表示成兩個線性獨立的解之線性組合, 這麼一來就可以得知這個解空間形成二維向量空間。由此也可看出微分方程與線性代數之間有著密切的關聯。

單元 3.3 則是給出二階線性常係數齊次方程式的分類理論。透過特徵方程式, 它是一個一元二次方程式, 所以得到方程式的根有三種類型 — 兩相異實根、兩重根、兩共軛複根 — 於是就可以分別將微分方程式的根求得, 甚至能從中將解空間對於線性代數的結構看得更清楚。由此還可以再過渡到單元 3.4 以進一步了解二階線性常係數非齊次方程式的解。在求解的技術上, 若非齊次的部分對於求導的操作具有封閉性的話, 可以考慮使用未定係數法以得到特解, 而一般來說, 我們都可以考慮使用參數變動法以求出特解, 於是整體而言, 二階線性常係數非齊次方程式的解會是齊次解與特解之和, 由此也可以看出齊次式的解空間與非齊次的解空間之間的關係。

在徹底了解二階線性常係數齊次方程式之後, 對於係數不見得是常數的情形下也可以進一步認識。單元 3.5 首先介紹柯西-歐拉方程式, 它可以用微分算子的觀念配合二階線性常係數齊次方程式的理論立刻得到結果。此外, 對於二階線性一般係數的方程式, 若能先得到一個齊次式的解, 就可以用降階法得到另一個與前者線性獨立的解, 然後再用參數變動法的原理得到二階線性一般係數方程式的解。

在數學上, 討論二階線性微分方程式的原因在於這類的微分方程式可以把解確實地寫出來, 並且當中有一些數學理論值得探討, 特別是解空間具有線性代數的結構。在物理上, 二階線性微分方程式自微積分發展的過程中就已被用來了解許多自然界的現象, 例如牛頓第二運動定律、虎克定律 — 彈簧伸縮位置與施力大小、方向之間的關係、簡單電路的電流與電壓之間的關聯等諸多應用。單元 3.6 用了一些篇幅仔細介紹彈簧伸縮的模型還有電路學的原理。所以二階微分方程式比起一階微分方程式而言內容更爲豐富, 也更廣泛地探討。

3.1 二階線性微分方程式簡介

所謂 *二階線性微分方程式* (second-order linear differential equation) 的一般式爲

$$P(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+Q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+R(x)y(x)=G(x),$$

其中 $P(x),Q(x),R(x)$ 與 $G(x)$ 在某個區間 I 上是連續函數。這裡我們預設 $P(x)\not\equiv 0$, 否則這個方程式就退化爲一階線性微分方程式了。既然 $P(x)$ 不恆爲零, 對於那些 $P(x)$ 非零的點, 由函數的連續性得知必存在一個開區間 I 使得 $P(x)\neq 0$。這時, 在區間 I 上我們可以把二階線性微分方程式改寫成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x), \tag{1}$$

其中 $q(x)=\frac{Q(x)}{P(x)},r(x)=\frac{R(x)}{P(x)},g(x)=\frac{G(x)}{P(x)}$。在討論二階線性微分方程式的數學理論時, 通常會先研究方程式 (1), 而那些 $P(x)=0$ 的點, 稱爲 *奇異點* (singular points), 將留到之後的章節再討論奇異點的分析。

關於二階線性微分方程式, 一般來說會探討兩類問題, 一個是 *初始值問題* (initial value problem): 給定微分方程式之後, 再額外要求某個點的函數值及其導數, 然後問在該點附近是否存在唯一方程式的解; 也就是說, 我們會考慮

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x),\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0', \tag{2}$$

其中 y_0 與 y_0' 是給定的實數。若 $q(x),r(x)$ 與 $g(x)$ 在某個包含 x_0 的區間上都是連續函數, 則有微分方程初始值問題解的存在唯一性定理。在此先給出定理的敘述, 關於這個定理的證明我們會在最後一個單元仔細討論。

定理 1 (第 108 頁)**.** *對於初始值問題 (2), 若 $q(x),r(x)$ 與 $g(x)$ 在某個包含 x_0 的開區間 I 上都是連續函數, 則在區間 I 上存在唯一函數 $y=\phi(x)$ 滿足 (2) 式。*

另一類問題稱爲 *邊界值問題* (boundary value problem), 它是在探討以下情況的解:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x),\quad y(x_a)=y_a,\quad y(x_b)=y_b,$$

其中 $y(x_a)=y_a$ 與 $y(x_b)=y_b$ 稱爲 *邊界值條件* (boundary value conditions)。我們通常會專注於介在 x_a 與 x_b 之間是否有函數滿足微分方程式與邊界值條件 (所以 x_a 與 x_b 是區間的邊界), 當然我們也可以繼續追問微分方程式的解是否可以延拓到區間 I 的外部。

這裡先註記一件事, 二階線性微分方程式的邊界值問題不見得有解的存在性; 此外, 就算邊界值問題有解, 解也不一定唯一, 我們會在單元 3.7 討論這個問題。

爲了之後理論的介紹, 我們會根據函數 $g(x)$ 再將微分方程式細分成兩種情況:

(A) 若 $g(x)\equiv 0$, 稱微分方程式 (1) 是 *齊次* (homogeneous) 的。

(B) 若 $g(x)\neq 0$, 稱微分方程式 (1) 是 *非齊次* (nonhomogeneous) 的。

3.2 二階線性齊次微分方程式的一般理論

本單元要討論二階線性齊次微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=0, \tag{1}$$

這個方程式被冠名爲線性 (linear) 與齊次 (homogeneous) 的原因在於方程式的解空間有很好的線性結構, 可以透過線性代數的理論加以理解。爲了要仔細說明這個概念, 我們先從以下 *疊加原理* (principle of superposition) 開始說起, 它是關於方程式 (1) 解空間的一個最初步觀察。

定理 **1** (第 110 頁)**.** 假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 (1) 的解, 任給兩實數 c_1 與 c_2, 函數 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 也是方程式 (1) 的解。

證明: 對於 $i=1,2$, 我們有 $y_i''(x)+q(x)y_i'(x)+r(x)y_i(x)=0$, 直接計算得到

$$\begin{aligned}
&y''(x)+q(x)y'(x)+r(x)y(x)\\
&=(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))''+q(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))'+r(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))\\
&=(c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x))+q(x)(c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x))+r(x)(c_1y_1(x)+c_2y_2(x))\\
&=c_1(y_1''(x)+q(x)y_1'(x)+r(x)y_1(x))+c_2(y_2''(x)+q(x)y_2'+r(x)y_2(x))\\
&=c_1\cdot 0+c_2\cdot 0=0。
\end{aligned}$$

□

在繼續探討二階線性齊次微分方程式解空間的結構之前, 這裡想先給出另一個註記: 由 *定理* **1** 證明當中的計算知道: 如果 c_1 與 c_2 改成複數的話, 等式也都成立。這個觀察會在之後的討論用到。

關於 *定理* **1** 的實質意義, 我們必須從線性代數的觀點說起。給定區間 I, 考慮定義在區間 I 上的函數收集而成的集合, 稱爲函數空間, 比方說記爲 $V(I)$, 對函數空間 $V(I)$ 而言, 若我們把函數空間中的一個元素 (函數 $f(x)$) 想成是一個向量 $\mathbf{u}$, 兩個函數相加 $(f+g)(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}f(x)+g(x)$ 理解成兩向量相加 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, 還有函數的常數倍 $(cf)(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}cf(x)$ 理解爲向量的倍數伸縮 $c\,\mathbf{u}$, 在這個對應下可驗證函數空間 $V(I)$ 會滿足向量空間 (vector space) 的所有規則, 於是函數空間 $V(I)$ 是一個向量空間。在這個意義下, 對於 *定理* **1** 疊加原理的一個解釋是: 二階線性齊次微分方程式的解空間是函數空間 $V(I)$ 中的一個向量子空間 (vector subspace)。

在確定二階線性齊次微分方程式的解空間是一個向量空間後, 自然會問的下一個問題是: 這個向量空間的維度是多少? 與此相關的一個更實質的問題是: 給定一個二階線性齊次微分方程式, 如何在這個解空間中確實找到一組基底?

因爲處處爲零的常數函數滿足這個二階線性齊次微分方程式; 也就是說, 若將處處爲零的常數函數視爲零向量, 則零向量屬於解空間。如果可以找到一個並非處處爲零的函數 (視爲一個非零向量) 滿足方程式的話, 那麼根據疊加原理, 這個向量的常數倍也都屬於解空間, 所以我們就可以得到解空間所沿伸出的一個維度。所以這裡想要問的是: 我們可以在解空間中找到多少個線性獨立的向量並且將解空間的所有向量都用這些線性獨立的向量以線性組合的方式唯一表示?

爲回答上述問題, 我們需要花一點時間確定兩個函數 (看成是兩個向量) 彼此是線性獨立或者是線性相依。根據定義: 若一個函數在區間 I 上可以表示成另一個函數的常數倍時, 我們稱兩函數在區間 I 上互爲 線性相依 (linearly dependent); 否則稱兩函數在區間 I 上互爲 線性獨立 (linearly independent)。

至於如何判斷兩個函數是獨立或是相依, 以下引進朗斯基行列式的概念。

定義 **2** (第 110 頁)**.** 定義兩個可微分函數 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在一點 $x_0 \in I$ 的 朗斯基行列式 (Wronskian determinant) 爲

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}。$$

以下定理將說明朗斯基行列式與兩函數在區間 I 上是線性獨立或線性相依的關係:

定理 **3.** 假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是區間 I 上的可微分函數,

(A) 若存在 $x_0 \in I$ 使得 $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, 則 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I 上線性獨立。

(B) 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I 上線性相依, 則對所有 $x \in I$ 都有 $W[y_1, y_2](x) = 0$。

證明: 因爲 定理 **3** 中的兩個命題互爲否逆命題, 所以我們只要證明命題 (B) 即可。

若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I 上線性相依, 不失一般性, 可假設 $y_1(x) = Cy_2(x), x \in I$, 其中 C 爲常數, 因此有 $y_1'(x) = Cy_2'(x), x \in I$, 並且

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cy_2(x) & y_2(x) \\ Cy_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Cy_2(x)y_2'(x) - Cy_2(x)y_2'(x) = 0。$$

□

例 **4** (第 113 頁)**.** 分析 $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 與 $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上線性獨立或線性相依的條件。

解**.** 計算

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1 x} & \mathrm{e}^{r_2 x} \\ r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} & r_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\mathrm{e}^{(r_1 + r_2)x},$$

若 $r_1 \neq r_2$, 則 $W[y_1, y_2](x) \neq 0$, 所以 $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 與 $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上線性獨立。若 $r_1 = r_2$, 則 $y_1(x) = y_2(x)$, 所以 $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 與 $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上線性相依。

這裡要注意的是: 各位不應把 定理 **3** 過度解讀成朗斯基行列式的條件與線性獨立或相依互相等價; 也就是說, 若存在一點使得 $W[y_1, y_2](x_0) = 0$, 不見得 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I 上是線性相依。又或者說, 縱使兩函數 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 滿足 $W[y_1, y_2](x) \equiv 0$, 而 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I 上有可能是線性獨立。

例 **5.** 考慮區間 $I_1 = (0,2)$ 以及 $I_2 = (-2,2)$, 還有兩個函數 $y_1(x) = x^3$ 與

$$y_2(x) = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & \text{若 } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{若 } x < 0。\end{cases}$$

(A) 在區間 I_1 上, 因爲 $y_1(x) = x^3 = y_2(x)$, 所以 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 線性相依。

(B) 在區間 I_2 上, 以下討論將證明 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是線性獨立的: 考慮 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$, 因爲

$$\begin{aligned} c_1y_1(x) + c_2y_2(x) &= \begin{cases} c_1x^3 + c_2x^3 & \text{若 } 0 \leq x < 2 \\ c_1x^3 - c_2x^3 & \text{若 } -2 < x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (c_1 + c_2)x^3 & \text{若 } 0 \leq x < 2 \\ (c_1 - c_2)x^3 & \text{若 } -2 < x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

所以 $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ 得到 c_1 與 c_2 必須滿足

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 - c_2 = 0, \end{cases}$$

因此 $c_1 = 0, c_2 = 0$。於是 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I_2 上是線性獨立的。

(C) 以下討論將告知: 對所有 $x \in I$ 都有 $W[y_1, y_2](x) = 0$, 而此結果與 定理 **3** 的敘述並沒有衝突。

- 若 $x_0 \in (0,2)$, 因爲 $y_1(x) = x^3 = y_2(x)$, 所以 $W[y_1, y_2](x_0) = 0$。
- 若 $x_0 \in (-2,0)$, 因爲 $y_1(x) = x^3, y_2(x) = -x^3$, 得到

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} (x_0)^3 & -(x_0)^3 \\ 3(x_0)^2 & -3(x_0)^2 \end{vmatrix} = 0。$$

- 若 $x_0 = 0$, 因爲

$$\begin{aligned} (y_2)'_+(0) &= \lim_{h \to 0^+} \frac{y_2(h) - y_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0 \\ (y_2)'_-(0) &= \lim_{h \to 0^-} \frac{y_2(h) - y_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^3 - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^2 = 0, \end{aligned}$$

所以 $y_2'(0) = 0$, 於是

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0。$$

介紹完兩個函數在區間 I 上是線性獨立或是線性相依之後, 以下我們要藉由二階線性齊次微分方程式初始值問題解的存在唯一性之結果繼續討論二階線性齊次微分方程式的解空間。

首先, 記 $y_1(x)$ 是初始值問題 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=0, y(x_0)=1, y'(x_0)=0$ 的唯一解, 記 $y_2(x)$ 是初始值問題 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=0, y(x_0)=0, y'(x_0)=1$ 的唯一解。因爲

$$W[y_1,y_2](x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 在區間 I 上是線性獨立的。

若 $y(x)$ 滿足微分方程式 (1), 記函數 $y(x)$ 在 x_0 處滿足 $y(x_0)=y_0$ 以及 $y'(x_0)=y_0'$, 現在想要問: $y(x)$ 是否可以表示成 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 的線性組合? 也就是說, 假設 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 滿足方程式 (1) 以及初始值條件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$, 其中 c_1 與 c_2 爲兩個待定的實數, 則有

$$\begin{cases} y_1(x_0)c_1+y_2(x_0)c_2=y_0 \\ y_1'(x_0)c_1+y_2'(x_0)c_2=y_0', \end{cases}$$

因爲 $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0$, 所以從上面的聯立方程式可知 c_1 與 c_2 有唯一解。

綜合上述討論, 我們可得以下結果:

定理 **6** (第 112 頁)**.** 二階線性齊次微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=0$ 的解是一個二維向量空間。

上述選定二階線性齊次微分方程式解空間的基底 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ 是透過指定初始值 $y_1(x_0)=1, y_1'(x_0)=0$ 與 $y_2(x_0)=1, y_2'(x_0)=0$ 的方式得到結果。實際上我們可以在初始值的設定上做不一樣的選擇, 只要兩函數在一個點的朗斯基行列式非零, 那麼這兩個函數就可以形成二階線性齊次微分方程式解空間的一組基底。現將這個結果寫成以下定理:

定理 **7** (第 111 頁)**.** 假設 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 (1) 的解, 並且在一點 $x_0\in I$ 上的朗斯基行列式 $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0$, 則任給兩實數 y_0 與 y_0', 必有兩實數 c_1 與 c_2 使得 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ 滿足 (1) 與初始值條件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$, 而且 c_1, c_2 唯一決定。

這一個單元的最後想要註記兩件事。第一, 凡是用到線性代數的理論, 基本上都可以推廣至一般的維度, 比方說 n 階線性齊次微分方程也有一般理論, 而在單元 3.4 將看到二階線性非齊次微分方程的情形, 它也可以順勢地對維度推廣; 或是你可以將這些討論退回至一階線性微分方程重新思考所有理論, 便會發現一階線性微分方程式也有清楚的線性結構在內。這時各位不知道有沒有產生一個疑問: 爲什麼我們不在一階線性微分方程式的時候就直接研究解空間的結構? 關於這個問題的一個解釋如下: 因爲一階線性微分方程可以很容易地找到方程式的解 (積分因子法), 所以就不需要用牛刀 — 線性代數 — 去做各種解釋; 當談論到二階甚至高階的線性微分方程式時, 透過線性代數的理論以了解方程式的解。

因爲線性這個特性在維度上很容易進行推廣, 所以在這個課程裡, 基本上我並不打算花時間討論高階線性微分方程式, 各位若將來遇到高階線性微分方程式, 自己試著把整個理論再重新思考過一次, 應能立刻建立出對應的結果。

第二, 前面的討論都是理論的部分, 當我們實際遇到一個二階線性齊次微分方程式時, 該如何確實找到兩個互爲線性獨立的解呢? 這個問題便是接下來幾個單元所要探討的課題。

3.3 二階線性常係數齊次微分方程式

這一單元我們先專在一個更特別或是說更單純的微分方程式, 也就是當係數 P, Q, R 都是常數函數的情況。這時, 我們故意把係數改用 a, b, c 這些符號以突顯常係數 (constant coefficients) 這件事。換言之, 現在我們考慮二階線性常係數齊次微分方程式

$$ay''(x) + by' + cy(x) = 0, \tag{1}$$

其中 a, b, c 都是常數 (與 x 無關), 並且 $a \neq 0$。

關於微分方程式 (1), 要找到兩個互爲線性獨立的解是容易的。若大家對指數函數有一定認識的話, 通常會嘗試函數 $y = \mathrm{e}^{rx}$, 其中 r 是待定的常數。因爲 $y' = r\mathrm{e}^{rx}$ 與 $y'' = r^2\mathrm{e}^{rx}$, 代入 (1) 後得到

$$ar^2\mathrm{e}^{rx} + br\mathrm{e}^{rx} + c\mathrm{e}^{rx} = 0 \Leftrightarrow (ar^2 + br + c)\mathrm{e}^{rx} = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0。$$

因此, $y = \mathrm{e}^{rx}$ 是方程式 (1) 的解等價於 r 是

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

的根。方程式 (2) 稱爲微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ 的 *輔助方程* (auxiliary equation) 或是 *特徵方程* (characteristic equation)。這是一個一元二次方程式, 利用公式解進一步分析微分方程式的解:

(A) 如果 $b^2 - 4ac > 0$, 則特徵方程有兩相異實根, 記爲

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad 與 \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

由單元 3.2 的 例 **4** 得知 $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 與 $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$ 是線性獨立的兩個解。於是方程式 (1) 的一般解爲 $y(x) = c_1\mathrm{e}^{r_1 x} + c_2\mathrm{e}^{r_2 x}$, 其中 c_1, c_2 爲任意實數。

(B) 如果 $b^2 - 4ac = 0$, 那麼 $r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ 是兩相等實根。我們不妨把這個實根記成 r, 則 $y_1(x) = \mathrm{e}^{rx}$ 是方程式 (1) 的一個解。這時我們只找到一個解, 該如何找到另一個與 $y_1(x)$ 獨立的解呢? 這裡要介紹一個方法稱爲 *降階法* (reduction of order): 假設 $y_2(x) = u(x)y_1(x)$ 是 $ay'' + by' + cy = 0$ 的另一個解, 其中 $u(x)$ 是一個函數 (但不是常數函數)。因爲

$$\begin{aligned} c \cdot y_2 &= c(\qquad\qquad\qquad uy_1) \\ b \cdot y_2' &= b(\qquad\quad u'y_1 + uy_1') \\ a \cdot y_2'' &= a(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''), \end{aligned}$$

於是

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = au''y_1 + u'(2ay_1' + by_1) + u(ay_1'' + by_1' + cy_1) = au''y_1 = 0,$$

因爲 a 與 y_1 非零, 所以 $u''(x) = 0$, 積分後得到 $u'(x) = C_1$ 與 $u(x) = C_1 x + C_2$, 其中 C_1 與 C_2 爲實數。因爲我們的目標是要找到一個和 $y_1(x)$ 線性獨立的函數, 故取 $C_1 = 1, C_2 = 0$ 即可, 也就是 $u(x) = x$ 是一個候選者, 因此方程式 (1) 的一般解爲 $y = c_1\mathrm{e}^{rx} + c_2 x\mathrm{e}^{rx}$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。

將一開始得到的解 $y_1(x)$ 前面乘上函數倍 $u(x)$, 可以想成是對於 $y_1(x)$ 這個向量進行擾動, 因爲與 $y_1(x)$ 平行的向量 (相當於乘上常數倍) 並不是我們要的方向, 經過擾動以後可確實找到另一個向量與之線性獨立。至於這個方法稱爲降階法的原因在於對 $u(x)$ 而言滿足的微分方程式雖然也是二階, 但是低階項全部不見了, 這種低階項消失 (特別是零次微分項) 在這類微分方程中是普遍存在的現象, 所以若要解 $u(x)$ 的話, 只要令 $v(x) = u'(x)$, 那麼對於 $v(x)$ 而言所滿足的微分方程就降了一階, 故我們把這種找解的方法稱爲降階法。

(C) <u>如果 $b^2 - 4ac < 0$</u>, 那麼

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a} \quad \text{與} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{4ac - b^2}\, i}{2a}$$

是兩個共軛複根。記 $\alpha = -\frac{b}{2a}$ 與 $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$, 則兩共軛複根可表示爲 $r_1 = \alpha + \beta i$ 與 $r_2 = \alpha - \beta i$。然而 $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$ 與 $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ 並非想要的解, 因爲這兩個函數是複數值的函數, 而我們希望得到的是實數值函數。這時候又該如何處理呢? 現在提出一個想法: 先把方程式的解放到複數空間中, 然後適當地選取係數讓它成爲實數函數。具體的作法如下: 因爲複數空間的特色是 代數封閉體 (algebraically closed field), 所以我們把解先看成如下形式:

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x},$$

這時 C_1 與 C_2 是複數。注意到這件事我們在單元 3.2 的 定理 **1** 下方曾經對此進行一個註記。透過歐拉公式 (Euler's formula), 我們將這個解繼續改寫:

$$\begin{aligned}
y &= C_1 \mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 \mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)x} \\
&= C_1 \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) \\
&= (C_1 + C_2)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + i(C_1 - C_2)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x)。
\end{aligned}$$

因爲我們希望得到的函數 y 是一個實數值函數, 也就是希望 $c_1 = C_1 + C_2$ 與 $c_2 = i(C_1 - C_2)$ 都是實數, 記 $C_1 = A_1 + B_1 i, C_2 = A_2 + B_2 i$, 其中 $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{R}$, 只要選取 $A_1 = A_2, B_1 = -B_2$, 那麼 c_1 與 c_2 就會是實數。這麼一來, $y = \mathrm{e}^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$ 是微分方程式的一般解。

從上面的討論, 我們已將二階線性常係數齊次微分方程式的所有情況都討論完畢。若再搭配初始值條件, 則可得到二階線性常係數齊次微分方程式的唯一解。

例 **1** (第 105 頁)**.** 試解初始值問題 $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -7$。

解**.** 關於微分方程式 $y'' + 5y' + 6y = 0$ 對應到的特徵方程式是 $r^2 + 5r + 6 = 0$, 解得 $r = -2$ 或 $r = -3$, 所以微分方程式的一般解爲 $y = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x}$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。

由 $y(0) = 3$ 得到 $c_1 + c_2 = 3$。因爲 $y' = -2c_1 \mathrm{e}^{-2x} - 3c_2 \mathrm{e}^{-3x}$, 由 $y'(0) = -7$ 得到 $-2c_1 - 3c_2 = -7$, 所以解得 $c_1 = 2, c_2 = 1$。因此初始值問題的解爲 $y = 2\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-3x}$。

例 **2** (第 127 頁). 試解初始值問題 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0, y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{3}$。

解. 關於微分方程式 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 對應到的特徵方程式是 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$, 解得 $r=\frac{1}{2}$ (重根), 所以微分方程式的一般解爲 $y=c_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+c_2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$。

由 $y(0)=1$ 得到 $c_1=1$。因爲

$$y'=\frac{1}{2}c_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+c_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}c_2x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}=\left(\frac{1}{2}c_1+c_2+\frac{1}{2}c_2x\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$$

由 $y'(0)=\frac{1}{3}$ 得到 $\frac{1}{2}c_1+c_2=\frac{1}{3}$。所以 $c_2=-\frac{1}{6}$。因此初始值問題的解爲 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{6}x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$。

例 **3** (第 123 頁). 試解微分方程 $y''+6y'+10y=0$。

解. 關於微分方程式 $y''+6y'+10y=0$ 對應到的特徵方程式是 $r^2+6r+10=0$, 由此解得

$$r=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot10}}{2}=-3\pm i,$$

所以微分方程式的一般解爲 $y=\mathrm{e}^{-3x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$。

例 **4**. 試解初始值問題 $y''+y=0, y(0)=2, y'(0)=3$。

解. 關於微分方程式 $y''+y=0$ 對應到的特徵方程式是 $r^2+1=0$, 由此解得 $r=\pm i$, 所以微分方程式的一般解爲 $y=c_1\cos x+c_2\sin x$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$。

因爲 $y(0)=2$, 所以 $c_1=2$; 因爲 $y'=-c_1\sin x+c_2\cos x$, 由 $y'(0)=3$ 得到 $c_2=3$。因此初始值問題的爲 $y=2\cos x+3\sin x$。

上述利用特徵方程式解二階線性常係數齊次微分方程的方法, 幾乎是所有微分方程教科書或課程中呈現的標準方式。而這一個單元的最後, 我想要針對微分方程 $ay''+by'+cy=0$ 做另外一個詮釋。首先, 我們可以把微分方程式理解爲以下式子:

$$L_1[L_2[y]]=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-r_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-r_2\right)y=0,$$

其中 r_1 與 r_2 爲特徵方程的兩個根。這樣的看待方式是把 $L_1=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-r_1\right)$ 與 $L_2=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-r_2\right)$ 視爲微分算子 (differential operators)。所謂的微分算子, 是把求導的操作和函數乘法兩個概念混合一起思考, 比方說

$$L_2[y]=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-r_2\right)y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-r_2y$$

第一項與 y 的作用關係是求導, 而第二項與 y 的作用關係是函數相乘 (現在這個例子 r_2 是一個數字, 整體來說看成是常數函數)。

將微分方程式看成數次微分算子的作用有一些好處, 這個概念可類比於代數學中的因式分解, 把一些複雜的微分式整理成一個一個微分算子的作用, 然後一次處理一個微分算子, 各個擊破。

以現在這個例子來說, 首先令 $Y=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_2\right)y$, 它是一個未知函數, 所以 $L_1[L_2[y]]=L_1[Y]=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_1\right)Y=0$, 先利用一階線性微分方程式的方法解出 Y, 再解 $L_2[y]=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+r_2\right)y=Y$。從這樣的觀點, 可以很容易地接受解空間會是二維的向量空間, 因爲每次處理一個微分算子, 就會得到一個積分常數, 它就是一個向量空間的自由度。

微分算子的用法當然不僅於此, 之後也會有一些例子說明微分算子的好處。

3.4 二階線性常係數非齊次微分方程式

本單元將討論二階線性常係數非齊次微分方程式; 也就是說, 考慮

$$ay'' + by' + cy = G(x), \tag{1}$$

其中 $a \neq 0, b, c$ 都是常數, 而 $G(x)$ 是連續函數。首先, 我們也是從這類微分方程式解空間的結構進行討論。

定理 1 (第 132 頁)**.** 若 $y_1(x)$ 與 $y_2(x)$ 是微分方程式 (1) 的解, 則 $Y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ 是微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ 的解。

證明: 直接計算可得

$$\begin{aligned} aY'' + bY' + cY &= a(y_1 - y_2)'' + b(y_1 - y_2)' + c(y_1 - y_2) \\ &= (ay_1'' + by_1' + cy_1) - (ay_2'' + by_2' + cy_2) = G - G = 0。\end{aligned}$$

□

關於上述定理我們知道二階線性常係數非齊次微分方程式的解與二階線性常係數齊次微分方程式的解有關。爲此我們要將 定理 **1** 重新解讀如下: 因爲現在的目標是要了解二階線性常係數非齊次微分方程式的解空間, 如果我們順利找到微分方程式 (1) 的其中一個解, 記爲 $y_2(x)$, 則 $y_1(x) = Y(x) + y_2(x)$ 意味著微分方程式 (1) 的其它解都可以表示成齊次微分方程式 $ay'' + by' + cy = 0$ 的解 $Y(x)$ 與 $y_2(x)$ 之和。

由此再搭配前一個單元齊次微分方程式的討論可得如下定理:

定理 2 (第 132 頁)**.** 假設 $y_p(x)$ 是微分方程式 (1) 的一個解, 則微分方程式 (1) 的一般解必可表示爲 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, 其中

(A) 若 $b^2 - 4ac > 0$, 則 $y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, 其中 $r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

(B) 若 $b^2 - 4ac = 0$, 則 $y_h(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$, 其中 $r = \frac{-b}{2a}$。

(C) 若 $b^2 - 4ac < 0$, 則 $y_h(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$, 其中 $\alpha = \frac{-b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$。

關於 定理 **2**, 我們用下標 $y_p(x)$ 記作方程式的 特解 (particular solution), 而 $y_h(x)$ 記作方程式的 齊次解 (homogeneous solution)。這個定理所要描述的仍然是解空間的結構, 將 $y_p(x)$ 視爲一個向量時, 那麼二階線性非齊次常係數微分方程式的解空間是一個不通過原點的二維平面, 它平行於齊次微分方程式解空間的平面 (該平面通過原點)。

介紹完理論之後, 接下來要問的是實際面的問題: 給定一個二階線性非齊次常係數微分方程式, 該如何尋求特解? 在歷史的進程中, 我們發現到有兩種尋找特解的方法, 一個稱爲 未定係數法 (the method of undetermined coefficients), 另一個稱爲 參數變動法 (the method of variation of parameters)。以下兩個小單元就分別介紹這兩種方法。

3.4.1 未定係數法

未定係數法 (The Method of Undetermined Coefficients) 是一種猜答案的方法, 能夠以猜答案的方法得到特解的理由基本上是來自於以下的觀察:

> 指數函數、多項式、正弦函數 $\sin(mx)$ 與餘弦函數 $\cos(mx)$ 還有這三類型函數的混合搭配, 在微分與加法、實數倍乘法的運算下自成代數封閉的系統。

因爲方程式的左邊是微分與實數倍的線性組合 (微分是線性算子), 所以只要方程式的非齊次項 $G(x)$ 是由這幾類函數進行組合的話, 我們就可以進行合理地猜測特解 $y_p(x)$。以下整理出未定係數法的猜特解方法:

(A) 若 $G(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 則猜特解的型式爲 $y_p(x)=x^j\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i$。

(B) 若 $G(x)=\mathrm{e}^{kx}\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 則猜特解的型式爲 $y_p(x)=x^j\mathrm{e}^{kx}\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i$。

(C) 若 $G(x)=\mathrm{e}^{kx}\cos(mx)\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ 或 $G(x)=\mathrm{e}^{kx}\sin(mx)\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 則猜特解的型式爲 $y_p(x)=x^j\mathrm{e}^{kx}\left(\cos(mx)\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^i+\sin(mx)\sum\limits_{i=0}^{n} B_i x^i\right)$。

- 上述猜測特解中, A_i 與 B_i 是待定的實數。這當中都有 x^j 的出現, 在此加以解釋: 次數 j 是最小的非負整數 $j=0$ 或 1 或 2, 使得這樣的特解表示中, 不會有任何一項是齊次方程式的解。

未定係數法的特色是將方程的問題轉換成代數問題 (解未知數); 而它的缺點是 $G(x)$ 只能是上述幾類的函數才能使用。

例 **3** (第 133 頁)**.** 試用未定係數法求解 $y''-3y'-4y=3\mathrm{e}^{2x}+2\sin x$。

解**.** 首先探討齊次微分方程式 $y''-3y'-4y=0$ 的解: 因爲特徵方程式爲 $r^2-3r-4=0$, 得到 $r=-1$ 或 $r=4$, 所以齊次式的解爲 $y_h=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{4x}$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$。

以下欲求 $y''-3y'-4y=3\mathrm{e}^{2x}+2\sin x$ 的特解: 考慮

$$\begin{aligned}(-4)\cdot y_p&=-4(\ \ A\mathrm{e}^{2x}+B\cos x+C\sin x)\\(-3)\cdot y_p'&=-3(2A\mathrm{e}^{2x}+C\cos x-B\sin x)\\y_p''&=\qquad 4A\mathrm{e}^{2x}-B\cos x-C\sin x\end{aligned}$$

得到

$$y_p''-3y_p'-4y_p=-6A\mathrm{e}^{2x}+(-5B-3C)\cos x+(3B-5C)\sin x=3\mathrm{e}^{2x}+2\sin x,$$

由此得知 $A=-\frac{1}{2},B=\frac{3}{17},C=-\frac{5}{17}$。

綜合上述討論, 得到 $y''-3y'-4y=3\mathrm{e}^{2x}+2\sin x$ 的解爲

$$y=y_h+y_p=c_1\mathrm{e}^{-x}+c_2\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+\frac{3}{17}\cos x-\frac{5}{17}\sin x,\ \text{其中 } c_1,c_2\in\mathbb{R}。$$

例 **4** (第 136 頁)**.** 試用未定係數法解 $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x}$。

解**.** 首先探討齊次微分方程式 $y'' - 3y' - 4y = 0$ 的解: 因爲特徵方程式爲 $r^2 - 3r - 4 = 0$, 得到 $r = -1$ 或 $r = 4$, 所以齊次式的解爲 $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x}$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。

以下欲求 $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x}$ 的特解: 考慮

$$\begin{aligned}(-4) \cdot y_p &= -4(\qquad\qquad Axe^{-x})\\(-3) \cdot y_p' &= -3(\quad Ae^{-x} - Axe^{-x})\\y_p'' &= \qquad -2Ae^{-x} + Axe^{-x}\end{aligned}$$

得到

$$y_p'' - 3y_p' - 4y_p = -5Ae^{-x} = 2e^{-x},$$

由此得知 $A = -\frac{2}{5}$。

綜合上述討論, 得到 $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-x}$ 的解爲

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{4x} - \frac{2}{5} x e^{-x}, \text{ 其中 } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\text{。}$$

例 **5** (第 139 頁)**.** 試用未定係數法解 $y'' + y' - 2y = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$。

解**.** 首先探討齊次微分方程式 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解: 因爲特徵方程式爲 $r^2 + r - 2 = 0$, 得到 $r = 1$ 或 $r = -2$, 所以齊次式的解爲 $y_h = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。

以下欲求 $y'' + y' - 2y = x$ 的特解: 考慮

$$\begin{aligned}(-2) \cdot y_p &= -2(Ax + B)\\y_p' &= \qquad\quad A\\y_p'' &= \qquad\quad 0,\end{aligned}$$

得到

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = -2Ax + (A - 2B) = x,$$

由此得知 $A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}$。

綜合上述討論, 得到 $y'' + y' - 2y = x$ 的解爲

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}, \text{ 其中 } c_1, c_2 \in \mathbb{R}\text{。}$$

因爲 $y(0) = c_1 + c_2 - \frac{1}{4} = 1$, 而 $y'(x) = c_1 e^{x} - 2c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}$, 得到 $y'(0) = c_1 - 2c_2 - \frac{1}{2} = 0$, 由此得知 $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{4}$。因此初始值問題 $y'' + y' - 2y = x, y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的解爲

$$y = e^{x} + \frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\text{。}$$

3.4.2 參數變動法

在單元 3.3 我們已經介紹如何求得 $ay'' + by' + cy = 0$ 的一般解, 它會是兩個線性獨立的函數做線性組合:

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

對於非齊次微分方程 $ay'' + by' + cy = G(x)$ 特解的找法, 現在要介紹的是 參數變動法 (The Method of Variation of Parameters), 概念上仍然是把齊次解進行擾動, 進而得到非齊次方程的特解。

假設 $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ 是微分方程式 $ay'' + by' + cy = G(x)$ 的特解, 其中 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 是兩個待定函數。先將 $y_p(x)$ 代入方程式後, 看看待定函數必須滿足的條件。因為

$$\begin{aligned}
c \cdot y_p &= (\qquad u_1 y_1 \qquad + u_2 y_2) \cdot c \\
b \cdot y_p' &= (\quad u_1' y_1 + u_1 y_1' \quad + \quad u_2' y_2 + u_2 y_2') \cdot b \\
a \cdot y_p'' &= (u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2' + u_2 y_2'') \cdot a,
\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}
ay_p'' + by_p' + cy_p &= a(u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2') + b(u_1' y_1 + u_2' y_2) \\
&= a(u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_2'' y_2 + u_2' y_2') + a(u_1' y_1' + u_2' y_2') + b(u_1' y_1 + u_2' y_2)。
\end{aligned}$$

記 $u_1' y_1 + u_2' y_2 = F(x)$, 則 $u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' = F'(x)$。這麼一來, $ay_p'' + by_p' + cy_p = G(x)$ 就可以改寫為

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = F(x) \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \dfrac{G(x) - aF'(x) - bF(x)}{a}。 \end{cases} \tag{2}$$

從 (2) 就可以解聯立將未知函數 u_1' 與 u_2' 解出來。

注意到, 函數 $F(x)$ 提供了一個找到特解的自由度, 我們可以選取特別的函數以大大地簡化計算並得到答案。比方說, 若設定 $F(x) \equiv 0$, 則方程組 (2) 變為

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \dfrac{G(x)}{a}, \end{cases} \tag{3}$$

此時 $u_1'(x)$ 與 $u_2'(x)$ 可解得

$$\begin{aligned}
u_1'(x) &= \frac{-\frac{G(x)}{a} y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{-\frac{G(x)}{a} y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} \\
u_2'(x) &= \frac{\frac{G(x)}{a} y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} = \frac{\frac{G(x)}{a} y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)},
\end{aligned}$$

如此, 兩邊再對 x 積分之後就得到 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$。

各位有沒有注意到, 不論是 (2) 或者是 (3), 方程組能不能把 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 解出來的關鍵也是在於朗斯基行列式 $W[y_1, y_2](x)$ 是否為零。由於二階線性齊次常係數微分方程式的三種情形下朗斯基行列式皆處處不為零, 所以這個方法可行。

參數變動法的優點是它對於一般的函數 $G(x)$ 提供了特解的找法, 然而這個方法的缺點是在實際求解時, 計算量比較大, 困難度也比較高。

例 **6** (第 141 頁)**.** 試解微分方程式 $y'' + 4y = 8\tan x$, 其中 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$。

解**.** 首先得到齊次微分方程式 $y'' + 4y = 0$ 的兩個解。考慮特徵方程式 $r^2 + 4 = 0$, 解得 $r = \pm 2i$, 所以 $y_1(x) = \cos(2x)$ 與 $y_2(x) = \sin(2x)$ 為 $y'' + 4y = 0$ 的兩個解。

假設 $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ 滿足微分方程式, 其中 $u_1(x), u_2(x)$ 為待定的函數, 由 (3) 得到

$$\begin{cases} \cos(2x)u_1'(x) + \sin(2x)u_2'(x) = 0 \\ -2\sin(2x)u_1'(x) + 2\cos(2x)u_2'(x) = 8\tan x, \end{cases}$$

由此解得

$$u_1'(x) = \frac{1}{2}(-8\tan x \sin(2x)) = -8\sin^2 x,$$

所以

$$u_1(x) = -8\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = -8\int \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = -4x + 2\sin(2x) + C_1,$$

以及

$$\begin{aligned} u_2'(x) &= \frac{1}{2}\cdot 8\tan x\cos(2x) = \frac{1}{2}\cdot 8\tan x(2\cos^2 x - 1) = 8\sin x\cos x - 4\tan x \\ &= 4\sin(2x) - 4\tan x, \end{aligned}$$

所以

$$u_2(x) = \int (4\sin(2x) - 4\tan x)\,\mathrm{d}x = -2\cos(2x) - 4\ln|\sec x| + C_2,$$

因此微分方程式 $y'' + 4y = 8\tan x$ 的解為

$$\begin{aligned} y(x) &= u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \\ &= (-4x + 2\sin(2x) + C_1)\cos(2x) + (-2\cos(2x) - 4\ln|\sec x| + C_2)\sin(2x), \end{aligned}$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$。

各位在看完上面的例題後可以發現到: 由於非齊次項 $\tan x$ 的各階導函數並不好找到代數封閉的規則, 使用參數變動法有助於處理這個問題。

3.5 二階線性一般係數微分方程式

這一單元要介紹的是幾個二階線性一般係數的微分方程式, 而這裡觀察的重點應放在方程式求解的方法還有解空間的結構與之前幾個單元所討論的內容之間的關聯性。

3.5.1 柯西-歐拉方程式

所謂 *柯西-歐拉方程式* (Cauchy-Euler equation) 是型如以下的微分方程式:

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\alpha x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\beta y=0,$$

其中 α,β 爲兩實數。這個方程式的特色是: 未知函數若微分 i 次, 前面就會乘上 x^i。

多數人在看到教科書在介紹柯西-歐拉方程式的時候, 都會看到昏頭轉向, 雖然按照課本每個式子的推導都能理解, 但是卻抓不到重點。實際上, 關於柯西-歐拉方程式, 我認爲最好的理解方式是想成微分算子的概念。考慮微分算子 $D=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 則 $D^2=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, 所以柯西-歐拉方程式可改寫爲

$$\begin{aligned}
&x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\alpha x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\beta y=\left(x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\alpha x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\beta\right)y\\
=&\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+(\alpha-1)x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\beta\right)y=\left(D^2+(\alpha-1)D+\beta\right)y\\
=&D^2y+(\alpha-1)Dy+\beta y=0,
\end{aligned}$$

因此柯西-歐拉方程可以視爲以 D 這個微分算子而言的二階線性齊次常係數微分方程式。

另一方面, 關於二階線性齊次常係數微分方程式, 我們曾經利用特徵方程得到一般解。那時用到的特性是: 指數函數 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 是微分 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的 *特徵向量* (eigenvector), 其中 r 稱爲 *特徵值* (eigenvalue)。特徵函數或特徵向量的概念也是源自於線性代數的理論。而這裡要研究的是: 什麼函數是微分算子 $D=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的特徵向量呢? 答案其實很簡單, 因爲 $\ln|x|$ 的微分是 $\frac{1}{x}$, 所以再乘上 x 之後就會變成 1, 所以只要把當初考慮的 x 全部替換成 $\ln|x|$ 即爲所求。換言之, 考慮 $y=\mathrm{e}^{r\ln|x|}$, 則 $Dy=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\cdot\mathrm{e}^{r\ln|x|}\cdot r\cdot\frac{1}{x}=r\mathrm{e}^{r\ln|x|}$。而實際上 $y=\mathrm{e}^{r\ln|x|}=|x|^r$, 所以我們就可以列出所有柯西-歐拉方程式的一般解的結果:

定理 1 (第 124, 213 頁)**.** *關於柯西-歐拉方程式 $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$, 對於算子 $D=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 相應的特徵方程爲 $r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$,*

(A) 若特徵方程式有兩相異實根, 記爲 r_1 與 r_2, 則 $y(x)=c_1|x|^{r_1}+c_2|x|^{r_2}$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$。

(B) 若特徵方程式有兩重根, 記爲 r, 則 $y(x)=c_1|x|^r+c_2\ln|x|\cdot|x|^r$, 其中 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$。

(C) 若特徵方程式有兩共軛複根, 記爲 $\lambda\pm\mu i$, 則

$$y(x)=|x|^\lambda\left(c_1\cos(\mu\ln|x|)+c_2\sin(\mu\ln|x|)\right),\ 其中\ c_1,c_2\in\mathbb{R}。$$

3.5.2 用降階法找到另一個線性獨立的解

如單元 3.3 所述, 降階法可適用於一般的二階線性齊次微分方程式, 只要知道方程式的一個解, 就可以透過降階法找到另一個線性獨立的解。

假設 $y_1(x)$ 是二階線性齊次微分方程式 $P(x)y''(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y(x)=0$ 的解。考慮函數 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$, 其中 $u(x)$ 是一個待定的函數, 並且希望它不是常數函數, 這樣 $y_2(x)$ 才會與 $y_1(x)$ 線性獨立。那麼

$$\begin{aligned}
R(x)\cdot y_2(x) &= u(x)y_1(x)R(x)\\
Q(x)\cdot y_2'(x) &= (u'(x)y_1(x)+u(x)y_1'(x))Q(x)\\
P(x)\cdot y_2''(x) &= (u''(x)y_1(x)+2u'(x)y_1'(x)+u(x)y_1''(x))P(x),
\end{aligned}$$

因爲 $P(x)y_1''(x)+Q(x)y_1'(x)+R(x)y_1(x)=0$, 所以

$$\begin{aligned}
&P(x)y_2''(x)+Q(x)y_2'(x)+R(x)y_2(x)\\
&=P(x)y_1(x)u''(x)+(2P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x))u'(x)=0,
\end{aligned}$$

因此 $u(x)$ 必須滿足以上二階微分方程式。

雖然這個二階微分方程式並不是常係數, 但是方程式中並沒有 $u(x)$ 項, 只要令 $v(x)=u'(x)$, 則 $v'(x)=u''(x)$, 而方程式就可改寫成

$$P(x)y_1(x)v'(x)+(2P(x)y_1'(x)+Q(x)y_1(x))v(x)=0,$$

對於 $v(x)$ 而言, 它滿足一階線性微分方程式 (也可以看成是分離變數型微分方程式), 所以可以解出 $v(x)$, 然後再將 $v(x)$ 對 x 積分後, 選取不是常數項的部分即爲 $u(x)$。

例 **2** (第 131 頁)**.** 試解微分方程式 $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0, x>0$。

解**.** 首先, 考慮 $y_1(x)=x$, 因爲 $y_1'(x)=1$ 以及 $y_1''(x)=0$, 得到 $y_1(x)=x$ 滿足微分方程式 $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$。

考慮 $y_2(x)=u(x)y_1(x)$, 其中 $u(x)$ 是待定的函數。將 $y_2(x)$ 代入微分方程式, 得到 $u(x)$ 滿足微分方程式

$$\begin{aligned}
&x^2\cdot x\cdot u''(x)+(2\cdot x^2\cdot 1-x(x+2)\cdot x)u'(x)=0\\
&\Rightarrow x^3u''(x)-x^3u'(x)=0\Rightarrow u''(x)=u'(x)。
\end{aligned}$$

令 $v(x)=u'(x)$, 則 $v(x)$ 滿足 $v'(x)=v(x)$, 得到 $v(x)=C_1\mathrm{e}^x$, 其中 $C_1\in\mathbb{R}$。因爲 $u'(x)=C_1\mathrm{e}^x$, 所以 $u(x)=C_1\mathrm{e}^x+C_2$, 其中 $C_1,C_2\in\mathbb{R}$。

由上討論, 得到微分方程式 $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0, x>0$ 的解爲

$$y(x)=(C_1\mathrm{e}^x+C_2)x,\ \text{其中 } C_1,C_2\in\mathbb{R}。$$

3.5.3 用參數變動法找一般解

在單元 3.4.2 介紹的參數變動法也適用於二階線性一般係數的微分方程式, 只要知道兩個互爲線性獨立的齊次解, 就可以找到非齊次方程式的特解, 所以二階線性非齊次方程式的一般解都可以解出。這裡再次重現參數變動法之想法: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程式 $P(x)y''(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y(x)=0$ 的解, 並且彼此線性獨立, 若想得到非齊次微分方程式 $P(x)y''(x)+Q(x)y'(x)+R(x)y(x)=G(x)$ 的特解, 考慮函數 $y_p(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$, 其中 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 是兩個待定的函數, 並且都不是常數函數。先將 $y_p(x)$ 代入方程式之後, 看看待定函數必須滿足的條件。以下計算略去對 x 爲變數的括號, 所有量都和 x 有關。因爲

$$
\begin{aligned}
R\cdot y_p &= (\qquad\qquad u_1y_1 \qquad\qquad + u_2y_2)\cdot R\\
Q\cdot y_p' &= (\qquad u_1'y_1+u_1y_1' \qquad + \; u_2'y_2+u_2y_2')\cdot Q\\
P\cdot y_p'' &= (u_1''y_1+2u_1'y_1'+u_1y_1''+u_2''y_2+2u_2'y_2'+u_2y_2'')\cdot P,
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
Py_p''+Qy_p'+Ry_p &= P(u_1''y_1+2u_1'y_1'+u_2''y_2+2u_2'y_2')+Q(u_1'y_1+u_2'y_2)\\
&= P(u_1''y_1+u_1'y_1'+u_2''y_2+u_2'y_2')+P(u_1'y_1'+u_2'y_2')+Q(u_1'y_1+u_2'y_2)。
\end{aligned}
$$

記 $u_1'y_1+u_2'y_2=F(x)$, 則 $u_1''y_1+u_1'y_1'+u_2''y_2+u_2'y_2'=F'(x)$。這麼一來, $Py_p''+Qy_p'+Ry_p=G(x)$ 就可以改寫爲

$$
\begin{cases}
y_1u_1'+y_2u_2'=F(x)\\
y_1'u_1'+y_2'u_2'=\dfrac{G(x)-P(x)F'(x)-Q(x)F(x)}{P(x)},
\end{cases}
\tag{1}
$$

由 (1) 就可以解聯立方程將未知函數 u_1' 與 u_2' 解出來。

注意到, 函數 $F(x)$ 提供了一個找到特解的自由度, 我們可以選取特別的函數以簡化計算並得到答案。比方說, 若設定 $F(x)\equiv 0$, 則方程組 (1) 變爲

$$
\begin{cases}
y_1u_1'+y_2u_2'=0\\
y_1'u_1'+y_2'u_2'=\dfrac{G(x)}{P(x)},
\end{cases}
\tag{2}
$$

此時 $u_1'(x)$ 與 $u_2'(x)$ 可解得

$$
\begin{aligned}
u_1'(x) &= -\frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)} = -\frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_2(x)}{W[y_1,y_2](x)}\\
u_2'(x) &= \frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)} = \frac{G(x)}{P(x)}\frac{y_1(x)}{W[y_1,y_2](x)},
\end{aligned}
$$

如此, 兩邊再對 x 積分之後選取非常數項的部分就得到 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$。

各位若將上一頁的討論與單元 3.4.2 介紹參數變動法的討論相互對照, 就會發現討論的過程幾乎一模一樣, 只要把 $a, b, c, G(x)$ 分別改成 $P(x), Q(x), R(x), G(x)$ 即可, 所以得知這樣的討論與二階微分方程式是否爲常係數無關。

但是方程式是線性這件事是需要的

例 **3** (第 144 頁)**.** 試解微分方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 6x^3, x > 0$。

解**.** 由 例 **2** 知道 $y_1(x) = x$ 與 $y_2(x) = x\mathrm{e}^x$ 滿足微分方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$。

考慮 $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ 滿足微分方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 6x^3$, 其中 $u_1(x)$ 與 $u_2(x)$ 爲待定的函數, 則 $u_1'(x)$ 與 $u_2'(x)$ 滿足以下聯立方程式:

$$\begin{cases} xu_1'(x) + x\mathrm{e}^x u_2'(x) = 0 \\ u_1'(x) + (1+x)\mathrm{e}^x u_2'(x) = 6x, \end{cases}$$

於是

$$u_1'(x) = \frac{-6x^2\mathrm{e}^x}{x(1+x)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x} = \frac{-6x^2\mathrm{e}^x}{x^2\mathrm{e}^x} = -6 \Rightarrow u_1(x) = -6x + C_1, \text{ 其中 } C_1 \in \mathbb{R},$$

此外,

$$u_2'(x) = \frac{6x^2}{x(1+x)\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x} = \frac{6x^2}{x^2\mathrm{e}^x} = 6\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow u_2(x) = -6\mathrm{e}^{-x} + C_2, \text{ 其中 } C_2 \in \mathbb{R},$$

因此

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = (-6x + C_1)x + (-6\mathrm{e}^{-x} + C_2)x\mathrm{e}^x$$

是微分方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 6x^3, x > 0$ 的解。

有關這個問題, 或許我們花一點時間利用 (1) 式重新求解。考慮 $F(x) = ax$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 會考慮這種 $F(x)$ 的原因是 (1) 式的第一個方程式 不致於太複雜。也就是說, 我們得到

$$\begin{cases} xu_1'(x) + x\mathrm{e}^x u_2'(x) = ax \\ u_1'(x) + (1+x)\mathrm{e}^x u_2'(x) = (6+a)x + a \end{cases}$$

從這個方程組, 可以解得

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \frac{a\mathrm{e}^x + ax\mathrm{e}^x - 6x\mathrm{e}^x - ax\mathrm{e}^x - a\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x} = -6 \Rightarrow u_1(x) = -6x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \\ u_2'(x) &= \frac{6x + ax + a - a}{x\mathrm{e}^x} = (6+a)\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow u_2(x) = -(6+a)\mathrm{e}^{-x} + C_2, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

所以

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = (-6x + C_1)x + (-(6+a)\mathrm{e}^{-x} + C_2)x\mathrm{e}^x$$

是微分方程式 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 6x^3, x > 0$ 的解。注意到這樣的寫法多了 $-a\mathrm{e}^{-x}x\mathrm{e}^x = -ax$ 這一項, 而它是會被吸收到前一個解法的 C_1x 這一項裡面。

3.6 線性微分方程式的應用

前面幾個單元主要是探討二階線性微分方程式的數學理論, 像是初始值問題解的存在唯一性、解空間的結構、幾個如何求出齊次解或是特解的技巧。歷史上, 討論二階線性微分方程式的用意是在幫助我們了解一些物理的現象, 比方說回想牛頓第二運動定律的 $F = ma$, 若把加速度 a 理解為位置向量對時間的二次導函數, 也就是 $s''(t) = a(t)$, 而 $F(t)$ 看成是 t 時刻施予質量為 m 的物體的力時, 那麼牛頓第二運動定律的公式就可以看成是 $ms''(t) = F(t)$, 這就是一個對 $s(t)$ 而言的二階線性常係數非齊次微分方程式。

由上述觀點, 大家可以做進一步聯想: 當一個物體在某個系統中, 若想要討論施力與物體位置之間的關係時, 那麼位置函數與力量之間應該也會滿足一個二階的非齊次微分方程式, 至於這個微分方程式是不是線性, 甚至是不是常係數, 那就要看這個系統的複雜程度, 就如第二章曾經討論過的數學模型一樣, 在位置函數與力量的這個議題上, 透過實驗的方式研究系統中的每個物件的關係進行適當地假設, 至少確定當我們做了一些假設時, 誤差量是一個可以接受的範圍。

以下將介紹兩個模型, 一個是彈簧振動模型, 另一個是電子電路模型, 它們可以和二階微分方程式的初始值問題結合, 從而用方程式的解來解釋現狀或預測未來。而這兩個模型都有很好的結果

3.6.1 彈簧振動

考慮一個質量為 m 的物體, 裝置在原始長度為 l 的彈簧的一端, 並垂直懸掛如圖 3.1 所示。

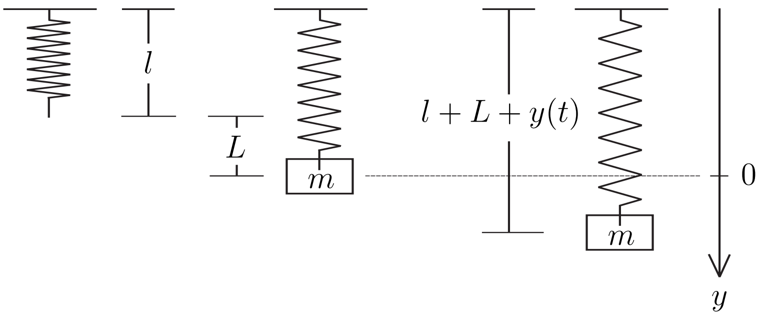

圖 3.1: 彈簧運動。

我們先觀察這個系統在靜止狀態下的力學。假設彈簧因為懸掛物體的關係使得彈簧伸長了 L, 這裡不妨設定坐標系 y 軸使得指向下方為正向, 則物體一方面受到方向向下的 *重力* (gravitational force), 力量大小為 mg; 另一方面, 物體也受到彈簧力 F_{s} 的影響。根據 *虎克定律* (Hooke's law), 只要彈簧的伸長或收縮量很小 (至少在不造成彈簧永久變形的情形下), 會有 $F_{\mathrm{s}} = -kL$, 其中 $k > 0$ 為常數, 稱為 *彈性係數* (spring constant)。注意到這個式子的負號代表彈簧力是一個抵抗彈簧變形的力, 故方向相反。由靜力平衡得知:

$$mg - kL = 0。$$

換言之, 對於一個彈簧, 透過懸掛質量為 m 的物體與彈簧的伸長量 L 可推得彈性係數 k。

再來我們討論彈簧的動態力學。首先設定在靜力平衡的時候, 時間爲 $t=0$, 此時物體的質心位置爲 $y(0)=0$。所以 $y(t)$ 表示物體在時刻 t 下對於坐標中心的位移。根據牛頓第二運動定律,

$$my''(t)=f(t),$$

其中 $f(t)$ 代表時刻 t 下作用於物體的合力。這時, 合力有以下幾種可能的力組合而成:

- 物體受到重力 $F_g=mg$ 的影響, 方向向下。
- 彈簧力 $F_s=-k(L+y(t))$, 因爲在物體在 $y(t)$ 的狀態下, 總共伸長了 $L+y(t)$。
- 阻力 F_d。在實際系統中, 存在著某種影響振動的阻力, 而這種阻力會不斷地消耗能量, 使振幅減小。在振動過程中的阻力都常稱爲 *阻尼* (damping)。阻尼的方向總是與物體運動的方向相反, 大小與物體的速度成正比。所以寫下來會是 $F_d=-\gamma y'(t)$。
- 其他外在的力, 以 $F(t)$ 表示。

所以將上述四種力的效應結合, 並代入方程式得到

$$\begin{aligned}my''(t)&=F_g+F_s+F_d+F(t)=mg-k(L+y(t))-\gamma y'(t)+F(t)\\&=-ky(t)-\gamma y'(t)+F(t);\end{aligned}$$

也就是說,

$$my''(t)+\gamma y'(t)+ky(t)=F(t),$$

其中 m,γ,k 都是正的常數。上述方程是一個二階線性非齊次常係數微分方程式, 所以只要給定初始條件 $y(0)=y_0, y'(0)=y_0'$ 就可以了解在彈簧振動系統中物體在時刻 t 的所在位置 $y(t)$。

現在我們繼續針對這些常數的大小細分幾種情形:

(A) 假設阻力忽略不計, 並且不受其他外力 (undamped free vibration), 則方程式爲

$$my''(t)+ky(t)=0,$$

其特徵方程式 $mr^2+k=0$, 而特徵方程式的根爲 $r=\pm\omega_0 i$, 其中 $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, 所以方程式的一般解爲

$$y(t)=c_1\cos(\omega_0 t)+c_2\sin(\omega_0 t)=R\cos(\omega_0 t-\delta),$$

其中 ω_0 稱爲 *頻率* (frequency), $R=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$ 稱爲 *振幅* (amplitude), 而 δ 稱爲 *相角* (phase angle), 而相角滿足 $\cos\delta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ 與 $\sin\delta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$。

上述是彈簧振動最簡單的型式, 稱爲 *簡諧運動* (simple harmonic motion), 此時簡諧運動的 *周期* (period) 爲 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。

關於簡諧運動, 我們可將時間 t 對於位置函數 $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$ 的圖形畫出, 如圖 3.2 所示:

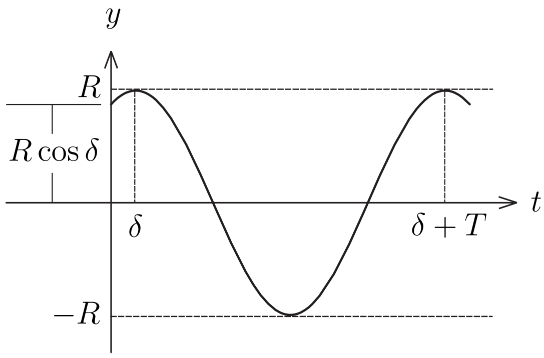

圖 3.2: 簡諧運動 $y(t) = R\cos(\omega_0 t - \delta)$。

(B) 假設沒有其他外力, 而將阻力的因素納入考慮時 (damped free vibration), 則方程式爲

$$my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = 0,$$

其對應到的特徵方程式爲 $mr^2 + \gamma r + k = 0$, 而特徵方程式的根爲

$$r_{\pm} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m}。$$

這裡根據 $\gamma^2 - 4mk$ 的正負號, 又分成三種情形:

(B1) 若 $\gamma^2 - 4mk > 0$, 則 $y(t) = c_1 \mathrm{e}^{r_+ t} + c_2 \mathrm{e}^{r_- t}$, 這個情況稱爲 過阻尼 (overdamping)。因爲 γ, k, m 都是正數, 所以 $r_{\pm} < 0$, 因此當 $t \to \infty$ 時, $\mathrm{e}^{r_+ t} \to 0$ 且 $\mathrm{e}^{r_- t} \to 0$。因爲阻力過大, 所以這樣的彈簧振動最多只會造成一次的振盪。如圖 3.3 所示。

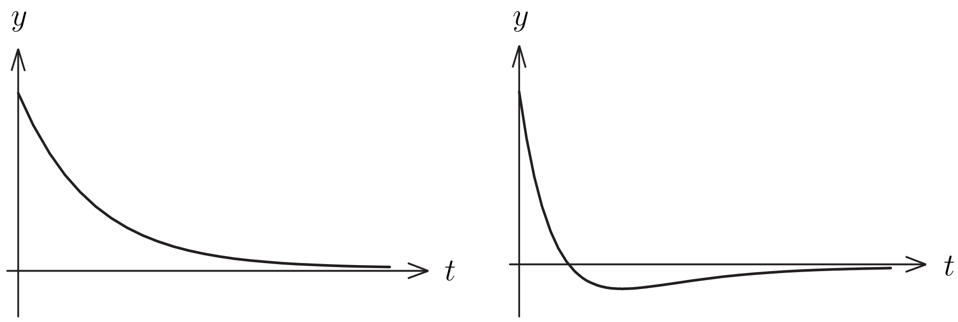

圖 3.3: 過阻尼的彈簧振動。左: $y(t) = \mathrm{e}^{-t}$; 右: $y(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t}$。

這裡補充說明爲什麼這種情形的彈簧振動最多只會造成一次的振盪: 如果 $c_1 = 0$ 或是 $c_2 = 0$, 則 $y(t)$ 是單調函數, 所以不會有振盪的現象。如果 $c_1 \neq 0$ 且 $c_2 \neq 0$, 計算 $y'(t) = c_1 r_+ \mathrm{e}^{r_+ t} + c_2 r_- \mathrm{e}^{r_- t} = \mathrm{e}^{r_+ t}(c_1 r_+ + c_2 r_- \mathrm{e}^{(r_- - r_+)t}) = 0$, 得到 $\mathrm{e}^{(r_- - r_+)t} = -\frac{c_1 r_+}{c_2 r_-}$, 因爲函數 $\mathrm{e}^{(r_- - r_+)t}$ 單調, 所以滿足 $\mathrm{e}^{(r_- - r_+)t} = -\frac{c_1 r_+}{c_2 r_-}$ 的解 (函數 $y(t)$ 的臨界點) 最多只有一個。因此彈簧振動最多只會造成一次的振盪。

(B2) 若 $\gamma^2-4mk=0$, 則 $y(t)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}+c_2t\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}$。這個情形稱爲 臨界阻尼 (critical damping)。因爲當 $t\to\infty$ 時, $t\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}\to 0$ 且 $t\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}\to 0$, 所以在臨界阻尼的情形下, 彈簧振動最多只會造成一次的振盪。如圖 3.4 所示, 左圖呈現的函數是 $y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+2t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$; 而右圖呈現的函數是 $y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-\frac{3}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$。

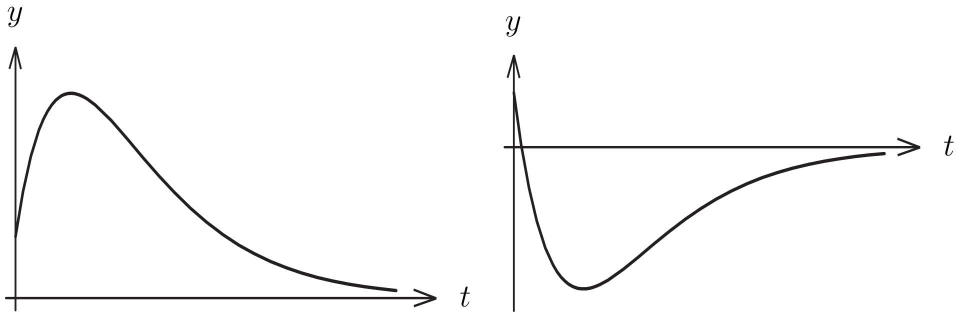

圖 3.4: 臨界阻尼的彈簧振動。

同樣地, 這裡也補充說明爲什麼這種情形的彈簧振動最多只會造成一次的振盪: 如果 $c_2=0$, 則 $y(t)=c_1\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}$ 是一個單調函數, 所以不會造成振盪。如果 $c_2\neq 0$, 計算

$$y'(t)=c_1\left(-\frac{\gamma}{2m}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}+c_2\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}+c_2t\left(-\frac{\gamma}{2m}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}=0,$$

因爲 $\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}>0$, 所以滿足 $y'(t)=0$ 的條件爲 $c_1\left(-\frac{\gamma}{2m}\right)+c_2+c_2t\left(-\frac{\gamma}{2m}\right)=0$, 於是 $t=\frac{2m}{c_2\gamma}(c_2-\frac{c_1\gamma}{2m})=\frac{2m}{\gamma}-\frac{c_1}{c_2}$ 是 $y(t)$ 唯一的臨界點。因此彈簧振動最多只會造成一次的振盪。

(B3) 若 $\gamma^2-4mk<0$, 則

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}(c_1\cos(\mu t)+c_2\sin(\mu t))=R\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}\cos(\mu t-\delta),$$

其中 $R=\sqrt{c_1^2+c_2^2}$, $\mu=\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{2m}$, 而 δ 滿足 $\cos\delta=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$ 與 $\sin\delta=\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$。這個情形稱爲 低阻尼 (underdamping)。此時彈簧的振盪始終介於 $\pm R\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2m}t}$ 之間, 並且不斷地振盪。在圖 3.5 中, 黑色虛線滿足 $y''+y=0, y(0)=2, y'(0)=0$; 紅色實線滿足 $y''+\frac{1}{8}y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=0$。藍色的虛線是 $y(t)=\pm 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}t}$。

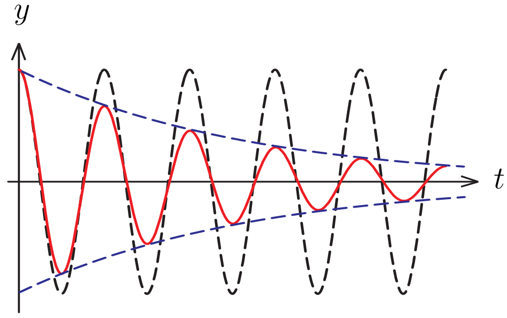

圖 3.5: 低阻尼的彈簧振動。

(C) 若在彈簧的裝置上施予 周期的外力 (periodic external force) $F_0\cos(\omega t)$, 其中 $\omega > 0$, 而阻力忽略不計的情況下, 則方程式爲

$$my''(t) + ky(t) = F_0\cos(\omega t)。$$

由 (A) 的情況得知齊次式的解爲 $y_h(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t)$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$。
如果 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$, 則方程式的一般解爲

$$y(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t)。 \tag{1}$$

如果物體在 $t = 0$ 時設定成 $y(0) = 0, y'(0) = 0$, 那麼

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0,$$

利用和差化積公式, 可將 (1) 式改寫爲

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) \\ &= \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\left(\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}\right), \end{aligned} \tag{2}$$

如果 $|\omega_0 - \omega|$ 很小, 則 $\omega_0 + \omega$ 相對於 $|\omega_0 - \omega|$ 而言很大, 因此 $\sin(\frac{(\omega_0+\omega)t}{2})$ 相對於 $\sin(\frac{(\omega_0-\omega)t}{2})$ 而言是快速振盪的函數。

例如考慮 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4}{5}t\right), y(0) = 0, y'(0) = 0$, 這時 $m = 1, k = 1, \omega_0 = 1, \omega = \frac{4}{5}, F_0 = \frac{1}{2}$, 所以

$$y(t) = \left[\frac{25}{9}\sin\left(\frac{1}{10}t\right)\right]\sin\left(\frac{9}{10}t\right),$$

畫出來的函數圖形如圖 3.6 所示:

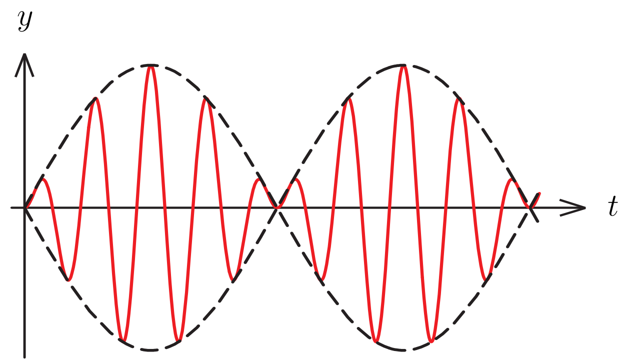

圖 3.6: 微分方程式 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4}{5}t\right), y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的解。

注意在 (2) 式當中, 故意用中括號把前兩項框起來, 這是有用意的, 它將刻畫出如圖 3.6 當中的虛線。而紅色的實線是方程式的解, 他會被框在虛線當中。這個現象稱爲 拍頻現象 (beat)。

如果 $\omega_0 = \omega$, 則方程式的一般解爲

$$y(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t)。$$

例如考慮 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$, 此時 $m = 1, k = 1, \omega = 1, \omega_0 = 1, F_0 = \frac{1}{2}$, 所以 $y(t) = \frac{1}{4}t\sin t$。如圖 3.7 的紅色實線所示, 而虛線代表的是 $y(t) = \frac{1}{4}t$。

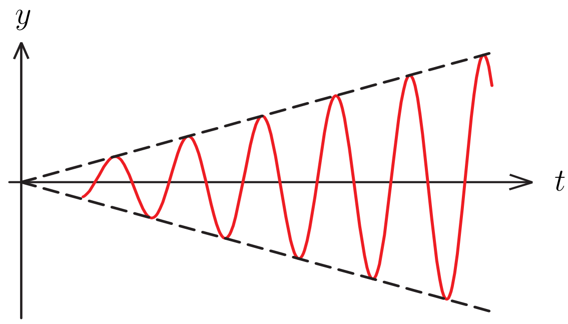

圖 3.7: 微分方程式 $y'' + y = \frac{1}{2}\cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 的解。

觀察特解的型式爲 $\frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t)$, 得知當 $t \to \infty$ 時, $y(t) \to \infty$, 所以在圖形上會看到曲線的振盪幅度會愈來愈大, 這個現象稱爲 共振 (resonance)。

(D) 當彈簧受到周期的外力 $F(t) = F_0\cos\omega t$ 與阻力 (forced vibration with damping) 影響時, 微分方程式爲 $my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = F_0\cos\omega t$, 其一般解爲

$$y(t) = y_h(t) + \frac{F_0}{\Delta}\left(\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)m}{\Delta}\cos(\omega t) + \frac{\omega\gamma}{\Delta}\sin(\omega t)\right) = y_h(t) + R\cos(\omega t - \delta),$$

其中 $y_h(t)$ 是齊次方程式 $my''(t) + \gamma y'(t) + ky(t) = 0$ 的一般解, 如 (B) 的討論, 有三種可能; 而 $R = \frac{F_0}{\Delta}, \cos\delta = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)m}{\Delta}, \sin\delta = \frac{\omega\gamma}{\Delta}$, 其中 $\Delta = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2m^2 + \omega^2\gamma^2}$。

以下示意幾個不同外力下的解會的現象; 黑色虛線是外力, 紅色實線是方程式的解。

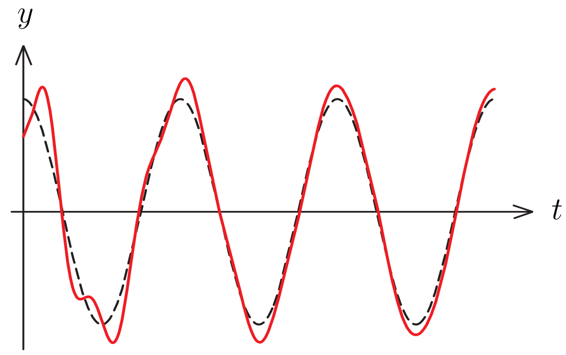

圖 3.8: 微分方程式 $y'' + \frac{1}{8}y' + y = 3\cos(\frac{3}{10}t), y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解。

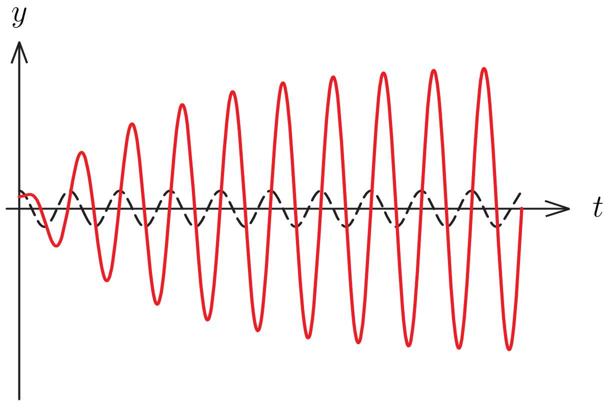

圖 3.9: 微分方程式 $y'' + \frac{1}{8}y' + y = 3\cos t, y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解。

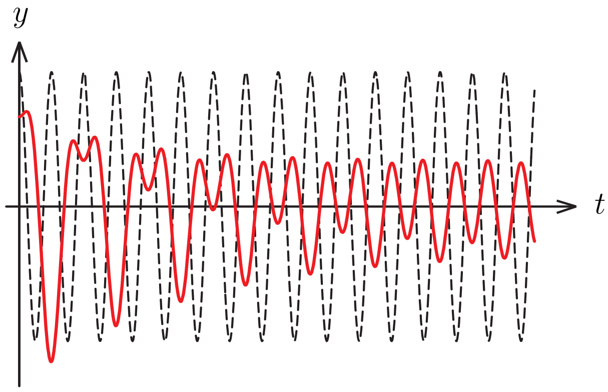

圖 3.10: 微分方程式 $y'' + \frac{1}{8}y' + y = 3\cos(2t), y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解。

至此我們已經將彈簧振動的所有可能的情況都分類完畢, 各位可以看到彈簧的振動是非常豐富的。這裡我們再將前面的討論做一個總結: 在 (A) 的情況是討論無外力而且忽略阻力的效應, 所得到的彈簧振動解是漂亮的三角函數; 在 (B) 的情況是觀察無外力但是將阻力的影響納入考慮時, 若阻力太大, 則可預期彈簧不會產生什麼振盪; 若阻力較小, 彈簧雖然會不斷振盪, 但是振幅會隨時間愈來愈小, 而且振幅是呈現指數型遞減。

至於 (C) 則是探討在彈簧裝置上施予周期的外力但阻力忽略的情形, 如果外力的周期與彈簧振動的周期不一樣的時候, 彈簧振動會有所謂的拍頻現象; 如果外力的周期與彈簧振動的周期一樣, 彈簧振動會產生共振的效應。最後 (D) 則是探討在彈簧裝置上施予周期的外力而且阻力的效應也納入考慮的情形, 這時彈簧振動會根據周期的外力的不同, 可能會和三角函數的解近似, 也可能有共振的效應, 也可能是有振盪現象, 振幅愈來愈小。

從彈簧的振動可以進行實驗, 然後將實驗的結果與微分方程式所得到的解加以映證, 這是一個很好再細細體會的一個主題。

3.6.2 電子電路

一個最簡單的 電子電路 (Electric Circuits) 是由以下幾個元件組成:

- 電動勢 (electromotive force), 它代表電池或電源供應器等裝置。
- 電阻 (resistor), 以 R 表示, 單位是 歐姆 (ohms), 簡記爲 (Ω)。
- 電感 或 誘導器 (inductor), 以 L 表示, 單位是 亨利 (henries), 簡記爲 (H)。
- 電容器 (capacitor), 以 C 表示, 單位是 法拉 (farads), 簡記爲 (F)。

而我們想觀察一個 串聯 (series connected) 的電子電路中時刻 t 中的某個截面的三個量:

- 電壓 (voltage), 以 $E(t)$ 表示, 單位是 伏特 (volts), 簡記爲 (V)。電壓的產生來自於電動勢的供應。
- 電流 (current), 以 $I(t)$ 表示, 單位是 安培 (amperes), 簡記爲 (A)。
- 電荷 (charge), 以 $Q(t)$ 表示, 單位是 庫侖 (coulombs), 簡記爲 (C)。

圖 3.11 示意兩種電子電路裝置。左圖有電動勢、電阻與電感 — 稱爲 RL 電路; 右圖除了動勢、電阻與電感外, 另外加裝了電容 — 稱爲 RLC 電路。

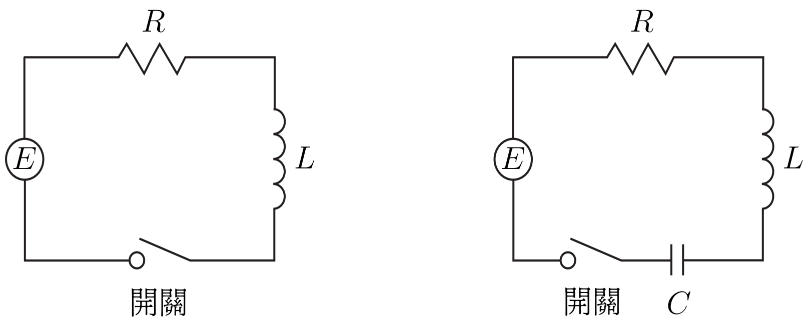

圖 3.11: 串聯的 RL 電路與 RLC 電路。

根據 歐姆定律 (Ohm's Law), 我們知道各裝置造成電壓下降的關係:

- 電阻造成電壓下降的量與電流成正比, 也就是 RI。
- 電容是電荷與電壓的比值, 所以 $C = \frac{Q}{V}$, 所以電容造成電壓下降的量是 $\frac{Q}{C}$。
- 電感造成電壓下降的量與電流的變化成正比, 也就是 $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$。

而電壓、電流與電荷之間的關係是由 克希荷夫定律 (Kirchhoff's Law) 聯繫:

> 在一個封閉的電路中, 所有元件兩端的電位差 (電壓) 的代數和等於零。

所以對於 RL 電路, 我們可以寫出以下微分方程式:

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI(t)=E(t),$$

這是對電流函數而言的一階線性非齊次常係數微分方程式。

例 **1** (第 154 頁)**.** 一個串聯的 RL 電路, 其電阻 $R=12\,\Omega$, 電感 $4\,\mathrm{H}$。若接上 $E(t)=60\sin(30t)\,\mathrm{V}$ 的電動勢, 其中 $t\geq 0$, 並假設在 $t=0$ 時, 開關未打開, 試求電流 $I(t)$。

解**.** 電流 $I(t)$ 滿足以下微分方程式:

$$\begin{cases}4I'+12I=60\sin(30t)\\ I(0)=0,\end{cases}$$

首先將方程式改寫成 $I'+3I=15\sin(30t)$, 將方程式兩邊乘上積分因子 $\mathrm{e}^{\int 3\,\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{3t}$ 後得到

$$\mathrm{e}^{3t}I'+3\mathrm{e}^{3t}I=15\mathrm{e}^{3t}\sin(30t)\Rightarrow(\mathrm{e}^{3t}I)'=15\mathrm{e}^{3t}\sin(30t),$$

兩邊對於 t 積分後得到

$$\mathrm{e}^{3t}I=\int 15\mathrm{e}^{3t}\sin(30t)\,\mathrm{d}t,$$

關於右式的不定積分, 透過分部積分 (Integration by Parts) 兩次而得, 做法如下:

$$\begin{aligned}A&=15\int\mathrm{e}^{3t}\sin(30t)\,\mathrm{d}t=5\int\sin(30t)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{3t}=5\left(\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-\int\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}\sin(30t)\right)\\&=5\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-150\int\mathrm{e}^{3t}\cos(30t)\,\mathrm{d}t=5\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-50\int\cos(30t)\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{3t}\\&=5\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-50\left(\cos(30t)\mathrm{e}^{3t}-\int\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}\cos(30t)\right)\\&=5\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-50\cos(30t)\mathrm{e}^{3t}-1500\int\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}\,\mathrm{d}t\\&=5\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-50\cos(30t)\mathrm{e}^{3t}-100A,\end{aligned}$$

得到

$$A=\frac{1}{101}\left(5\sin(30t)\mathrm{e}^{3t}-50\cos(30t)\mathrm{e}^{3t}\right)+C,\quad \text{其中 } C\in\mathbb{R}\text{。}$$

所以

$$I(t)=\mathrm{e}^{-3t}A=\frac{1}{101}\left(5\sin(30t)-50\cos(30t)\right)+C\mathrm{e}^{-3t}\text{。}$$

因為 $I(0)=0$, 得到 $0=-\frac{50}{101}+C$, 即 $C=\frac{50}{101}$。因此,

$$I(t)=\frac{1}{101}\left(5\sin(30t)-50\cos(30t)\right)+\frac{50}{101}\mathrm{e}^{-3t}\text{。}$$

再來我們考慮 RLC 電路, 根據克希荷夫定律, 因爲 $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, 所以

$$L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t) \Rightarrow L\,\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)。 \tag{3}$$

它是一個對電荷函數而言的二階線性非齊次常係數微分方程式, 若觀察到在 $t = t_0$ 時刻的電荷量 $Q(t_0) = Q_0$ 與電流量 $I(t_0) = I_0$, 則可知道在 $t > t_0$ 的電荷與電流。

這裡做一個註記: 若將方程式 (3) 兩邊對 t 微分, 可以得到對電流函數 $I(t)$ 而言的二階線性非齊次常係數微分方程式:

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2I}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)。$$

例 **2** (第 154 頁)**.** 一個串聯的 RLC 電路, 其電阻 $R = 2\,\Omega$, 電感 $L = 1\,\mathrm{H}$, 電容 $C = 0.25\,\mathrm{F}$, 電壓 $E(t) = 50\sin t\,\mathrm{V}$, 試求電荷 $Q(t)$。

解**.** 電荷 $Q(t)$ 滿足以下微分方程式:

$$Q'' + 2Q' + 4Q = 50\sin t,$$

首先考慮齊次微分方程式 $Q'' + 2Q' + 4Q = 0$, 它對應到的特徵方程式爲 $r^2 + 2r + 4 = 0$, 解得 $r = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot4}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\,i$, 所以齊次微分方程式的解爲

$$Q_h = \mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t)\right), \quad 其中\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}。$$

再找微分方程式 $Q'' + 2Q' + 4Q = 50\sin t$ 的特解。考慮 $Q_p = A\cos t + B\sin t$ 滿足微分方程式, 其中 $A, B \in \mathbb{R}$ 爲待定常數, 因爲

$$(Q_p)'' + 2(Q_p)' + 4Q_p = (3A + 2B)\cos t + (3B - 2A)\sin t = 50\sin t,$$

於是 $3A + 2B = 0$ 且 $3B - 2A = 50$, 得到 $A = -\frac{100}{13}, B = \frac{150}{13}$。因此

$$Q(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(C_1\cos(\sqrt{3}t) + C_2\sin(\sqrt{3}t)\right) - \frac{100}{13}\cos t + \frac{150}{13}\sin t, \quad 其中\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}。$$

上面的電子電路模型得到微分方程式的解可以充分地模擬當電源供應穩定的情形下電荷或電流對於時間的關係。然而到目前爲止所討論的微分方程式, 不論是方程式的每一項係數或是非齊次項的函數, 都必須要求在討論的範圍內是連續函數, 這樣微分方程式的解還有理論才得以完整呈現。

在現實生活中, 我們其實是會遇到一些特殊情況, 例如突然停電一秒之後又復電這樣供電不穩定的情形下, 這時要如何利用微分方程式的解來解釋或是估計在停電前後幾秒當中的電荷還有電流呢? 要研究這樣的問題是非常重要的, 比方說手機在充電的時候, 這樣不正常的供電有沒有可能導致手機壞掉? 對於研發手機的工程師來說, 有什麼方法或機制可以防止因供電問題導致手機故障? 又或者說, 我們有沒有可能了解在電源打開的那一瞬間電荷還有電流的情況? 而這些問題反應到數學上則是在說明我們必須開始了解當非齊次項的函數不再是連續函數時, 這類型的微分方程式該如何求解。而這樣的問題, 我們將在下一章試圖給出答案。

3.7 邊界值問題解不存在或不唯一的例子

前面的單元是在探討初始值問題解的存在唯一性。這一個單元想要討論的是邊界值問題解的存在性或唯一性。這裡以實際例子進行討論。

例 **1.** 考慮邊界值問題: $y''-2y'+2y=0, y(a)=c, y(b)=d$。

(A) 如果邊界值問題有唯一解, 那麼 a 和 b 的關係爲何?

(B) 如果邊界值問題無解, 那麼 a,b,c,d 的關係爲何?

(C) 如果邊界值問題有無限多解, 那麼 a,b,c,d 的關係爲何?

解. 關於微分方程 $y''-2y'+2y=0$, 它對應到的特徵方程式爲 $r^2-2r+2=0$, 得到

$$r=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=1\pm i,$$

所以微分方程式的一般解爲 $y=\mathrm{e}^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$, 其中 $C_1,C_2\in\mathbb{R}$。

將 $y(a)=c$ 與 $y(b)=d$ 代入後得到對於 C_1 與 C_2 的聯立方程式:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{e}^a\left(C_1\cos a+C_2\sin a\right)=c\\ \mathrm{e}^b\left(C_1\cos b+C_2\sin b\right)=d\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos a\cdot C_1+\sin a\cdot C_2=c\cdot\mathrm{e}^{-a}\\ \cos b\cdot C_1+\sin b\cdot C_2=d\cdot\mathrm{e}^{-b}\text{。}\end{array}\right.$$

根據克拉瑪公式 (Cramer's rule), 記

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos a & \sin a\\ \cos b & \sin b\end{vmatrix}=\sin(b-a),\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}c\cdot\mathrm{e}^{-a} & \sin a\\ d\cdot\mathrm{e}^{-b} & \sin b\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}\cos a & c\cdot\mathrm{e}^{-a}\\ \cos b & d\cdot\mathrm{e}^{-b}\end{vmatrix}\text{。}$$

(A) 若 $\Delta\neq 0$, 則邊界值問題有唯一解。現將 $\Delta\neq 0$ 這個條件表示成與 a,b 的關係式時, 則爲 $b\neq a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$。

(B) 若 $\Delta=0$, 而 Δ_x 與 Δ_y 不同時爲零, 則邊界值問題無解。因爲 $\Delta=0$ 表示 $b=a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, 得到

$$\begin{aligned}\sin b&=\sin(a+k\pi)=\sin a\cos(k\pi)+\cos a\sin(k\pi)=(-1)^k\sin a\\ \cos b&=\cos(a+k\pi)=\cos a\cos(k\pi)-\sin a\sin(k\pi)=(-1)^k\cos a,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\Delta_x&=\sin a\cdot\mathrm{e}^{-a}\left((-1)^k\cdot c-\mathrm{e}^{-k\pi}\cdot d\right)\\ \Delta_y&=\cos a\cdot\mathrm{e}^{-a}\left(\mathrm{e}^{-k\pi}\cdot d-(-1)^k\cdot c\right)=-\cos a\cdot\mathrm{e}^{-a}\left((-1)^k\cdot c-\mathrm{e}^{-k\pi}\cdot d\right),\end{aligned}$$

因此邊界值問題無解的條件是 $a=j\cdot\frac{\pi}{2}, j\in\mathbb{Z}, b=a+k\pi, k\in\mathbb{Z}, (-1)^k\cdot c-\mathrm{e}^{-k\pi}\cdot d\neq 0$。

(C) 若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, 則邊界值問題有無限多解。因爲 $\Delta=0$ 表示 $b=a+k\pi, k\in\mathbb{Z}$, 而 $\Delta_x=\Delta_y=0$ 對應到的條件是 $(-1)^k\cdot c-\mathrm{e}^{-k\pi}\cdot d=0$。所以邊界值問題有無限多解的條件是 $b=a+k\pi, k\in\mathbb{Z}, (-1)^k\cdot c-\mathrm{e}^{-k\pi}\cdot d=0$。

3.8 二階線性微分方程式初始值問題解的存在唯一性定理

這一個單元將回答二階線性微分方程式初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+q(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+r(x)y(x)=g(x),\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,$$

解的存在性與唯一性。首先, 將上述二階線性微分方程式轉化成一階線性微分方程組, 令 $y_1(x)=y(x)$ 與 $y_2(x)=y'(x)$, 則二階線性微分方程式搭配矩陣的註記可以整理成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{bmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -r(x) & -q(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ g(x)\end{bmatrix},$$

至於初始值條件 $y(x_0)=y_0$ 與 $y'(x_0)=y'_0$ 將改寫成

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0)\\ y_2(x_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_0\\ y'_0\end{bmatrix}。$$

關於矩陣, 我們使用粗體字的方式註記會讓式子較爲精簡, 比方說, 記

$$\mathbf{y}(x)=\begin{bmatrix} y_1(x)\\ y_2(x)\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -r(x) & -q(x)\end{bmatrix},\quad \mathbf{g}(x)\begin{bmatrix} 0\\ g(x)\end{bmatrix},\quad \mathbf{y}_0=\begin{bmatrix} y_0\\ y'_0\end{bmatrix},$$

那麼我們要討論的二階線性微分方程式初始值問題就可以寫成以下形式:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{y}(x)=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)+\mathbf{g}(x)\\ \mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{1}$$

以下將討論方程組 (1) 解的存在性與唯一性。各位可以看到以下討論過程形式上與一階微分方程式初始值問題解的存在唯一性有相近之處。

定理 2. 假設 $\mathbf{A}(x)$ 與 $\mathbf{g}(x)$ 在區間 $I=(a,b)$ 上連續, 則方程組 (1) 的解在區間 I 上存在且唯一。

證明: 首先證明: 向量函數 $\mathbf{y}(x)$ 在區間 I 上滿足方程組 (1) 等價於函數 $\mathbf{y}(x)$ 在區間 I 上滿足積分方程組

$$\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u。$$

($\Rightarrow$) 假設 $\mathbf{y}(x)$ 是方程組 (1) 在區間 I 上的解, 將方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{y}(x)=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)+\mathbf{g}(x)$ 兩邊對於 x 積分並搭配初始值 $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$ 得到

$$\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u。$$

($\Leftarrow$) 假設 $\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u$ 是積分方程組的解, 則兩邊對於 x 求導後得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{y}(x)=\mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)+\mathbf{g}(x),$$

而且 $\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u$ 將 $x=x_0$ 代入後得到 $\mathbf{y}(x_0)=\mathbf{y}_0$。

以下證明積分方程式解的存在性的方法稱爲 皮卡德迭代法 (Picard's iteration method): 令 $\mathbf{y}_0(x)=\mathbf{y}_0$。對於 $n\in\mathbb{N}$, 定義

$$\mathbf{y}_n(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}\left(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}_{n-1}(u)+\mathbf{g}(u)\right)\,\mathrm{d}u,$$

於是我們得到向量值函數列 $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$。現依序證明以下事情:

(A) 因爲 $\mathbf{A}(x)$ 與 $\mathbf{g}(x)$ 在區間 $I=(a,b)$ 上連續, 所以對所有 $n\in\mathbb{N}$, $\mathbf{y}_n(x)$ 在區間 I 上連續。

(B) 以下欲證明: $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 在區間 I 上是均勻收斂的。

對於 $n\in\mathbb{N}$, 將 $\mathbf{y}_n(x)$ 重新表示成

$$\mathbf{y}_n(x)=\mathbf{y}_0(x)+\sum_{k=1}^{n}(\mathbf{y}_k(x)-\mathbf{y}_{k-1}(x)),$$

以下欲證明 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathbf{y}_k(x)-\mathbf{y}_{k-1}(x))$ 是均勻收斂的, 則可得 $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 在區間 I 上也是均勻收斂的。

因爲 $\mathbf{A}(x)$ 與 $\mathbf{g}(x)$ 在區間 I 上連續, 所以 $\|\mathbf{A}(x)\|,\|\mathbf{g}(x)\|$ 在區間 I 上有界, 即存在正數 L,N 使得 $\|\mathbf{A}(x)\|\le L$ 與 $\|\mathbf{g}(x)\|\le N$, 其中 $x\in I$。

以下用數學歸納法證明對於 $k\in\mathbb{N}$ 以及 $x\in I$ 都有

$$\|\mathbf{y}_k(x)-\mathbf{y}_{k-1}(x)\|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|^k)}{k!},$$

其中 $M=L\|\mathbf{y}_0\|+N$。

- 當 $k=1$, 對於 $x\in I$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_1(x)-\mathbf{y}_0(x)\|&=\left\|\int_{x_0}^{x}\left(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}_0(u)+\mathbf{g}(u)\right)\,\mathrm{d}u\right\|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left(\|\mathbf{A}(u)\|\|\mathbf{y}_0\|+\|\mathbf{g}(u)\|\right)\,\mathrm{d}u\right|\\&\le M|x-x_0|。\end{aligned}$$

- 假設 $k=j$ 時不等式成立; 也就是說, 對於 $x\in I$ 都有 $\|\mathbf{y}_j(x)-\mathbf{y}_{j-1}(x)\|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^j}{j!}$。

當 $k=j+1$ 時且 $x\in I$ 有

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_{j+1}(x)-\mathbf{y}_j(x)\|&=\left\|\int_{x_0}^{x}\mathbf{A}(u)\left(\mathbf{y}_j(u)-\mathbf{y}_{j-1}(u)\right)\,\mathrm{d}u\right\|\\&\le\left|\int_{x_0}^{x}\|\mathbf{A}(u)\|\|\mathbf{y}_j(u)-\mathbf{y}_{j-1}(u)\|\,\mathrm{d}u\right|\\&\le\left|\int_{x_0}^{x}M\frac{(L|u-x_0|)^j}{j!}\,\mathrm{d}u\right|=\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{j+1}}{(j+1)!}。\end{aligned}$$

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對所有 $x\in I$ 與 $k\in\mathbb{N}$, 都有

$$\|\mathbf{y}_k(x)-\mathbf{y}_{k-1}(x)\|\le\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|^k)}{k!}。$$

由魏爾斯特拉斯 M-判別法 (Weierstrass M-test) 得知: 級數 $\sum\limits_{k=1}^{n}(\mathbf{y}_k(x)-\mathbf{y}_{k-1}(x))$ 在區間 I 上是均勻收斂的。因此 $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 在區間 I 上是均勻收斂的。

(C) 記 $\mathbf{y}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{y}_n(x)$, 則 $\mathbf{y}(x)$ 是微分方程組 $\mathbf{y}=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u$ 在區間 I 上的連續解。

因爲 $\mathbf{y}_n(x)$ 在區間 I 上連續, 而且 $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 在區間 I 上是均勻收斂至 $\mathbf{y}(x)$, 將

$$\mathbf{y}_n(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}_{n-1}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u$$

兩邊對於 $n\to\infty$ 取極限, 得到

$$\mathbf{y}(x)=\mathbf{y}_0+\int_{x_0}^{x}(\mathbf{A}(u)\mathbf{y}(u)+\mathbf{g}(u))\,\mathrm{d}u$$

是積分方程組的連續解。

(D) 以下證明<u>唯一性</u>:

假設 $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ 是方程組在區間 I 上的另一個連續解, 則

$$\mathbf{y}(x)-\tilde{\mathbf{y}}(x)=\int_{x_0}^{x}\mathbf{A}(s)(\mathbf{y}(u)-\tilde{\mathbf{y}}(u))\,\mathrm{d}u,$$

於是

$$\|\mathbf{y}(x)-\tilde{\mathbf{y}}(x)\|\le\left|\int_{x_0}^{x}\|\mathbf{A}(u)\|\|\mathbf{y}(u)-\tilde{y}(u)\|\,\mathrm{d}u\right|, \tag{2}$$

因爲在區間 I 上 $\|\mathbf{A}(x)\|$ 和 $\|\mathbf{y}(x)-\tilde{\mathbf{y}}(x)\|$ 是連續有界的, 因此, 存在常數 L_1, K_1 使得 $\|\mathbf{A}(x)\|\le L_1, \|\mathbf{y}(x)-\tilde{y}(x)\|\le K_1$, 其中 $x\in I$。

由 (2) 可知 $\|\mathbf{y}(x)-\tilde{\mathbf{y}}(x)\|\le L_1K_1|x-x_0|, x\in I$。將此不等式再代入 (2) 後得到

$$\|\mathbf{y}(x)-\tilde{\mathbf{y}}(x)\|\le K_1\frac{L_1|x-x_0|^2}{2}, x\in I,$$

由數學歸納法可得

$$\|\mathbf{y}(x)-\tilde{\mathbf{y}}(x)\|\le K_1\frac{L_1|x-x_0|^n}{n!}, x\in I,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}K_1\frac{L_1|x-x_0|^n}{n!}=0$, 所以 $\mathbf{y}(x)=\tilde{\mathbf{y}}(x)$, 其中 $x\in I$。

$\square$