微分方程講義第 2 章

授課教師　李國瑋

目錄

2 一階微分方程式 **15**

2.1 分離變數型微分方程式 16

2.2 齊次微分方程式 23

2.3 一階線性微分方程式 27

2.4 數學模型 31

2.4.1 人口模型 (Population Growth) 31

2.4.2 放射性元素的衰退 (Radioactive Decay) 32

2.4.3 牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling) 33

2.4.4 連續複利 (Continuously Compounded Interest) 33

2.4.5 邏輯斯模型 (Logistic Models) 34

2.4.6 其它的數學模型 35

2.5 正合方程式 38

2.6 一階微分方程式的綜合討論 41

2.7 一階微分方程式初始值問題解的存在唯一性定理 44

2.7.1 預備知識 44

2.7.2 一階微分方程式初始值問題解的存在唯一性定理 47

2.7.3 一階微分方程解不唯一的例子 50

2

一階微分方程式

這一章探討的主題是一階常微分方程式, 主要是根據方程式的形態進行分類以求解並分析解的性質。單元 2.1 將介紹分離變數型微分方程式 (separable differential equation), 除了討論這類型的方程如何求解之外, 透過例子和第 1 章介紹微分方程的步初認識相對照, 讓大家能夠了解微分方程這個領域的一些基本概念。這個單元還會用一些篇幅深度討論單變數函數與多變數函數微分 (differential) 的意義, 從線性代數的觀點解釋函數的微分, 除了澄清過往各位對於微分的誤解, 也試圖將微分方程與線性代數看似兩個不同的領域連繫。

單元 2.2 要觀察的是齊次微分方程式 (homogeneous differential equation), 關於齊次微分方程式, 只要利用簡單的變數變換法則, 就可以將方程式轉變爲分離變數型微分方程式, 故而能夠求解。此外, 齊次微分方程式的一個應用是回答正交軌線的問題。單元 2.3 則是討論一階線性微分方程式 (first order linear differential equation), 透過積分因子法, 我們可以順利得到一階線性微分方程式的解, 而積分因子的尋找與分離變數型微分方程式有關。此外, 這個單元也會說明線性的實質意義, 特別是線性微分方程式的解空間與線性代數的關係。

數學上雖然我們可以隨意設定微分方程式然後考驗一個人對於方程式的求解與分析能力, 但更重要的是微分方程是在幫助我們建立數學模型。對於一個生活中遇到的問題, 若模型設立得好, 不僅可以解釋過去, 也可以描述現狀, 更可以預測未來。單元 2.4 會從最基本的人口模型出發, 討論幾個和人口模型相同的原理以應用到其它領域, 例如放射性元素的衰退、牛頓冷卻定律、連續複利問題。然後再回到人口模型, 觀察長時間下人口的增長情況, 由此重新修正數學模型, 利用合理的假設轉化成數學上可操作的概念, 再從修正後的模型重新得到數學答案, 最後再次解釋這個解是否合乎實際問題的結果。

單元 2.5 要介紹的是正合方程式 (exact equation), 除了介紹求解的方法外, 對於一些不是正合的方程式, 我們會探討幾類特殊的形式, 分別乘上相應的積分因子後使得方程式變成正合方程式, 這麼一來就可得到方程式的解。至於單元 2.6 是試圖將前面幾個單元的內容進行綜合討論, 從中澄清一些疑問, 比方說分離變數型微分方程式、齊次方程式、線性方程式和正合方程式之間的關係是什麼? 爲什麼我們要分成這麼多類型的微分方程式進行討論而不是只探討正合方程式就好? 在這個單元中都會給予一些說明與解釋。

單元 2.7 則是探討一階微分方程式初始值問題解的存在性與唯一性定理, 整個理論需要用到數學分析當中函數項級數均勻收斂的理論。一階微分方程式初始值問題需要假設一些條件解才會有存在性與唯一性。當條件不成立的時候, 方程式的解不見得唯一, 這件事也會討論。

2.1 分離變數型微分方程式

若要開始學習微分方程式, 分離變數型微分方程式是最容易理解與上手的一類微分方程式, 現給出明確的定義並探討如何求解。

定義 **1** (第 33 頁). 若一階微分方程式可以整理成以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y), \tag{1}$$

我們稱 (1) 式爲 *分離變數型微分方程式* (separable differential equation); 也就是說, 等式左邊只有 $y'(x)$, 而等式右邊可以分解成與 x 有關的函數 $p(x)$ 以及與 y 有關的函數 $q(y)$ 之乘積。

關於分離變數型微分方程式, 首先介紹如何求解:

- 若 $q(y) \neq 0$, 則 (1) 式可改寫爲 $\frac{1}{q(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)$, 將等式兩邊對 x 積分得到

  $$\int \frac{1}{q(y)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int p(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = \int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

  其中最後一式的左式是透過變數變換法則 (substitution rule) 與微分 (differential) 的關係而得, 也就是由 $y = y(x)$ 得到 $\mathrm{d}y \stackrel{\text{定義}}{=\!=} y'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$。從最後一式進行觀察, 因爲等式左邊只與 y 有關, 而等式右邊只與 x 有關, 於是分離變數的特性就完全顯現出來, 這也是爲何將方程式稱爲分離變數型微分方程式的原因。

  假設 $Q(y)$ 是 $\frac{1}{q(y)}$ 的一個反導函數, $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一個反導函數, 則分離變數型微分方程式的解就可以表達成:

  $$Q(y) = P(x) + C \Leftrightarrow Q(y) - P(x) = C,$$

  其中 $C \in \mathbb{R}$ 是積分常數。現將等式左邊記成一個二變數函數 $G(x, y) = Q(y) - P(x)$, 則分離變數型微分方程式的解可以寫成 $G(x, y) = C$, 其中 $C \in \mathbb{R}$。這裡我們得到一族以 C 爲參數的方程式, 每給一個 C, 對應到的方程式 $G(x, y) = C$ 滿足微分方程式 (1)。

- 若 $q(y) = 0$, 則集合 $A = \{y \in \mathbb{R} \mid q(y) = 0\}$ 中的每一個元素 $y = y_1$ 視爲常數函數, 滿足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$。

- 分離變數型微分方程式的一般解是由上述兩類的解收集而成。

若是考慮分離變數型微分方程式的初始值問題, 也就是給定微分方程式 (1) 再外加 $y(x_0) = y_0$ 的條件, 如果 $p(x)$ 與 $q(y)$ 在討論的範圍內都是連續函數時, 在包含 $x = x_0$ 的一個連通分支上常數 C 會被唯一決定。比方說, 考慮 $y'(x) = \frac{1}{x}$ 這個問題, 我們知道 $y(x) = \ln|x| + C$, 實際上這個式子應理解爲:

$$y(x) = \begin{cases} \ln|x| + C_1 & \text{若 } x > 0 \\ \ln|x| + C_2 & \text{若 } x < 0, \end{cases}$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, 它們是兩個獨立的常數。因爲方程式 $y'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 處沒有意義, 所以我們會將問題看成是 $y'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x > 0$ 與 $x < 0$ 的兩個連通分支上各別得到微分方程式的解。

例 **2** (第 33 頁). 試解微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{1-y^2}。$$

解. 注意到函數 $\frac{1}{1-y^2}$ 在 $y=\pm 1$ 時無意義; 對所有 $y \neq \pm 1$, 函數 $\frac{1}{1-y^2} \neq 0$, 此時, 將方程式改寫成

$$(1-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^3 \Rightarrow \int (1-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int (1-y^2)\,\mathrm{d}y = \int x^3\,\mathrm{d}x,$$

等式兩邊各別積分後得到 $y - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{4}x^4 + C, C \in \mathbb{R}$ 或是整理成

$$y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}x^4 = C, \text{ 其中 } C \in \mathbb{R}$$

是微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^3}{1-y^2}$ 的解。

例 **3**. 試解初始值問題 $yy' = xy^2 + y^2 + x + 1, y(0) = -1$。

解. 首先將方程式整理成

$$yy' = xy^2 + y^2 + x + 1 = y^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(y^2+1) \Rightarrow \frac{yy'}{y^2+1} = x+1,$$

將方程式兩邊對於 x 積分後得到

$$\int \frac{yy'}{y^2+1}\,\mathrm{d}x = \int (x+1)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int (x+1)\,\mathrm{d}x。$$

關於左式的積分, 得到

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + C_1 = \frac{1}{2}\ln(y^2+1) + C_1,$$

而右式的積分爲

$$\int (x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + x + C_2,$$

所以 $\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$, 其中 $C = C_2 - C_1 \in \mathbb{R}$。因爲 $y(0) = -1$, 所以 $C = \frac{1}{2}\ln 2$。因此

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\ln 2$$

或是

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\ln 2 = 0$$

是初始值問題 $yy' = xy^2 + y^2 + x + 1, y(0) = -1$ 的解。

關於分離變數型微分方程式, 有兩件事情值得註記。第一, 重新回顧第 1 章單元 1.2 有關微分方程式解的定義, 我們只要寫出 x 和 y 的方程式 $G(x,y) = 0$, 這個方程式不帶有 y 對於 x 的各階求導, 而且透過隱函數微分法將它理解爲 $G(x,y(x)) = 0$ 之下計算出 $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ 的關係式後滿足微分方程式 $F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)) = 0$, 我們就說 $G(x,y) = 0$ 是微分方程式的解。上面兩個例子的結果都是這種情況, 我們不需要也不太可能將微分方程式的解完全表達成 $y = y(x)$ 的樣貌。

第二個註記是: 對於一階常微分方程式, 有時我們會用 *微分型式* (differential form) 的方式呈現, 例如從方程式 (1) 出發, 它的解和以下方程式的解相同:

$$\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{或是} \quad p(x)\,\mathrm{d}x + \tilde{q}(y)\,\mathrm{d}y = 0,\ \text{其中}\ \tilde{q}(y) = -\frac{1}{q(y)}。$$

至於要如何理解上面微分形式的方程式, 這牽涉到我們對於一個函數的 *微分* (differential) 的認識。微分這個概念其實多數的微積分課程或教材都有避重就輕之嫌, 沒有把這個概念正確或是仔細地解釋。常見的錯誤認知有以下兩種: 其一, 幾乎所有人都把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$ 左式的中間橫線視爲除法然後將 $\mathrm{d}x$ 移項後變成 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ 就說這是微分, 但完全不懂 $\mathrm{d}y$ 還有 $\mathrm{d}x$ 代表的意思, 只要最後的表達看起來一樣就覺得自己會了且懂了。其二, 有些人在看完微積分課本介紹微分的內容後, 認爲 $\mathrm{d}x$ 就是 Δx 然後讓它趨近於零之後的產物, 而 $\mathrm{d}y$ 就是 Δy 然後讓 Δx 趨近於零之後的產物, 但怎麼想也想不透更深層的關聯, 卻因爲時間受限 (要考試了) 於是不再深究或是就這樣跟自己妥協。

上述的現象會不斷地上演其實原因在於: 若要把微分這個概念解釋清楚的話, 必須用到線性代數 (linear algebra) 的語言, 特別是向量空間 (vector space) 與對偶空間 (dual space) 的基礎理論才有辦法闡明; 然而, 對偶空間在線性代數的理論中是進階的內容, 在一般的線性代數課程中沒有什麼時間仔細介紹, 實在是蠻可惜的一件事。

就如第 0 章提到的, 我認爲數學系的學生在學微分方程時, 不只是在學習那些解題的技巧, 而是要多花時間徹底認識數學的結構面, 特別是不同學科的整合, 才會知道每個數學領域彼此之間都有關聯, 而非獨立的學科。基於上述種種原因, 我決定在這裡用一些篇幅解釋微分的意義。

首先, 我們回顧線性代數的理論。考慮向量空間 (vector space) V^n, 取 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 是向量空間 V^n 的一組基底 (basis), 現考慮集合 $(V^n)^*$, 它是將所有從向量空間 V^n 映至向量空間 $\mathbb{R}$ 的線性泛函 (linear functional) 收集而成的集合; 也就是說, 元素 $F \in (V^n)^*$ 滿足 $F(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$, 其中 $\mathbf{v} \in V^n$, 並且滿足線性性質:

$$\begin{cases} F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2) & \text{對所有 } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V^n \\ F(c\,\mathbf{v}) = c\,F(\mathbf{v}) & \text{對所有 } \mathbf{v} \in V^n \text{ 以及 } c \in \mathbb{R}。\end{cases}$$

以下要驗證的是: 集合 $(V^n)^*$ 是一個向量空間。在證明 $(V^n)^*$ 是向量空間後, 我們會說 $(V^n)^*$ 是向量空間 V^n 的 *對偶空間* (dual space)。

- 加法結合律: 給定 $F_1, F_2, F_3 \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$\begin{aligned} ((F_1 + F_2) + F_3)(\mathbf{v}) &= (F_1 + F_2)(\mathbf{v}) + F_3(\mathbf{v}) = F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v}) + F_3(\mathbf{v}) \\ &= F_1(\mathbf{v}) + (F_2 + F_3)(\mathbf{v}) = (F_1 + (F_2 + F_3))(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

  所以 $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$。

- 加法交換律: 給定 $F_1, F_2 \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$(F_1 + F_2)(\mathbf{v}) = F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v}) = F_2(\mathbf{v}) + F_1(\mathbf{v}) = (F_2 + F_1)(\mathbf{v}),$$

  所以 $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$。

- 加法單位元: 定義 $0 \in (V^n)^*$ 是零線性泛函; 也就是說, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, $0(\mathbf{v}) = 0$。給定 $F \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$(F+0)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + 0(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + 0 = F(\mathbf{v}),$$

所以 $F + 0 = F$。

- 加法反元素: 給定 $F \in (V^n)^*$, 考慮 $G \in (V^n)^*$ 定義爲: 對所有 $\mathbf{v} \in V^n, G(\mathbf{v}) = -F(\mathbf{v})$。對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$(F+G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) = 0 = 0(\mathbf{v}),$$

所以對所有 $F \in (V^n)^*$, 存在 $G \in (V^n)^*$ 使得 $F + G = 0$。將 G 記爲 $-F$。

- 係數乘法結合律: 給定 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 與 $F \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$(c_1(c_2F))(\mathbf{v}) = c_1((c_2F)(\mathbf{v})) = c_1(c_2F(\mathbf{v})) = c_1c_2F(\mathbf{v}) = (c_1c_2)F(\mathbf{v}) = ((c_1c_2)F)(\mathbf{v}),$$

所以 $c_1(c_2F) = (c_1c_2)F$。

- 純量乘法單位元: 1 是 $\mathbb{R}$ 的乘法單位元, 給定 $F \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 都有

$$(1F)(\mathbf{v}) = 1 \cdot F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}),$$

所以存在 $1 \in \mathbb{R}$ 使得 $1F = F$。

- 係數乘法對於向量加法的分配律: 給定 $c \in \mathbb{R}$ 與 $F_1, F_2 \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$\begin{aligned}(c(F_1+F_2))(\mathbf{v}) &= c(F_1+F_2)(\mathbf{v}) = c(F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v})) = cF_1(\mathbf{v}) + cF_2(\mathbf{v}) \\ &= (cF_1 + cF_2)(\mathbf{v}),\end{aligned}$$

所以 $c(F_1 + F_2) = cF_1 + cF_2$。

- 分配律: 給定 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 與 $F \in (V^n)^*$, 對所有 $\mathbf{v} \in V^n$, 因爲

$$((c_1+c_2)F)(\mathbf{v}) = (c_1+c_2)F(\mathbf{v}) = c_1F(\mathbf{v}) + c_2F(\mathbf{v}) = (c_1F + c_2F)(\mathbf{v}),$$

所以 $(c_1 + c_2)F = c_1F + c_2F$。

在證明完 $(V^n)^*$ 是一個向量空間後, 下一個要問的是: 能否找到對偶空間 $(V^n)^*$ 的一組基底? 定義 $\{\mathbf{f}_i : V^n \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ 如下:

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i = j \\ 0 & \text{如果 } i \neq j, \end{cases}$$

以下將驗證: $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 是對偶空間 $(V^n)^*$ 的一組基底。因爲它是透過 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ 而來, 所以 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ 稱爲 對偶基底 (dual basis)。

- 假設 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{f}_i = 0$, 對於 $j = 1, 2, \ldots, n$, 兩邊作用向量 $\mathbf{e}_j$ 之後得到

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{f}_i(\mathbf{e}_j) = 0(\mathbf{e}_j) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ij} = a_j = 0,$$

  所以 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{n}$ 線性獨立。

- 給定線性泛函 $F : V^n \to \mathbb{R}$, 對所有 $\mathbf{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i \in V^n$, 因爲

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} a_iF(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} F(\mathbf{e}_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} F(\mathbf{e}_i)\mathbf{f}_i(\mathbf{v}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} F(\mathbf{e}_i)\mathbf{f}_i\right)(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

  所以線性泛函 $F : V^n \to \mathbb{R}$ 都可以表示成 $F = \sum\limits_{i=1}^{n} F(\mathbf{e}_i)\mathbf{f}_i$ 的形式, 即 F 可寫成 $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{n}$ 的線性組合。

- 由上討論得知: $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^{n}$ 是對偶空間 $(V^n)^*$ 的一組基底。

有了向量空間與對偶空間的基本概念後, 以下開始介紹微分的意義。給定一個函數 $y(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 假設函數 $y = y(x)$ 在 $x = x_0$ 是可微分的 (differentiable), 定義函數 $y = y(x)$ 在一點 $x = x_0$ 的微分 (differential of $y = y(x)$ at $x = x_0$)

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} \overset{\text{定義}}{=\!=} y'(x_0)\,\mathrm{d}x : V^1 = \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

它是從向量空間 V^1 映至向量空間 $\mathbb{R}$ 的一個線性泛函 (linear functional)。這個線性泛函的定義域所指的向量空間 V^1 是收集所有在 $x = x_0$ 的求導算子, 它和 $\mathbb{R}$ 同構 (isomorphic), 故寫 $V^1 = \mathbb{R}$, 而它的其中一個基底是 $\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\}$; 至於 $\{\mathrm{d}x : V^1 = \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ 是 $\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\}$ 的對偶基底, 故有 $\mathrm{d}x(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}) = 1$。至於 $\mathrm{d}y|_{x=x_0} = y'(x_0)\,\mathrm{d}x$ 是 $V^1 = \mathbb{R}$ 上的一個線性泛函, 等式右邊是在說明將 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$ 寫成基底 $\{\mathrm{d}x\}$ 的線性組合之結果, 它是向量 $\mathrm{d}x$ 再乘上倍數 $y'(x_0)$ 而得。

到目前爲止, 我們只說明了函數 $y = y(x)$ 在一點 $x = x_0$ 微分的意思, 而上面的討論中可發現, 這個線性泛函是隨著點而變的; 也就是說, 函數 $y = y(x)$ 在每一點都對應一個線性泛函, 因爲用基底 $\mathrm{d}x$ 寫開來的時候, 前面的係數 $y'(x_0)$ 和位置有關, 所以不同的位置給出不同的線性泛函。現將函數 $y = y(x)$ 在每一點的微分都收集起來, 就定義了可微分函數 $y = y(x)$ 的微分 (differential of $y = y(x)$):

$$\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x。$$

總結來說, 函數的微分是在說明函數在每一個點 y 對於 x 的線性增長關係。由線性代數的理論知道: 若要認識一個線性變換, 只要把基底的變換過程說清楚, 那麼任何其它向量的變換都是遵照著線性的方式完全確定。於是 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ 就充分說明了每一點所對應的線性變換之關係。

爲了讓各位對微分這個概念有更深刻地認識, 以下再到用圖形的方式解說微分的意義。我們知道: 所有從 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的線性變換 T, 若在 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上呈現其意義, 則 T 會是一條通過原點的直線。如圖 2.1 所示: 給定可微分函數 $y = y(x)$, 對於一點 x, 微分 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ 是一個由 $V^1 = \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的線性變換, 其中定義域 $V^1 = \mathbb{R}$ 是以 x 的位置爲零向量橫向延伸而得的向量空間, 而對應域 $\mathbb{R}$ 是以 $y(x)$ 的位置爲零向量縱向延伸而得的向量空間。這兩個向量空間的乘積空間 (product space) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 就如圖形中以 $(x, y(x))$ 爲零向量, 灰色軸爲坐標而張開的空間。於是微分 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ 在圖形上的呈現是函數 $y = y(x)$ 的圖形在 $(x, y(x))$ 的切線。

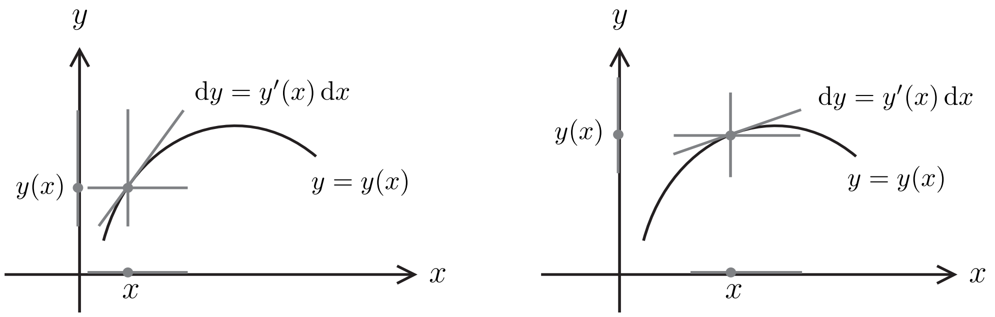

圖 2.1: 微分 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是在每一個點都指定一個線性泛函。

由圖 2.1 也可以看出微分 $\mathrm{d}y$ 在不同點對應到的線性泛函也不同。

看完單變數函數微分後, 現在要討論二變數函數微分的意義。給定一個二變數函數 $z = z(x, y)$, 假設函數在一點 $p = (x_0, y_0)$ 是可微分的, 這時可定義函數 $z = z(x, y)$ 在一點 $p = (x_0, y_0)$ 的 微分 或 全微分 (total differential of $z = z(x, y)$ at $p = (x_0, y_0)$) 爲

$$\mathrm{d}z\big|_p \overset{\text{定義}}{=\!=} \frac{\partial z(p)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z(p)}{\partial y}\,\mathrm{d}y : V^2 = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

它是一個定義在 V^2 上的線性泛函, 其中向量空間 V^2 是將所有在 p 點的求導算子收集而成的集合, 這個向量空間的一組基底是 $\{\frac{\partial}{\partial x}|_p, \frac{\partial}{\partial y}|_p\}$, 它的對偶基底是 $\{\mathrm{d}x|_p, \mathrm{d}y|_p\}$; 也就是說, 兩組基底之間滿足以下關係:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = 1 \\ \mathrm{d}x\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \quad 與 \quad \begin{cases} \mathrm{d}y\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) = 0 \\ \mathrm{d}y\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) = 1。 \end{cases}$$

而 $\mathrm{d}z\big|_p = \frac{\partial z(p)}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z(p)}{\partial y}\,\mathrm{d}y$ 要呈現的是函數 $z = z(x, y)$ 在 p 點的線性增長量, 等式右邊就是寫出 $\mathrm{d}z\big|_p$ 這個線性泛函用基底 $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ 進行線性組合的結果。

同樣地, 函數 $z = z(x, y)$ 在每一點的線性增長量都不盡相同, 所以將函數在每一點的全微分都收集起來, 就得到函數 $z = z(x, y)$ 的 微分 或 全微分 (total differential of $z = z(x, y)$), 用

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

這個記號表示。

在充分認識函數微分的意義之後, 現在要解釋微分形式的方程式

$$\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{或是} \quad p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

的意義。對於 $\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x$ 的解讀是: 目標是想找到一個可微分函數 $y = y(x)$ 使得函數在各點的微分 $\mathrm{d}y$ 乘上與該點函數值相關的函數 $\frac{1}{q(y)}$ 的結果和它用微分算子的對偶空間之基底表示下, 要求與 $p(x)\,\mathrm{d}x$ 相同。

在這樣的觀點下, 爲什麼 $\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x$ 這個微分形式的方程式的解和原始的微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y)$ 的解一樣呢? 以下給出證明:

- 假設 $y = y(x)$ 滿足 $\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x$, 則 $\mathrm{d}y = p(x)q(y)\,\mathrm{d}x$, 這個式子和 $y = y(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ 比較係數得到 $y = y(x)$ 滿足 $y'(x) = p(x)q(x)$。

- 假設 $y = y(x)$ 滿足 $y'(x) = p(x)q(y)$, 由 $y = y(x)$ 的微分爲 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = p(x)q(y)\,\mathrm{d}x$, 得到 $\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x$。

至於微分形式的方程式若寫成 $p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = 0$ 的時候, 我們可以用二變數函數的觀點看待它。考慮 $z = z(x,y) = P(x) - Q(y)$, 其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一個反導函數, $Q(y)$ 是 $\frac{1}{q(y)}$ 的一個反導函數, 則

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = P'(x)\,\mathrm{d}x - Q'(y)\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y$$

是這個二變數函數的微分。因爲 $\mathrm{d}z = 0$, 所以 $z(x,y) = C, C \in \mathbb{R}$ 是 $p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = 0$ 的解。

在這個觀點下, 我們也必須驗證爲何 $p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = 0$ 這個微分形式的方程式之解和原始的微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y)$ 的解一樣呢? 現討論如下:

- 因爲 $z(x,y) = P(x) - Q(y) = C$ 是 $p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = 0$ 的解, 將 $z(x,y) = C$ 理解成 $z(x, y(x)) = C$ 時, 由鏈鎖律 (chain rule) 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -\frac{p(x)}{-\frac{1}{q(y)}} = p(x)q(y)。$$

- 假設 $y = y(x)$ 滿足微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y)$, 則 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x = p(x)q(y)\,\mathrm{d}x$, 由 $z(x,y) = P(x) - Q(y) = C$ 得到

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\cdot p(x)q(y)\,\mathrm{d}x = 0。$$

上面的討論都是建立在 $q(y) \neq 0$ 的情形。若 $q(y) = 0$, 一方面, 由 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ 知道滿足 $q(y) = 0$ 的那些點對應到的常數函數 $y = y_1$ 都是方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y)$ 的解。另一方面, 微分形式的方程式必須表示爲 $\mathrm{d}y = p(x)q(y)\,\mathrm{d}x$ 或 $p(x)q(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$ 之形式才有意義。此時, $y = y_1$ 亦滿足方程式。至此, 我們討論完分離變數型微分方程式與寫成微分形式的方程式的解完全一致。

這裡用了五頁的篇幅介紹微分, 可見得微分並不是三言兩語就能解釋淸楚的事, 希望各位能深刻體會微分的眞正意義。

2.2 齊次微分方程式

我們可以將分離變數型微分方程式的求解方法應用到一類特殊的微分方程式 — 齊次微分方程式。這裡先介紹何謂齊次微分方程式。

定義 1 (第 38 頁)**.** 若一階微分方程式可以整理成以下形式時稱爲 *齊次微分方程式* (homogeneous differential equation):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

等式右邊的 $F(\frac{y}{x})$ 表示 $F(v)$, 其中 $v = \frac{y}{x}$; 也就是說, $F(v)$ 是以 v 爲變數的函數, 然後再將 $v = \frac{y}{x}$ 替換後得到的結果。

例 **2.** 判斷以下微分方程式是否爲齊次微分方程式:

(A) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2+xy}{x^2}$。

(B) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$。

解**.**

(A) 因爲

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2 + xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x},$$

考慮 $F(v) = v^2 + v$, 則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$, 所以微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2+xy}{x^2}$ 是一個齊次微分方程式。

(B) 因爲

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = -\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}},$$

考慮 $F(v) = -\ln v + \frac{1+v}{1-v}$, 則 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$, 所以微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y}$ 是一個齊次微分方程式,

判斷一個一階微分方程式是否爲齊次微分方程式應該是有跡可尋的, 因爲 $v = \frac{y}{x}$ 意指 y 的次數與 x 的次數要一致, 當 y 和 x 必須對等出現時, 這個方程式才有可能寫成齊次微分方程式的樣貌。

註. 關於齊次 (homogeneous) 這個用字在衆多場合中經常被借用, 所以在理解齊次這個詞的時候應透過前後文判讀其概念。例如: 在下一個單元及下一章介紹的一階與二階線性微分方程式的齊次式, 那裡齊次的意義與現在所討論的齊次不同。

解一階齊次微分方程式的方法是令 $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, 則所有的齊次微分方程式都可以改寫成對於未知函數 $v(x)$ 的一階分離變數型微分方程式。這是因爲 $y(x) = x \cdot v(x)$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow F(v) = v + x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}(F(v) - v) = p(x)q(v),$$

其中 $p(x) = \frac{1}{x}, q(v) = F(v) - v$。所以我們就先用分離變數型微分方程式的方法解出 $v(x)$, 再將 v 用 $v = \frac{y}{x}$ 替換後得到齊次方程式的解。

例 3 (第 39 頁)**.** 試解微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+3x}{5x-y}。$$

解. 首先, 將微分方程式改寫成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+3x}{5x-y} = \frac{\frac{y}{x}+3}{5-\frac{y}{x}},$$

所以它是齊次微分方程式。令 $v(x) = \frac{y(x)}{x}$ 得到 $y(x) = x \cdot v(x)$, 所以 $y' = v + xv'$, 於是

$$v + xv' = \frac{v+3}{5-v} \Rightarrow xv' = \frac{v+3}{5-v} - v = \frac{v^2-4v+3}{5-v} = \frac{(v-1)(v-3)}{-v+5},$$

經整理後變成

$$\frac{-v+5}{(v-1)(v-3)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x},$$

兩邊對 x 積分得到

$$\int \frac{-v+5}{(v-1)(v-3)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{-v+5}{(v-1)(v-3)}\,\mathrm{d}v = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x。$$

關於左式的積分, 利用部份分式法 (partial fraction method), 我們有

$$\int \frac{-v+5}{(v-1)(v-3)}\,\mathrm{d}v = \int \left(\frac{A}{v-1} + \frac{B}{v-3}\right)\mathrm{d}v,$$

其中 $A, B \in \mathbb{R}$ 爲待定常數。將被積分函數通分後並比較分子, 可解得 $A = -2$ 與 $B = 1$, 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{-v+5}{(v-1)(v-3)}\,\mathrm{d}v &= \int \left(\frac{-2}{v-1} + \frac{1}{v-3}\right)\mathrm{d}v \\ &= -2\ln|v-1| + \ln|v-3| + C_1,\ \text{其中 } C_1 \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

至於右式的積分結果是

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C_2,\ \text{其中 } C_2 \in \mathbb{R},$$

因此

$$-2\ln|v-1| + \ln|v-3| = \ln|x| + C,\ \text{其中 } C \in \mathbb{R}。$$

最後再將 $v = \frac{y}{x}$ 替換, 得到

$$-2\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| + \ln\left|\frac{y}{x}-3\right| = \ln|x| + C,\ \text{其中 } C \in \mathbb{R},$$

或是整理成

$$-2\ln|y-x| + \ln|y-3x| = C,\ \text{其中 } C \in \mathbb{R}$$

是微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+3x}{5x-y}$ 的解。

在數學 (幾何) 上有一類的問題稱爲正交軌線問題, 在尋求正交軌線的過程中會對應到一個齊次微分方程式, 然後就可以過這個單元討論的內容將這個方程式的解求出, 所以這裡想討論正交軌線問題。首先給出正交軌線的定義。

定義 4. 給定兩族分別以 s 與 t 爲參數的平面曲線 $\{C_s\}$ 與 $\{\tilde{C}_t\}$, 若任取 $\{C_s\}$ 與 $\{\tilde{C}_t\}$ 中的曲線, 它們在相交的地方互相垂直; 也就是說, 任意兩曲線在相交處的兩切線互相垂直, 我們說兩族曲線互爲正交軌線 (orthogonal trajectory)。

這裡先給出正交軌線的例子並確實驗證它。

例 5. 驗證曲線族 $\{C_r : x^2 + y^2 = r^2, r > 0\}$ 與 $\{\tilde{C}_m : y = mx, m \in (-\infty, \infty]\}$ 互爲正交軌線, 這裡 $\tilde{C}_{m=\infty}$ 代表的是直線 $x = 0$。

解. 給定一點 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

(A) 若 $x_0 \neq 0$ 且 $y_0 \neq 0$, 對於曲線 C_r 來說, 利用隱函數微分 (implicit function differentiation) 得到 $2x + 2yy' = 0$, 所以曲線在 (x_0, y_0) 的切線斜率是

$$y' = -\frac{x}{y}\bigg|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{x_0}{y_0}。$$

另一方面, 對於曲線 $\tilde{C}_m$ 來說, 利用隱函數微分得到 $y' = m$, 所以曲線在 (x_0, y_0) 的切線斜率是

$$y' = m|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = \frac{y_0}{x_0}。$$

因爲兩切線斜率相乘爲 -1, 所以兩曲線彼此正交。

(B) 若 $y_0 = 0$, 由曲線族 $\{C_r\}$ 得到 $(x_0)^2 = r^2$, 即 $x_0 = \pm r$, 而曲線在 $(x_0, y_0) = (\pm r, 0)$ 具有鉛直切線; 另一方面, 曲線族 $\{\tilde{C}_m\}$ 在通過 (x_0, y_0) 的直線是 $y = 0$, 它具有水平切線。故兩曲線彼此正交。

(C) 若 $x_0 = 0$, 由曲線族 $\{C_r\}$ 得到 $(y_0)^2 = r^2$, 即 $y_0 = \pm r$, 而曲線在 $(x_0, y_0) = (0, \pm r)$ 具有水平切線; 另一方面, 曲線族 $\{\tilde{C}_m\}$ 在通過 (x_0, y_0) 的直線是 $x = 0$, 它具有鉛直切線。故兩曲線彼此正交。

(D) 由上述討論得知曲線族 $\{C_r : x^2 + y^2 = r^2, r > 0\}$ 與 $\{\tilde{C}_m : y = mx, m \in (-\infty, \infty]\}$ 互爲正交軌線。

關於 例 **5** 兩族曲線的長相其實很清楚, 前者是以坐標中心爲圓心, 半徑爲 r 的同心圓; 後者是通過坐標中心的直線。這兩族曲線若用極坐標 (polar coordinates) (r, θ) 表達時, 前者表示 r 爲常數的曲線, 而後者表示 θ 爲常數的線條。

給出兩族曲線並驗證它們爲正交軌線的過程直接了當, 而我們感興趣的是另外一個問題: 給定一族平面曲線, 我們想要找到另外一族曲線使得這兩族曲線互爲正交軌線。這時, 先將給定的曲線族在通過一點的曲線之切線斜率算出來, 透過兩族曲線在相交處的正交性, 可以寫出欲尋找的曲線在一點的切線斜率之表示, 它會是一個齊次微分方程式, 故可對此求解。

例 **6.** 試求曲線族 $\{C_a : x^2+y^2 = ax, a>0\}$ 的正交軌線。

解**.** 固定 $a>0$, 對於方程式 $x^2+y^2=ax$ 利用隱函數微分得到 $2x+2yy'=a$, 所以

$$y' = \frac{1}{2y}(a-2x) = \frac{1}{2y}\left(\frac{x^2+y^2}{x} - 2x\right) = \frac{y^2-x^2}{2xy}。$$

目標是要找到一族曲線 $(x, y(x))$ 滿足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2\cdot\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}。$$

這是一階齊次微分方程式, 令 $y = x\cdot v(x)$, 則 $y' = v + xv'$, 如此一來就可以將微分方程式改寫爲

$$v + xv' = \frac{2v}{1-v^2} \Rightarrow xv' = \frac{2v}{1-v^2} - v = \frac{2v-v+v^3}{1-v^2} = \frac{v(v^2+1)}{1-v^2},$$

而它就可以視爲對於未知函數 $v(x)$ 而言的分離變數型微分方程式, 現在方程式整理成

$$\frac{1-v^2}{v(v^2+1)}v' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1-v^2}{v(v^2+1)}\,\mathrm{d}v = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x。$$

因爲

$$\begin{aligned}\int \frac{1-v^2}{v(v^2+1)}\,\mathrm{d}v &= \int\left(\frac{1}{v} + \frac{-2v}{v^2+1}\right)\mathrm{d}v = \ln|v| - \ln|v^2+1| = \ln\left|\frac{v}{v^2+1}\right| \\ &= \ln\left|\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\right| = \ln\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|,\end{aligned}$$

所以

$$\ln\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| = \ln|x| + C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right| = C \Rightarrow |y| = C'|x^2+y^2|,$$

其中 $C' = \mathrm{e}^C$ 是一個正的常數。最後將絕對值拆掉後就可得到 $x^2+y^2=by$, 其中 $b = \pm\frac{1}{C'}$。因此 $\{C_a : x^2+y^2=ax, a>0\}$ 的正交軌線爲 $\{C_b : x^2+y^2=by, b\neq 0\}$。

註. 有關 例 **6** 的討論, 我們得到的是 $\{C_a\}$ 在 $a>0$ 的情況。同理, 我們也可以考慮 $\{C_a\}$ 在 $a<0$ 的情況, 將兩者的結果綜合起來, 得到 $\{C_a : x^2+y^2=ax, a\neq 0\}$ 與 $\{C_b : x^2+y^2=by, b\neq 0\}$ 互爲正交軌線。

在 例 **6** 的求解過程中, 有一件事情要非常小心, 就是對於給定的曲線族在計算完切線斜率之後, 若要把它轉換成另外一族曲線的切線斜率時, 必須把第一族曲線的參數 (例如 例 **6** 當中的 a) 利用方程式改寫成與 x 和 y 有關的式子替換後再求解。原因是在於: 對於第一族曲線來說, 固定 a 所形成的曲線, 這條曲線享有同一個 a 值, 而我們要找的是與這個曲線族互相垂直的線, 所以從一點 (x_0, y_0) 出發, 沿著和第一族曲線垂直的方向前行至 (x_0', y_0') 時, 對應到的 a 值和原來的 a 一定不同, 所以在第二族曲線的意義下, 這個 a 不會是常數, 必須把 a 替換成與 x 和 y 的表達式之後, 才會知道 a 值對於第二族曲線的變化關係。

2.3 一階線性微分方程式

這一單元要討論的是一階線性微分方程式及其求解的方式, 另外也探討線性的意義。

定義 1 (第 24 頁). 若一階微分方程式可以整理成以下形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y(x)=Q(x) \tag{2}$$

時, 稱 (2) 式爲 一階線性微分方程式 (first order linear differential equation)。

關於線性微分方程式的求解, 想法如下: 我們希望將方程式的左邊湊成某個函數的導函數, 這麼一來, 就可以透過微積分基本定理, 將方程式兩邊積分後就可得到 $y(x)$ 的表示。

爲了實現上述想法, 我們考慮將微分方程式的兩邊同乘一個待定的函數 $I(x)$, 這個函數我們稱爲積分因子 (integrating factor), 所以

$$I(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+I(x)P(x)y(x)=I(x)Q(x),$$

如果 $I(x)$ 滿足 $I(x)P(x)=I'(x)$, 那麼微分方程式就可以改寫成

$$I(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}y(x)=I(x)Q(x)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(I(x)y(x))=I(x)Q(x),$$

將方程式兩邊同時對變數 x 積分之後, 就有

$$I(x)y(x)=\int I(x)Q(x)\,\mathrm{d}x+C\Rightarrow y(x)=\frac{\int I(x)Q(x)\,\mathrm{d}x+C}{I(x)},$$

其中 $C\in\mathbb{R}$ 是積分常數, 而最後一式就是線性微分方程式 (2) 的解。

上面討論, 我們假設積分因子 $I(x)$ 滿足 $I(x)P(x)=I'(x)$, 現在我們要追問的是: 是否真的有這種函數 $I(x)$? 而這個關係式實際上是一個分離變數型的微分方程式, 所以就用單元 2.1 介紹的方式求解:

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}=I(x)P(x)\Rightarrow\frac{1}{I(x)}\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}=P(x)\Rightarrow\int\frac{1}{I(x)}\frac{\mathrm{d}I(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\int P(x)\,\mathrm{d}x\\&\Rightarrow\int\frac{1}{I(x)}\,\mathrm{d}I(x)=\int P(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|I(x)|=\int P(x)\,\mathrm{d}x\Rightarrow|I(x)|=\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}。\end{aligned}$$

注意到: 我們尋找 $I(x)$ 的目的是只要找到一個函數使得方程式乘上此函數後, 左邊能表示成某個函數的導函數, 雖然上方最後一個式子得到的是一族函數 (函數 $P(x)$ 的不定積分是一族函數, 而且 $|I(x)|$ 在拆絕對值之後又得到函數 $I(x)$ 可取正負), 我們只要從中找一個特別的積分因子比方說 $I(x)=\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ 取正的函數而且積分常數取 $C=0$ 即可。若仔細思考變會發現, 選擇負號或是選用不同的積分因子只是將微分方程式同乘一個不同常數而已, 不會影響最後的結果。

值得注意的是: 上述討論是建立在 (2) 式中 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前面的係數是 1 時才有的結論, 若線性微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前的係數不是 1 時, 一個方法是先將前面的係數 (函數) 除掉, 再做剛才的論述找到相應的積分因子。這一個單元的最後, 我們會花一點時間討論如果不先把係數 (函數) 除掉的情況下, 如何重解線性微分方程式, 並且比較兩種解法的差異。

例 **2** (第 25 頁)**.** 試解微分方程式 $y' + 2y = 5\mathrm{e}^{3x}$。

解**.** 將方程式乘上積分因子 $\mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{2x}$ 後得到 $\mathrm{e}^{2x}y' + 2\mathrm{e}^{2x}y = 5\mathrm{e}^{5x}$, 而微分方程式可以整理成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{2x}y) = 5\mathrm{e}^{5x}$, 兩邊對 x 積分後得到

$$\mathrm{e}^{2x}y = \int 5\mathrm{e}^{5x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{5x} + C \Rightarrow y = \mathrm{e}^{3x} + C\mathrm{e}^{-2x},\ \text{其中 } C \in \mathbb{R}。$$

例 **3** (第 57 頁)**.** 所謂 *伯努力方程式* (Bernoulli's equation) 是指如下的微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \text{其中 } \alpha \in \mathbb{R}。$$

對所有 $\alpha \in \mathbb{R}$, 伯努力方程式都可以求解, 現討論如下:

(A) <u>若 $\alpha = 0$</u>, 則方程式爲一階線性微分方程式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$。

(B) <u>若 $\alpha = 1$</u>, 則方程式爲 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y$, 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (p(x) - q(x))y = 0$, 這也是一階線性微分方程式。

(C) <u>若 $\alpha \neq 0, 1$</u>, 透過變數變換 $v(x) = y^{1-\alpha}(x)$, 可將伯努力方程式改寫成對於未知函數 $v(x)$ 的一階線性微分方程式。現討論如下: 因爲 $v' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, 將原方程式同乘 $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ 後得到

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \Rightarrow v' + (1-\alpha)p(x)v = q(x),$$

而這個式子即爲 $v(x)$ 的一階線性微分方程式。

例 **4.** 試解初始值問題 $y' - 2y = \mathrm{e}^{-3x}y^{-2}, y(0) = 2$。

解**.** 令 $v = y^3$, 則 $v' = 3y^2y'$, 將方程式乘上 $3y^2$ 後得到 $3y^2y' - 6y^3 = \mathrm{e}^{-3x}$, 即 $v' - 6v = \mathrm{e}^{-3x}$, 再將微分方程式乘上積分因子 $\mathrm{e}^{\int -6\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-6x}$ 後得到

$$\mathrm{e}^{-6x}v' - 6\mathrm{e}^{-6x}v = \mathrm{e}^{-9x} \Rightarrow (\mathrm{e}^{-6x}v)' = \mathrm{e}^{-9x},$$

等式兩邊對於 x 積分後得到

$$\mathrm{e}^{-6x}v = \int \mathrm{e}^{-9x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-9x} + C,\ \text{其中 } C \in \mathbb{R},$$

於是 $v = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + C\mathrm{e}^{6x}, C \in \mathbb{R}$。最後再將 $v = y^3$ 替換, 得到

$$y^3 = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + C\mathrm{e}^{6x},\ \text{其中 } C \in \mathbb{R}。$$

因爲 $y(0) = 2$, 所以 $8 = -\frac{1}{9} + C$ 解得 $C = \frac{73}{9}$。因此微分方程式的解爲

$$y^3 = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{73}{9}\mathrm{e}^{6x}。$$

前面的討論是針對一階線性微分方程式當中 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前係數是 1 的時候提供了一個求解的方法。若係數不是 1, 一個做法就是把係數除掉再處理; 另一個方式就是重新尋找積分因子再求解。以下說明這部分的過程, 並且研究兩者的差異。

考慮一階線性微分方程式, 當 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 前面的係數不是 1 的時候該如何解微分方程。為了和一開始討論的微分方程式 (2) 做比較, 這裡寫出方程式的型式為

$$n(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y(x)=q(x)。\tag{3}$$

和 (2) 對照, 則有 $P(x)=\frac{p(x)}{n(x)}$ 與 $Q(x)=\frac{q(x)}{n(x)}$。首先對於 (3) 乘上積分因子 $i(x)$ 得到

$$i(x)n(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+i(x)p(x)y(x)=i(x)q(x),$$

<u>如果 $(i(x)n(x))'=i(x)p(x)$</u>, 則上述上方可以改寫為 $(i(x)n(x)y(x))'=i(x)q(x)$, 這麼一來就有

$$i(x)n(x)y(x)=\int i(x)q(x)\,\mathrm{d}x+C\Rightarrow y(x)=\frac{\int i(x)q(x)\,\mathrm{d}x+C}{i(x)n(x)}。$$

現在要確實找到一個積分因子 $i(x)$ 以完成上面論述:

$$\begin{aligned}&(i(x)n(x))'=i(x)p(x)\Rightarrow i'(x)n(x)+i(x)n'(x)=i(x)p(x)\\ \Rightarrow\ & i'(x)n(x)=i(x)(p(x)-n'(x))\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|i(x)|=\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)},\end{aligned}$$

於是找到一個積分因子如

$$i(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x}。$$

現在我們要驗證的是這個解法與先將方程式對於 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的係數調整成 1 之後再考慮積分因子 $I(x)$ 的結果一致。注意到

$$\int\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x-\int\frac{n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x-\ln|n(x)|,$$

所以 (以下假設 $n(x)>0$)

$$i(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)-n'(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x-\ln|n(x)|}=\frac{\mathrm{e}^{\int\frac{p(x)}{n(x)}\,\mathrm{d}x}}{n(x)}=\frac{\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}}{n(x)}=\frac{I(x)}{n(x)},$$

於是

$$y(x)=\frac{\int i(x)q(x)\,\mathrm{d}x+C}{i(x)n(x)}=\frac{\int\frac{I(x)}{n(x)}q(x)\,\mathrm{d}x+C}{I(x)}=\frac{\int I(x)Q(x)\,\mathrm{d}x+C}{I(x)}。$$

至此已驗證這兩者結果一致, 所以當遇到線性微分方程要求解時, 兩種方法都可行。一般來說, 多數人會採用第一種方法, 也就是先把 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的係數除掉變成 1 之後再考慮積分因子 $I(x)$ 的方法再求解。

例 **5.** 試解初始值問題: $xy' + 2y = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$。

解. 先將微分方程式除以 x 之後得到 $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$, 再兩邊同乘積分因子

$$e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln|x|^2} = x^2$$

得到

$$x^2y' + 2xy = x\sin x \Rightarrow (x^2y)' = x\sin x,$$

於是

$$x^2y = \int x\sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -\left(x\cos x - \int \cos x\,dx\right) = -x\cos x + \sin x + C,$$

因爲 $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$, 所以 $\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi} = -\pi \cdot (-1) + 0 + C$, 得到 $C = 0$, 於是微分方程式的解爲

$$y = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}。$$

若是考慮一般形的積分因子法解微分方程, 則是將方程式兩邊同乘積分因子

$$\exp\left(\int \frac{2-1}{x}\,dx\right) = \exp\left(\int \frac{1}{x}\,dx\right) = \exp(\ln|x|) = x$$

得到 $x^2y' + 2xy = x\sin x$, 所以之後的求解就和前面一樣, 兩種方法皆可行。

這個單元的最後想要再提一個問題: 爲什麼我們要把這類的微分方程式稱爲線性微分方程式? 除了從形式上方程式中的未知量是以線性的形態呈現外, 更重要的是方程式的解也有線性的結構在內。這裡我們先以中學數學裡平面中的直線方程式說起, 例如考慮方程式 $3x + 2y = 5$, 我們想要知道在 $\mathbb{R}^2$ 中有哪些點 (x, y) 滿足 $3x + 2y = 5$。一個得到答案的方法是先找一個滿足方程式 $3x + 2y = 5$ 的點, 例如 $(x_p, y_p) = (1, 1)$, 再研究方程式 $3x + 2y = 0$, 此時發現到若 x 的增加與 y 的減少是呈現 $2 : 3$ 的話, 則兩者的消長效應會抵消, 即 $(x_h, y_h) = (2t, -3t), t \in \mathbb{R}$ 滿足 $3x + 2y = 0$。所以方程式 $3x + 2y = 5$ 的一般解是 $(x, y) = (2t + 1, -3t + 1), t \in \mathbb{R}$。

仔細觀察上述求解法, 關於 $(x_p, y_p) = (1, 1)$, 我們說它是原方程式 $3x + 2y = 5$ 的一個特解 (particular solution), 至於 $(x_h, y_h) = (2t, -3t), t \in \mathbb{R}$, 我們說它是齊次方程式 $3x + 2y = 0$ 的齊次解 (homogeneous solution), 而方程式 $3x + 2y = 5$ 的通解會是齊次解與特解兩者相加, 也就是 $(x_h, y_h) + (x_p, y_p) = (2t + 1, -3t + 1), t \in \mathbb{R}$, 這是線性方程式的解獨具的特色。

至於上面的討論和一階線性微分方程式的解有什麼關聯呢? 我們拿 例 **2** 說明, 我們知道微分方程式 $y' + 2y = 5e^{3x}$ 的解是 $y = e^{3x} + Ce^{-2x}$, 其中 $C \in \mathbb{R}$。這個解的第一部份 $y_p = e^{3x}$ 就是微分方程式 $y' + 2y = 5e^{3x}$ 的一個特解。至於解的第二個部份 $y_h = Ce^{-2x}$ 則是齊次微分方程式 $y' + 2y = 0$ 的齊次解。於是微分方程式 $y' + 2y = 5e^{3x}$ 的解可以拆解成 $y = y_p + y_h$。特別注意到: 關於線性微分方程式 $y' + 2y = 0$ 的齊次解 $y_h = Ce^{-2x}$, 若把 e^{-2x} 想成是一個向量, 那麼其它的解都是這個向量的倍數, 於是齊次方程式的解空間是一個向量空間 (vector space)。

雖然這個單元介紹線性微分方程式的求解法是用積分因子的理論處理, 而這個過程是看不太出線性代數的結構面, 上面的討論是先用類比的過程讓大家知道線性微分方程式與線性代數理論息息相關, 關於線性微分方程式的解與向量空間在結數學構上的關聯, 我們還在會第 3 章探討二階線性微分方程式的時候再提出, 那裡還會再用不同的方式詮釋這個概念, 各位屆時可以把所有與線性方程式的解和線性代數理論再做一個整併。

2.4 數學模型

我們爲什麼要學數學? 學數學的目的又是什麼? 其實這件事必須自己找到一個答案, 之後才會願意學, 也才會快樂學。撇開個人學習的意願層面不看, 我們會拿數學以一套帶有邏輯推演的方式幫助我們了解並解決問題; 也就是說, 當我們想要用數學解決問題的時候, 通常會依循以下的流程:

$$\begin{array}{ccc} \text{實際生活問題} & \longrightarrow & \text{數學模型} \\ & & \downarrow \\ \text{解釋生活問題} & \longleftarrow & \text{數學結論} \end{array}$$

另一方面, 我們到底該以何種角度學數學, 這其實也是要仔細深思的問題。就微分方程這個課題, 除了數學的技術層面 (如何把微分方程式解出來) 之外, 還必須著重於如何合理地將原先要研究或討論的問題改寫成數學式, 並且將解出來的結果進行適當地解釋。當我們的數學課程中太著重於從數學模型到數學結論之間的探討而缺乏更前面的鋪陳與最後的解釋時, 長久下來就會讓人有「數學無用論」的想法, 甚至產生數學只是不斷地在測驗一個人的智商而變調。

以下將由淺入深地探討幾個數學模型, 然後討論這些數學模型是否如實地推測過去、反應現狀或是預測未來, 如果沒有, 那又該如何修改模型以達到更好地詮釋。

2.4.1 人口模型 (Population Growth)

西元 1798 年英國經濟學家馬爾薩斯 (Malthus) 的著作人口原理中提到了一句話:

> 人口的增長與人口數成正比。

如果我們將這句話用數學的模式寫出來, 那就變成

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP, \tag{4}$$

其中 $P(t)$ 代表在時刻 t 的人口數, 而 k 是一個正的常數以表示增長。對於微分方程式 (4), 它是分離變數型微分方程式呢? 還是線性微分方程式呢? 一旦確定好類型, 那就把它的解算出來吧!

例 **1.** 試解初始值問題: $P'(t) = kP$, $P(0) = P_0 > 0$。

解**.** 若將它視爲分離變數型微分方程式, 則爲

$$\frac{P'(t)}{P} = k \Rightarrow \int \frac{P'(t)}{P}\,\mathrm{d}t = \int k\,\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|P(t)| = kt + C$$

因爲 $P(t) > 0$, 故絕對值可去除不予理會, 得到 $P(t) = \mathrm{e}^{kt+C} = C_1\mathrm{e}^{kt}$, 其中 $C_1 = \mathrm{e}^C > 0$。再將初始值 $P(0) = P_0$ 代入後得到 $C_1 = P_0$。因此 $P(t) = P_0\mathrm{e}^{kt}$。

解**.** 若將它視爲線性微分方程式 $P'(t) - kP(t) = 0$, 將方程式兩邊乘上積分因子 $\mathrm{e}^{\int -k\,\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-kt}$ 之後得到 $\mathrm{e}^{-kt}P'(t) - k\mathrm{e}^{-kt}P(t) = 0$, 於是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-kt}P(t)) = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-kt}P(t) = C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow P(t) = C\mathrm{e}^{kt}, C \in \mathbb{R}。$$

因爲 $P(0) = P_0$, 得到 $C = P_0$, 所以微分方程式的解爲 $P(t) = P_0\mathrm{e}^{kt}$。

例 **2.** 以下表格爲 20–21 世紀各年份印度的人口數 (單位: 百萬)。

年份	1991	2001	2011	2021
人口	846	1028	1210	1415

(A) 試以 1991 與 2011 爲基準預估 2021 年的人口, 並與實際人口數比較差異。

(B) 利用 (A) 的人口模型預測 2031 年印度人口。

解. 將 1991 年設定爲 $t = 0$, 而 2011 年設定爲 $t = 20$。由 $P(t) = P(0)\mathrm{e}^{kt} = 846\,\mathrm{e}^{kt}$, 而 $P(20) = 846\,\mathrm{e}^{20k} = 1210$ 解得 $k = \frac{1}{20}\ln\frac{1210}{846} \doteq 0.017893$, 得到模擬人口成長的函數爲

$$P(t) = 846\,\mathrm{e}^{0.017893t}。$$

(A) 由上推測 2021 年的人口數爲 $P(30) = 846\,\mathrm{e}^{0.017893\cdot 30} = 846\,\mathrm{e}^{0.53678} \doteq 1447$(百萬), 它比實際人數多了約略 3200 萬。

(B) 由數學模型推估 2031 年的印度人口數爲

$$P(40) = 846\,\mathrm{e}^{0.017893\cdot 40} = 846\,\mathrm{e}^{0.71571} \doteq 1731(\text{百萬})。$$

上述人口模型是最簡單的一個數學模型, 我們可以從數學模型所得到的結果與現狀對照並且預判未來, 但是這樣的結果不曉得各位是否滿意? 若發現這個數學模型無法有效解釋現況甚至在預判未來時產生失準的現象又該怎麼辦? 關於這類的後續問題, 我們會在單元 2.4.5 繼續討論。

2.4.2 放射性元素的衰退 (Radioactive Decay)

實驗得知:「放射性元素的衰退速率與其總質量呈正比」, 記 m_0 是某個 t_0 時刻放射性元素的質量, 而 $m(t)$ 爲從 t_0 之後經過了 t 時刻放射性元素的質量, 若將上述引號中的話用數學式寫下, 則爲:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = km, \quad m(t_0) = m_0,$$

其中 k 是一個負的常數以呈現衰退。而方程式的解爲 $m(t) = m_0\mathrm{e}^{kt}$。

研究放射性元素的衰退率會使用 *半衰期* (half-life) 的概念, 半衰期的意思是“當質量衰退爲原本的一半時所經過的時間。” 換言之, 由半衰期可以決定每一種放射性物質相應的 k 值。

例 **3.** 研究得知碳 14 的半衰期爲 5730 年。在非洲挖掘出人頭蓋骨, 其碳 14 的含量相對於正常量爲 76%, 試推估其存在年代。

解. 由 $m(t) = m_0\mathrm{e}^{kt}$ 以及半衰期的定義得到

$$\frac{m(5730)}{m_0} = \mathrm{e}^{k\cdot 5730} = \frac{1}{2},$$

由此得知 k 值滿足 $\mathrm{e}^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$。

又由頭蓋骨的資訊得知

$$\frac{76}{100} = \frac{m(t_0)}{m_0} = (\mathrm{e}^k)^{t_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}\cdot t_0},$$

所以可解得 $t_0 \approx 2268.67$(年)。

2.4.3 牛頓冷卻定律 (Newton's Law of Cooling)

所謂 *牛頓冷卻定律* (Newton's Law of Cooling) 是指物體冷卻的速度與物體溫度和環境溫度的差呈正比, 其中溫度差不能過大。假設 $T(t)$ 是 t 時刻物體的溫度, 而 T_s 是環境溫度 (假設爲常數), 牛頓冷卻定律得知 $T(t)$ 滿足以下微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k(T - T_s),$$

其中 k 爲負的常數表示冷卻。對於牛頓冷卻定律, 一個比較好的理解微分方程式的方法爲:

$$\frac{\mathrm{d}(T - T_s)}{\mathrm{d}t} = k(T - T_s),$$

所以函數 $T(t)$ 的解爲: $T(t) - T_s = (T(0) - T_s)\mathrm{e}^{kt}$; 換言之, $T(t) = T_s + (T(0) - T_s)\mathrm{e}^{kt}$。當初始溫度 $T(0)$ 比室溫高, 則過程爲冷卻, 此時 k 值爲負; 若初始溫度 $T(0)$ 比室溫低, 則過程爲升溫, 比方說退冰, 此時 k 值爲正。

例 **4** (名偵探柯南)**.** 一場兇殺案, 屍體於 2:30AM 的溫度爲 33.5°C, 一小時過後, 屍體降溫至 31.2°C。若當天氣溫爲 18.0°C, 請以人體正常體溫爲 37.0°C 推估兇殺案發生的時間。

解**.** 首先製作表格以清楚知道每個時間點的各種資訊:

時間	溫度	溫差
$t = t_0$	37.0°C	19.0°C
$t = 1$	33.5°C	15.5°C
$t = 2$	31.2°C	13.2°C

因爲 $13.2 = 15.5\mathrm{e}^{k}$, 所以 $k = \ln\left(\frac{13.2}{15.5}\right)$, 再由 $19.0 = 15.5\mathrm{e}^{k\cdot t_0}$ 得到 $k \cdot t_0 = \ln\left(\frac{19.0}{15.5}\right)$, 於是 $t_0 = -1.26756$ 約略是 1 小時 16 分 3 秒。因此推測死亡時間約爲上午 1 點 13 分 57 秒時行兇。

2.4.4 連續複利 (Continuously Compounded Interest)

記本金爲 A_0, 年利率爲 r, 銀行記息方式有單利與複利兩種, 其中 t 年之後的本利和計算方式如下 (n 爲一年當中計算複利的期數):

(A) 單利: 本利和 $=$ 本金 $\times$ $(1 +$ 年利率 $\times$ 年份$)$, $A = A_0(1 + rt)$。

(B) 複利: 本利和 $=$ 本金 $\times \left(1 + \frac{\text{年利率}}{\text{期數}}\right)^{\text{期數}\times\text{年份}}$, $A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$。

所謂 *連續複利* (continuously compounded interest) 是指當期數 n 趨近於無限大的結果, 於是

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{\frac{n}{r}\to\infty} A_0\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}\cdot rt} = A_0\left(\lim_{y\to\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right)^{rt} = A_0\mathrm{e}^{rt}。$$

所以連續複利公式會滿足微分方程式:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = rA。$$

例 **5.** 以年利率爲 6% 的連續複利計息方式, 投資一筆錢後多久本利和增倍?

解**.** 假設本金爲 $A_0 > 0$, 欲求 t 使得 $A_0\mathrm{e}^{0.06t} = 2A_0$, 即 $\mathrm{e}^{0.06t} = 2$, 兩邊取自然對數後得到 $0.06t = \ln 2$, 所以 $t = \frac{\ln 2}{0.06} \approx 11.55$(年)。

2.4.5 邏輯斯模型 (Logistic Models)

單元 2.4.1 所討論的馬爾薩斯人口模型並不適合預測長時間的人口數, 這是因爲人口不可能只依循指數函數的關係無限制增長下去, 理由在於有很多其它的因素影響人口變化, 一個最容易想到的因素是自然資源有限, 糧食無法無限制供應給愈來愈多的人。這時我們要對數學模型進行調整; 換言之, 如果資源有限使得人口不可能無限制增長是個重要的因素時, 就可以提出新的看法, 像是以下新觀點:

> 當人口少的時候, 人口增長的趨勢與原人口模型相近; 當人口超過某個數量之後, 人口的增加的速率會趨緩。

我們要如何修正原先的人口模型以貼近上述想法呢? 這裡要介紹的 邏輯斯模型 (logistic model) 是由比利時社會學家霍更斯特 (P.F. Verhurst) 於 1845 年所提出的修正人口模型:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \tag{5}$$

其中常數 $M > 0$ 稱爲 飽合值 (carrying capacity), 表示某一地區允許的最多的人口數。

首先我們討論邏輯斯模型 (5) 的確符合上述人口數的觀察。

- 當 $P(t)$ 很小, 也就是 $P(t) \ll M$ 時, 則 $1 - \frac{P}{M} \approx 1$, 所以 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx kP$ 說明當人口較少的時候, 人口增長與原人口模型相近。
- 當 $P(t) > \frac{1}{2}M$, 則 $P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) > 0$ 表示人口數隨時間繼續增加; 另一方面, 因爲 $P'' = k(P' - \frac{2PP'}{M}) = kP'(1 - \frac{2P}{M}) < 0$, 所以人口增加的速率會趨緩。

建立出新的數學模型之後, 接下來要探討這個修正人口模型的解。

例 **6.** 試解邏輯斯模型 (5), 其中 $P(0) = P_0 \in (0, M)$。

解. 將方程式進行改寫, 得到 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) = \frac{k}{M}P(M - P)$, 於是

$$\frac{1}{P(M-P)}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{M} \Rightarrow \int \frac{1}{P(M-P)}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{k}{M}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{1}{P(M-P)}\,\mathrm{d}P = \int \frac{k}{M}\,\mathrm{d}t,$$

左式的積分爲

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{P(M-P)}\,\mathrm{d}P &= \int \frac{1}{M}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}\right)\mathrm{d}P = \frac{1}{M}\left(\int \frac{1}{P}\,\mathrm{d}P - \int \frac{1}{M-P}\,\mathrm{d}(M-P)\right) \\ &= \frac{1}{M}(\ln|P| - \ln|M-P|) + C = \frac{1}{M}\left(\ln\left|\frac{P}{M-P}\right|\right) + C,\end{aligned}$$

所以

$$\frac{1}{M}\left(\ln\left|\frac{P}{M-P}\right|\right) = \frac{k}{M}t + C_1 \Rightarrow \ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = kt + C_2 \Rightarrow \left|\frac{P}{M-P}\right| = \mathrm{e}^{kt+C_2} = C_3\mathrm{e}^{kt},$$

拆絕對值之後則有

$$\frac{P}{M-P} = \pm C_3\mathrm{e}^{kt} = C_4\mathrm{e}^{kt} \Rightarrow P(t) = \frac{M}{1 + C_5\mathrm{e}^{-kt}},\ \text{其中 } C_5 = \frac{1}{C_4}。$$

因爲 $P(0) = P_0$, 所以 $C_5 = \frac{M}{P_0} - 1$, 因此 $P(t) = \frac{M}{1+\left(\frac{M}{P_0}-1\right)\mathrm{e}^{-kt}}$。

2.4.6 其它的數學模型

如前所述, 當我們學習微分方程時, 不只是純粹在學習如何將答案解出來而已, 而是要多花一些時間思考實際問題與相應的微分方程式之間的關係。

從一開始介紹的人口成長模型到修正後的人口模型 (邏輯斯方程), 可以得到一個心得: 當我們想建立一個相對完整的數學模型時, 可嘗試的做法是將實際問題中最重要的因子找出來, 相應地先設計出一個簡單的模型, 然後探討這個模型對於現狀而言是否有達到一定程度的精準。所謂的精準是依賴於你的研究目標, 可能是解釋過去、評估現狀、或是預測未來。一旦認定這個模型與實際情況誤差過大, 那麼就要繼續追問: 是否有另外一個不能忽略的因子, 如果有的話, 該如何將這個因子納入數學模型中, 然後再重新探討方程式並重做評估。這樣不斷地修正後就可以得到較完整的數學模型。

以下的幾個例子會接續人口模型的討論而得到各式各樣的數學模型。

例 **7.** 美國生物學家珀爾 (Raymond Pearl) 於 1920 年發現在有限的空間中果蠅總數之增長也可以用邏輯斯模型描述:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0.2P\left(1 - \frac{P}{1035}\right)。$$

試畫出這個微分方程式的 *解曲線* (solution curve), 並分析解的 *漸進行爲* (asymptotic behavior)。

解. 由 例 **6** 討論, 代入 $k = 0.2, M = 1035$ 後得到: 如果 $P \neq 0, 1035$, 則

$$P(t) = \frac{1035}{1 + \left(\frac{1035}{P_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-0.2t}},$$

而 $P \equiv 0, P \equiv 1035$ 也是微分方程式的解。注意到在 $P \equiv 1035$ 的情況可以納入到上面的函數表達。圖 2.2 是利用數學軟體畫出在初始值分別是 $P_0 = 20, 50, 80$ 的時候 $P(t)$ 的函數圖形, 而上、下兩條水平線表示 $P = 0$ 與 $P = 1035$ 兩者都是微分方程式的解。

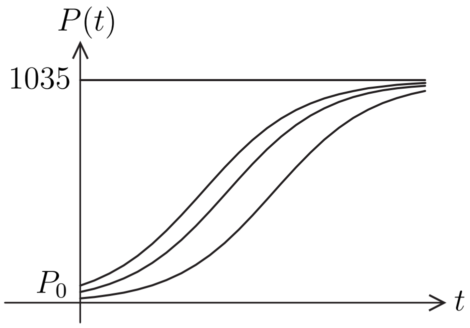

圖 2.2: 圖中的三條曲線 (由下到上) 分別是初始值 $P_0 = 20, 50, 80$ 的解曲線; 而上、下兩條水平線 $P = 1035$ 與 $P = 0$ 也是微分方程的解。

現要觀察解的漸進行爲, 因爲 $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-0.2t} = 0$, 若 $P_0 \neq 0$, 則 $\frac{1035}{P_0} - 1 \neq 0$, 所以

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1035}{1 + \left(\frac{1035}{P_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-0.2t}} = \frac{1035}{1 + \left(\frac{1035}{P_0} - 1\right)\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-0.2t}} = 1035,$$

若 $P_0 \equiv 0$, 則 $P(t) = 0$, 所以 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = 0$。

上例當中, 若初始值 P_0 介於 0 到 $\frac{M}{2}=\frac{1035}{2}$ 之間的解曲線 $P(t)$ 有如 S 形狀 (S-shaped): 曲線 $P=P(t)$ 最初上升緩慢, 接著急速上升, 當 $P(t)$ 超過 $\frac{M}{2}$ 之後, 增加的程度漸緩, 最後趨於水平漸近線 $P=M$。除了生物的繁殖外, 許多現象如傳染病的傳播, 本質上都符合這種模型。

上一段話當中, 其實說明了一件事: 這些解曲線滿足 $P(t_0)=\frac{M}{2}$ 的地方 $(t_0,\frac{M}{2})$ 其實是函數 $P(t)$ 圖形的反曲點 (point of inflection)。這件事我們可從 $P''=k(P-\frac{2PP'}{M})=kP(1-\frac{2P}{M})=0$ 得到驗證。而它也反應了另一件事: 一般說來, 我們並不一定要先把方程式的解明確寫出來才能分析解的行爲, 單純從方程式本身就可以告訴我們一些現象。如圖 2.3, 我們可以畫出 P' 的符號表:

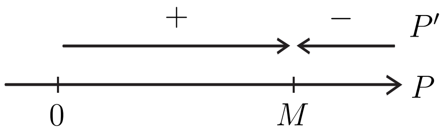

圖 2.3: 由方程式本身就可以判斷 P' 的正、負號。

將圖 2.3 旋轉 90 度後與圖 2.2 的縱軸貼齊, 根據 P' 的正負號就可以畫出箭頭是指向上 (隨 t 增加時 $P(t)$ 增加) 或是指向下 (隨 t 增加時 $P(t)$ 減少)。而這個例子中, 我們會說 $P=0$ 與 $P=1035$ 是 *平衡點* (equilibrium points); 其中 $P=1035$ 是 *穩定態* (stable); 也就是說, 在 $P=1035$ 附近的那些初始值的解隨 t 增加 $P(t)$ 會趨近於 1035。至於 $P=0$ 是 *不穩定態* (unstable); 換言之, 在 $P=0$ 附近的那些初始值的解隨 t 增加 $P(t)$ 會遠離 0。

例 **8.** 有些生物會有一個現象: 當總數小於一個數字 m 時, 該物種將瀕臨絕種。若要將這個因素呈現於微分方程式當中, 我們可以考慮以下方程:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=kP\left(1-\frac{P}{M}\right)\left(1-\frac{m}{P}\right)。$$

試由方程式的型態討論解的特性。

解**.** 令 $f(P)=kP\left(1-\frac{P}{M}\right)\left(1-\frac{m}{P}\right)$, 然後畫出 P 對於 $f(P)$ 的函數圖形, 如圖 2.4 所示:

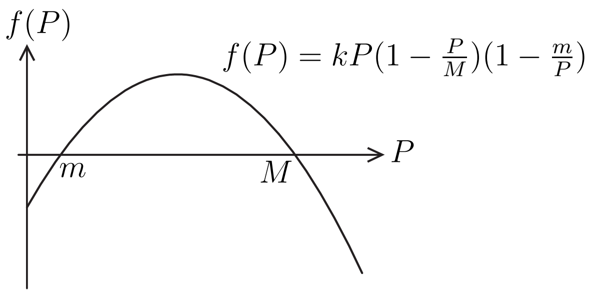

圖 2.4: 用圖形說明 $f(P)=kP(1-\frac{P}{M})(1-\frac{m}{P})$ 的大小。

因爲 $f(P)$ 的正負號其實反應了 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ 的正負號, 也就是數量的遞增或遞減。因此, $P=0,P=m,P=M$ 是平衡點; 而 $P=0,P=M$ 是穩定態; 至於 $P=m$ 是不穩定態。更仔細地說, 我們得到:

- 若 $0<P<m$, 則 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=0$, 反應物種將瀕臨絕種。
- 若 $m<P<M$, 則 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=M$, 反應物種將在環境中趨於飽合。
- 若 $M<P$, 則 $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=M$, 反應環境無法負荷過多的物種使之衰減至飽合值。

例 **9.** 對於生態學中某些生物總數的增長, 還要考慮一些其它因素, 所以會再對邏輯斯模型再加以修改。例如考慮某種特別魚群的數量, 因爲每天魚都會被捕捉, 假設魚群以常數 c 的速率被捕, 於是可以設定微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$$

以描述魚群總數的增長模型。試由方程式討論解的特性。

解. 令 $f(P) = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c = \frac{-kP^2+kMP-cM}{M}$, 其中 k, M, c 爲三個正數, 而 $f(P)$ 的正負號與分子 $g(P) = -kP^2 + kMP - cM$ 的正負號一致, 故分析 $g(P)$。此外, 我們感興趣的是在 $P > 0$ 的情況。對於 k, M, c 這三個正數, 因爲 k 和 M 是魚群在環境中自然地成長與飽合值, 而 c 值是人爲因素, 所以我們感興趣的問題是: c 值的大小如何影響魚群數量。

首先, 將 $g(P)$ 進行配方法得到

$$g(P) = -kP^2 + kMP - cM = -k\left(P - \frac{M}{2}\right)^2 + \frac{M(kM-4c)}{4}。$$

- 如果 $c < \frac{kM}{4}$, 則 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0$ 有兩個平衡點

  $$P_{\pm} = \frac{kM \pm \sqrt{k^2M^2 - 4kcM}}{2k} = \frac{kM \pm \sqrt{kM(km-4c)}}{2k},$$

  畫出 P 對於 $g(P)$ 的關係圖, 如圖 2.5 所示:

  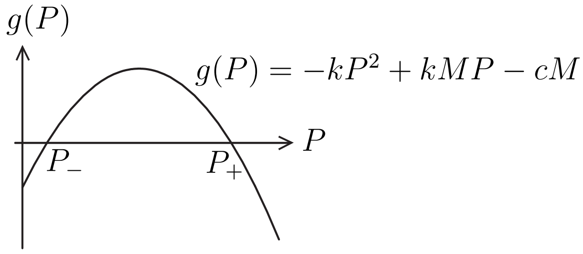

  圖 2.5: 函數 $g(P) = -kP^2 + kMP - cM$ 的圖形。

  由上圖可知: $P = P_-$ 是不穩定態, $P = P_+$ 是穩定態; 也就是說, 若初始值 P_0 在 P_- 附近又比 P_- 小的話, 那麼魚群數量會愈來愈少趨於滅絕; 若初始值 $P_0 \in (P_-, P_+)$, 環境與捕捉兩者相較之下, 會讓魚群增長而趨於 $P = P_+$; 若初始值 P_0 在 P_+ 附近又比 P_+ 大的話, 因爲環境已達飽合不利魚群生長, 又有捕捉因素, 所以魚群數量會減少而趨於 $P = P_+$。

- 如果 $c > \frac{kM}{4}$, 則 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0$, 表示魚群過於捕捉。不論初始值 P_0 爲何, 都有 $\lim_{t\to\infty} P(t) = 0$, 這表示魚群會愈來愈少總將瀕臨絕種。

- 如果 $c = \frac{kM}{4}$, 則 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0$ 有一個平衡點 $\bar{P} = \frac{M}{2}$。若 $P < \bar{P}$, 則 $g(P) < 0$; 若 $P > \bar{P}$, 則 $g(P) < 0$。此時 $P = \bar{P}$ 是一個 *半穩定態* (semistable); 也就是說, 不論初始值 P_0 爲何, 魚群都會減少, 若一開始的魚群不夠多 (小於 $\bar{P}$), 那麼魚群會趨於滅絕; 若一開始的魚群過剩 (大於 $\bar{P}$), 那麼魚群會趨於 $P = \bar{P}$。

2.5 正合方程式

本單元將探討正合方程式及其相關的延伸問題。現給出正合方程式的定義:

定義 1 (第 70 頁)**.** 考慮以微分形式所呈現的一階微分方程式:

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{6}$$

若存在一個二變數函數 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

則稱微分方程式 (6) 是 *正合方程式* (exact equation)。在這個情況之下, 正合方程式 (6) 的解是 $\varphi(x,y) = C$, 其中 $C \in \mathbb{R}$。

定義了正合方程式, 以下我們要問兩個問題:

(A) 是否有什麼方法或判別式確定方程式 $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ 是正合的?

(B) 若已確定 $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ 是一個正合方程式, 要如何找到 $\varphi(x,y)$?

關於問題 (A), 假設存在 $\varphi(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}\varphi(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$, 因爲

$$\mathrm{d}\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}y,$$

所以將方程式 (6) 與 $\varphi(x,y)$ 的全微分兩者對照之下, 得知正合微分方程式的解必須滿足

$$P(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad \text{與} \quad Q(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}。$$

若 $P(x,y)$ 與 $Q(x,y)$ 具有連續的偏導函數時, 那麼函數 $\varphi(x,y)$ 就是一個二次偏導數仍連續的函數, 由克萊羅定理 (Clairaut's Theorem), 得知

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}。$$

所以, 若微分方程式 (6) 是正合時, 其必要條件是 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。

至於 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 會是讓微分方程式 (6) 是正合的充分條件嗎? 其結果是: 若討論的區域是 *單連通* (simply connected) 時, 由格林定理 (Green's Theorem) 得知: 若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 那麼方程式 (6) 是正合的。有關格林定理, 它是微積分 (向量微積分) 的課程內容, 各位應自行回顧將這部份的論述補齊。

關於問題 (B), 目標是要找 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y), \end{cases}$$

先將第一個式子對於 x 積分後, 左式爲 $\varphi(x,y)$, 而右式的積分常數是一個和 y 有關的函數 $h(y)$。再將式子兩邊對 y 偏微分後與第二式比較, 就可以解出 $h(y)$。這部份的過程與微積分 (向量微積分) 課程中尋找位勢函數 (potential function) 的方法一樣, 也建議各位回去複習那部份的內容並與這裡討論的內容對照。

例 **2** (第 72 頁). 試解微分方程式

$$(x+\sin y)\,\mathrm{d}x+(x\cos y-2y)\,\mathrm{d}y=0。$$

解. 記 $P(x,y)=x+\sin y$ 與 $Q(x,y)=x\cos y-2y$。計算 $Q_x=\cos y$ 與 $P_y=\cos y$, 因爲 $Q_x=P_y$, 所以它是一個正合微分方程式; 也就是說, 存在 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x+\sin y\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=x\cos y-2y。\end{cases}$$

由 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=x+\sin y$ 得到

$$\varphi(x,y)=\int(x+\sin y)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+x\sin y+h(y),$$

再計算

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=x\cos y+h'(y)=x\cos y-2y$$

所以 $h'(y)=-2y$, 得到 $h(y)=-y^2+C_1$, 其中 $C_1\in\mathbb{R}$。因此 $\frac{1}{2}x^2+x\sin y-y^2=C$, 其中 $C\in\mathbb{R}$, 是微分方程式 $(x+\sin y)\,\mathrm{d}x+(x\cos y-2y)\,\mathrm{d}y=0$ 的解。

對於非正合的微分方程式, 有時我們可透過將方程式乘上 積分因子 (integrating factor) $\mu(x,y)$ 之後得到新的微分方程式表達

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$$

之下, 它是一個正合方程式。在此觀察 $\mu(x,y)$ 必須滿足的條件: 假設 $\varphi(x,y)$ 滿足

$$\mathrm{d}\varphi=\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0。$$

因爲 $\mu(x,y)P(x,y)$ 與 $\mu(x,y)Q(x,y)$ 滿足

$$\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}\Rightarrow\mu_xQ+\mu Q_x=\mu_yP+\mu P_y\Rightarrow\mu=-\frac{Q\mu_x-P\mu_y}{Q_x-P_y}。$$

現在我們討論以下三種特殊情況:

(A) 若 $-\frac{Q}{Q_x-P_y}$ 只與 x 有關, 那麼可以考慮乘上只與 x 有關的積分因子 $\mu(x)$, 其中

$$\frac{\mu(x)}{\mu'(x)}=-\frac{Q}{Q_x-P_y}\Rightarrow\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}=-\frac{Q_x-P_y}{Q}\Rightarrow\mu(x)=\exp\left(\int-\frac{Q_x-P_y}{Q}\,\mathrm{d}x\right)。$$

(B) 若 $\frac{P}{Q_x-P_y}$ 只與 y 有關, 那麼可以考慮乘上只與 y 有關的積分因子 $\mu(y)$, 其中

$$\frac{\mu(y)}{\mu'(y)}=\frac{P}{Q_x-P_y}\Rightarrow\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{Q_x-P_y}{P}\Rightarrow\mu(x)=\exp\left(\int\frac{Q_x-P_y}{P}\,\mathrm{d}x\right)。$$

(C) 若 $-\frac{(yQ-xP)}{Q_x-P_y}=f(xy)$, 那麼可以考慮積分因子的型式爲 $\mu(v)=\mu(xy)$, 其中

$$\frac{\mu(v)}{\mu'(v)}=-\frac{(yQ-xP)}{Q_x-P_y}=f(v)\Rightarrow\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}=\frac{1}{f(v)}\Rightarrow\mu(xy)=\exp\left(\int\frac{1}{f(v)}\,\mathrm{d}v\right)。$$

例 **3** (第 72 頁). 試解微分方程式 $(3x^3+y)\,\mathrm{d}x+(2x^2y-x)\,\mathrm{d}y=0$, 其中討論的區域是單連通的而且不含坐標原點。

解. 記 $P=3x^3+y$ 與 $Q=2x^2y-x$, 則 $Q_x=4xy-1$ 與 $P_y=1$。因爲 $Q_x\neq P_y$, 所以這個方程式並非正合方程式。然而, 因爲 $Q_x-P_y=4xy-2=2(2xy-1)$, 得到

$$-\frac{Q}{Q_x-P_y}=-\frac{x(2xy-1)}{2(2xy-1)}=-\frac{x}{2}$$

是一個只與 x 有關的函數, 所以可以考慮積分因子

$$\mu(x)=\exp\left(\int-\frac{Q_x-P_y}{Q}\,\mathrm{d}x\right)=\exp\left(\int-\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x\right)=\exp\left(-2\ln|x|\right)=\frac{1}{x^2},$$

將方程式兩邊同乘 $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$ 之後得到

$$\left(3x+\frac{y}{x^2}\right)\,\mathrm{d}x+\left(2y-\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}y=0,$$

則它會是正合方程式。

現在想要找到 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=3x+\frac{y}{x^2}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=2y-\frac{1}{x}。\end{cases}$$

由 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=3x+\frac{y}{x^2}$ 得到 $\varphi(x,y)=\frac{3}{2}x^2-\frac{y}{x}+h(y)$, 再與第二式相比較得到 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{1}{x}+h'(y)=2y-\frac{1}{x}$, 所以 $h'(y)=2y$ 解得 $h(y)=y^2+C_1$。因此微分方程式的解爲 $\frac{3}{2}x^2-\frac{y}{x}+y^2=C$, 其中 $C\in\mathbb{R}$。

例 **4**. 試解微分方程式 $(3xy+2y^2)\,\mathrm{d}x+(3xy+2x^2)\,\mathrm{d}y=0$。

解. 令 $P=3xy+2y^2$ 與 $Q=3xy+2x^2$。計算 $Q_x=3y+4x$ 與 $P_y=3x+4y$, 因爲 $Q_x\neq P_y$, 所以這個方程式並非正合方程式。然而, 因爲 $Q_x-P_y=x-y$, 而且

$$-\frac{(yQ-xP)}{Q_x-P_y}=-\frac{y(3xy+2x^2)-x(3xy+2y^2)}{x-y}=\frac{x^2y-xy^2}{x-y}=\frac{xy(x-y)}{x-y}=xy,$$

所以我們可以將方程式兩邊乘上 $\mu(v)=\mu(xy)$ 使之爲正合方程式, 其中

$$\mu(v)=\exp\left(\int\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v\right)=\exp\left(\ln|v|\right)=v=xy,$$

於是 $(3x^2y^2+2xy^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y^2+2x^3y)\,\mathrm{d}y=0$ 是一個正合方程式。

現在想要找到 $\varphi(x,y)$ 使得

$$\begin{cases}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2y^2+2xy^3\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=3x^2y^2+2x^3y。\end{cases}$$

由 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=3x^2y^2+2xy^3$ 得到 $\varphi(x,y)=x^3y^2+x^2y^3+h(y)$, 再與第二式相比較得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=2x^3y+3x^2y^2+h'(y)=3x^2y^2+2x^3y,$$

所以 $h'(y)=0$ 解得 $h(y)=C_1$。因此微分方程式的解爲 $x^3y^2+x^2y^3=C$, 其中 $C\in\mathbb{R}$。

2.6　一階微分方程式的綜合討論

這一個單元想要針對前面幾個單元的內容進行綜合討論。我們用問與答的方式呈現這一個單元。

問題 **1.** 什麼是分離變數型微分方程式? 任何分離變數型微分方程式都是正合方程式嗎? 爲什麼?

解. 所謂分離變數型微分方程式, 是指型如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)q(y)$$

的式子, 其中 $p(x)$ 是一個與 x 有關的函數, 而 $q(y)$ 是一個與 y 有關的函數。若將分離變數型微分方程式改用微分型式的方程式表達, 則爲

$$\frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\,\mathrm{d}y = 0。$$

令 $P = p(x)$ 與 $Q = -\frac{1}{q(y)}$。因爲 $Q_x = 0, P_y = 0$, 得到 $Q_x = P_y$, 所以分離變數型微分方程式是正合方程式 (這裡假設討論的區域是單連通的)。因此我們可以用正合方程式的求解法處理分離變數型微分方程式。

問題 **2.** 什麼是一階線性常微分方程式? 任何一階線性常微分方程式都是正合方程式嗎? 爲什麼?

解. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)$$

的方程式稱爲一階線性常微分方程式, 其中 $p(x)$ 與 $q(x)$ 是在區間 I 上的連續函數。若將方程式改寫成微分形式

$$(q(x) - p(x)y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$

的樣子, 然後令 $P = q(x) - p(x)y$ 與 $Q = -1$, 因爲 $Q_x = 0, P_y = -p(x), Q_x \neq P_y$, 所以它並非正合方程式。

因爲

$$-\frac{Q}{Q_x - P_y} = \frac{1}{p(x)}$$

只與 x 有關, 所以可以將方程式同乘一個與 x 有關的積分因子 $\mu(x)$ 使得

$$\mu(x)(q(x) - p(x)y)\,\mathrm{d}x - \mu(x)\mathrm{d}y = 0$$

是正合方程式。而這個積分因子 $\mu(x)$ 滿足

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{Q_x - P_y}{Q} = p(x) \Rightarrow \ln|\mu(x)| = \int p(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mu(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

得知這個積分因子和線性微分方程式當中得到的積分因子相同; 也就是說, 這兩類方程式所描述的積分因子是在講同一件事。

問題 3. 什麼是一階齊次微分方程式? 任何一階齊次微分方程式都是正合方程式嗎? 對於一般的一階齊次微分方程式, 我們可以考慮的積分因子的形式是什麼?

解. 若一階微分方程式可以表達成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

時稱爲一階齊次微分方程式。若將方程式改寫成

$$F\left(\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0,$$

然後令 $P = F(\frac{y}{x}), Q = -1$, 因爲 $Q_x = 0, P_y = F'(\frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x}, Q_x \neq P_y$, 所以它並非正合方程式。

若我們重新研究積分因子的討論時, 因爲 $\frac{y}{x}$ 的形式勢必會出現, 所以我們可以往下追問的是: 在什麼情況下, 將方程式兩邊乘上形如 $\mu(v) = \mu(\frac{y}{x})$ 的積分因子之後可得新的方程式是正合的。此時, 因爲 $\mu_x = \mu'(v) \cdot (-\frac{y}{x^2})$ 以及 $\mu_y = \mu'(v) \cdot \frac{1}{x}$, 所以 μ 必須滿足

$$\mu = -\frac{Q\mu_x - P\mu_y}{Q_x - P_y} = -\frac{\mu'(v) \cdot \frac{y}{x^2} - F(v) \cdot \mu'(v) \cdot \frac{1}{x}}{-F'(v) \cdot \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{\mu(v)}{\mu'(v)} = \frac{v - F(v)}{F'(v)}。$$

從上面的討論中, 我們發現到 $\frac{v-F(v)}{F'(v)}$ 是一個只與 v 有關的函數, 所以乘上型如 $\mu(v)$ 的積分因子是可行的。此外, 我們有

$$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)} = \frac{F'(v)}{v - F(v)} \Rightarrow \int \frac{\mu'(v)}{\mu(v)}\,\mathrm{d}v = \int \frac{F'(v)}{v - F(v)}\,\mathrm{d}v \Rightarrow \ln|\mu(v)| = \int \frac{F'(v)}{v - F(v)}\,\mathrm{d}v,$$

於是可以選取一個積分因子爲

$$\mu(v) = \exp\left(\int \frac{F'(v)}{v - F(v)}\,\mathrm{d}v\right)。$$

問題 4. 一個微分方程式只會有一種積分因子嗎? (這裡將差異是常數倍的積分因子視爲同一種。)

解. 考慮微分方程式 $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$, 記 $P = y, Q = -x$, 則 $Q_x = -1, P_y = 1$, 因爲 $Q_x \neq P_y$, 所以這個方程式並非正合方程式。這時, 考慮以下情況:

- 因爲 $-\frac{Q}{Q_x - P_y} = -\frac{x}{2}$ 只與 x 有關, 所以我們可以同乘只與 x 有關的積分因子 $\mu(x)$, 這個積分因子必須滿足

$$\frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = -\frac{Q}{Q_x - P_y} = -\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{x^2}。$$

- 因爲 $\frac{P}{Q_x - P_y} = -\frac{y}{2}$ 只與 y 有關, 所以我們可以同乘只與 y 有關的積分因子 $\mu(y)$, 這個積分因子必須滿足

$$\frac{\mu(y)}{\mu'(y)} = \frac{P}{Q_x - P_y} = -\frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{2}{y} \Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{y^2}。$$

由上討論得知: 對於同一個方程式, 積分因子的選取方法可能不只一種。

問題 5. 什麼類型的微分方程式可以考慮使用積分因子 $\mu(x+y)$ 以求解?

解. 假設一個方程式 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ 不是正合方程式, 但是乘上 $\mu(v)=\mu(x+y)$ 之後形成正合方程式, 因爲 $\mu_x=\mu'(v), \mu_y=\mu'(v)$, 代入積分因子的條件後得到

$$\mu(v)=-\frac{Q\mu_x-P\mu_y}{Q_x-P_y}=-\frac{Q\mu'(v)-P\mu'(v)}{Q_x-P_y}\Rightarrow\frac{\mu(v)}{\mu'(v)}=-\frac{Q-P}{Q_x-P_y}。$$

由上討論我們知道: 若 $-\frac{Q-P}{Q_x-P_y}=f(x+y)$, 那麼我們就可以將方程式乘上 $\mu(v)=\mu(x+y)$ 使得方程式是正合的。此時,

$$\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}=-\frac{Q_x-P_y}{Q-P}\Rightarrow\int\frac{\mu'(v)}{\mu(v)}\,\mathrm{d}v=\int-\frac{Q_x-P_y}{Q-P}\,\mathrm{d}v\Rightarrow\mu(v)=\exp\left(\int-\frac{Q_x-P_y}{Q-P}\,\mathrm{d}v\right)。$$

問題 6. 既然之前討論的一階微分方程式 (分離變數型微分方程式、齊次方程式、一階線性微分方程式) 都和正合方程式有關, 爲什麼我們要花時間先討論那些微分方程式, 直接介紹正合方程式的理論不就好了嗎?

解. 由前面的討論知道: 雖然分離變數型微分方程式、齊次方程式、一階線性微分方程式都可以歸結到正合方程式, 但爲何要先花時間介紹那些微分方程式, 原因有以下幾個:

(A) 就微分方程式的演進來說, 分離變數型的微分方程式、齊次方程式、一階線性微分方程式是早於正合方程式的出現, 而且一些重要或是有趣的問題, 對應到的方程式都是這幾類的問題, 所以它們的求解法自然是先出現而且是先被研究的; 正合方程式及其變形是後期才有的產物, 若沒有本單元前面幾個問題的引導, 或許大家也不會曉得這些微分方程式彼此有關聯。

(B) 雖然那些方程式都可以歸結到正合方程式, 但是正合方程式的求解過程中複雜而繁瑣, 要得到最後答案的過程相當冗長, 其它的方程式可以很快得到結果。各位在正合方程式的那個單元也了解到: 若原始的方程式不非正合方程式時, 我們可以考慮乘上積分因子 $\mu(x,y)$ 使之正合, 而 $\mu(x,y)$ 會滿足一個一階偏微分方程式, 這個方程式的解並不容易, 所以我們才只處理某些特別形式的方程式進行討論。

(C) 每一類型的微分方程式各有其特色, 若把它們都視爲和與正合方程式有關的問題反而看不出每個方程式的特別之處。比方說線性微分方程式的解從原始的結構看問題的時候, 可以知道方程式的解與線性代數的關係, 若是從正合方程式的觀看出發時, 就失去了那層意義。又像是在建構數學模型的時候, 我們會從原始的微分方程式的樣貌去設定相應的方程式, 用微分形式的方程式較難體會方程式的實際意義。

現在反過來看這個問題, 這一個單元呈現的用意是在於: 多數學生在學一階微分方程式的時候, 會知道每一種方程式有對應的解法, 也有它獨特的結果, 但是鮮少人知道這些方程式都是合正方程式有關, 或者說, 在線性微分方程式的時候是利用積分因子法, 在正合方程式的第二部份討論時也用了積分因子法, 我們自然會去追問這兩種積分因子是在講同一件事嗎? 還是它們是兩個不一樣的概念? 因爲光是看原先的討論大概無法立刻下結果, 所以需要進一步地分析才會了解。在這個問題解決之後, 連同就會追問是不是其它類型的微分方程式也與正合方程式有關。

總之, 上述的說明是給各位一個參考, 希望大家對於一階微分方程式的理論有較爲全面的認識。

2.7 一階微分方程式初始值問題解的存在唯一性定理

這一個單元想要探討一階微分方程式初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y), \quad y(0) = 0$$

在什麼樣的條件下, 這個方程式的解具有存在性 (existence) 與唯一性 (uniqueness); 此外, 在什麼條件下, 方程式的解不見得有唯一性。這個單元的編排是先把在證明定理時需要用到的預備知識獨立成一個小單元並放在最前面, 這樣可以讓各位更快了解並掌握定理的證明。

2.7.1 預備知識

這一個小單元所介紹的定義與定理都是微積分與高等微積分的範疇, 這裡只列出其結果, 至於證明可參閱與數學分析相關的教科書。

定義 1 (連續函數, continuous function). 假函數 $f(x)$ 在閉區間 $I = [a, b]$ 有定義,

(A) 若 $x_0 \in (a, b)$ 且滿足 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處連續 (continuous at $x = x_0$)。

(B) 若 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續; 若 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ 則稱函數 $f(x)$ 在 $x = b$ 連續。

(C) 若函數 $f(x)$ 對所有 $x_0 \in [a, b]$ 處連續, 則稱函數 $f(x)$ 在區間 $I = [a, b]$ 上連續。

關於連續函數的定義, 我們可以把函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續理解成

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

也就是說, 函數一點連續意味著極限的操作與函數取值的操作兩者順序可交換。

有界閉區間上的連續函數有四個重要的大定理, 分別是: 有界性定理、極值定理、中間值定理、均勻連續定理, 這裡我們需要用到的是極值定理, 故呈現此結果。

定理 2 (極值定理, Extreme Value Theorem). *若函數 $y = f(x)$ 在閉區間 $I = [a, b]$ 上連續, 則存在 $x_m, x_M \in [a, b]$ 使得 $f(x_m) = \min\limits_{x \in I} f(x)$ 與 $f(x_M) = \max\limits_{x \in I} f(x)$。*

在引進函數 $f(x)$ 在一點的導數 $f'(x_0)$ 與還有可微分函數的概念後, 關於可微分函數的理論, 均值定理是最常用的定理。

定理 3 (均值定理, Mean Value Theorem). *若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續, 在 (a, b) 上可微分, 則存在 $\xi \in (a, b)$ 使得*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)。$$

微積分基本定理可說是微積分理論中最重要的一個定理, 它在述說求導的操作與積分的操作兩者是互逆的運算, 微積分基本定理的第一部分是在描述先積分再求導則還原, 至於第二部分則是在描述先求導再積分後的結果。

定理 4 (微積分基本定理, Fundamental Theorem of Calculus, Part I and Part II)**.**

(A) 若 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 上連續, 定義函數 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 則 $F'(x)=f(x)$。

(B) 若 $f(x)$ 在閉區間 $[a,b]$ 是一次微分仍連續的函數, 則 $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$。

到了函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 與函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的理論, 我們最關心的問題是: 當函數列的每一項 $f_n(x)$ 在區間 $I=[a,b]$ 上有好的數學性質 (比方說連續性、可積性、可微分性等), 那麼取極限之後的函數 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 是否也保有這些數學性質? 若不給予任何限制, 我們總是可以造出各種違反心中理想的例子。於是我們要尋求適當的條件, 而且想要給出一些好的判別法以快速驗證條件成立。此外, 當函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的理論成形後, 至函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的理論, 因爲它的定義是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, 其中 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, 所以就可以歸結至函數列的理論了。

而函數列理論的最重要一件事就是要釐清逐點收斂與均勻收斂的差異。

定義 5 (逐點收斂與均勻收斂, pointwise convergent; uniformly convergent)**.** 考慮區間 $I=[a,b]$ 上的函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$,

(A) 若對所有 $x\in I$ 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在; 即存在 $f(x): I=[a,b]\to\mathbb{R}$ 滿足以下精確定義

> 對所有 $x\in I$, 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(x,\varepsilon)\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 時, 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$,

稱函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上 *逐點收斂* (pointwise convergent) 至函數 $f(x)$。

(B) 若函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 逐點收斂至 $f(x)$, 而且又滿足以下精確定義

> 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ 使得 $n\geq N$ 時, 對所有的 $x\in I$, 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。

則稱函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上 *均勻收斂* (uniformly convergent) 至函數 $f(x)$。

由上面的精確定義可以看出: 函數列的逐點收斂與均勻收斂之間最大的差異在於定義中 N 的選取, 逐點收斂是和 x 有關, 也就是不同的點可以各自選定一個 N 值以完成要求, 而均勻收斂則是要求所選到的 N 必須是和位置 x 無關。一個很快可以體會兩者差異的例子是逐點收斂像是六個人在進行百米賽跑, 鳴槍之後, 每個人奮力向前衝, 因爲每個人的體能不盡相同, 所以跑步的時候有的快有的慢, 最終每個人都抵達終點線。至於均勻收斂的一個類比是將這六個人的左、右腳綁起來變成了六人七腳然後進行百米賽跑, 鳴槍之後, 因爲你前行的時候受到左、右兩人的牽制, 也就是所有人必須一起向前行才能達到終點。

在數學上, 我們必須給出快速判斷函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上是否均勻收斂的方法, 以下定理提供了一個檢驗方式:

定理 6. 假設函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上逐點收斂至 $f(x)$, 記

$$\|f_n - f\|_\infty \overset{\text{定義}}{=\!=} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|,$$

則函數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 I 上均勻收斂至 $f(x)$ 的充分必要條件是

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0, \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0。$$

關於上述均勻收斂檢驗法應該要覺得很自然, 因爲 $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ 這個量是在描述 $f_n(x)$ 與 $f(x)$ 差距最大的值, 於是 $\|f_n - f\|_\infty$ 這個量與 x 無關, 因此問題就轉變爲 $\|f_n - f\|_\infty$ 隨 n 變大時是否趨近於零。若 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, 透過數列極限的精確定義, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 而最後一個不等式又可以進一步推論出: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)\mathbb{N}$, 使得對所有 $n \geq N$ 以及對所有 $x \in I$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$。

若是要問函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上是否均勻收斂, 以下定理將給出簡單又實用的判別法。

定理 7 (魏爾斯特拉斯 M-判別法, Weierstrass M-Test)**.** 考慮函數項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 假設存在一個無窮數列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得對所有 $x \in I$ 與 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|f_n(x)| \leq M_n$。如果級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在區間 I 上均勻收斂。

注意到上述定理的結論是探討函數級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的均勻收斂性。關於級數的收斂, 應理解爲「部分和數列的極限」, 所以定理應看成研究部分和函數列 $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的均勻收斂性, 其中 $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$。

就如前面的引言說明, 認識函數列是否均勻收斂, 其用意是在於均勻收斂可以將函數列具有的數學性質 (連續性、可積性、可求導) 可以移植到取極限之後的函數。在這個部分我們只會用到的是連續這個特性, 所以在此把相關結果列出來。

定理 8. 若函數列 $\{f_n : I \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$ 對於所有 $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ 在 $x = x_0 \in I$ 處連續, 而且 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 I 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續。

數學分析上, 我們可以定義函數在一個點是否連續, 所以上面定理是在確定函數列中的每個函數在一點連續, 而且在均勻收斂的條件下得到取極限之後的函數在一個點連續的結果。若在一個區間 I 上的每一個點都用上面定理, 就可以得到整個範圍的均勻收斂結果。

定理 9. 若有連續函數數列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在閉區間 $I = [a, b]$ 上均勻收斂至 $f(x)$, 則 $f(x)$ 在閉區間 $I = [a, b]$ 上連續。

2.7.2 一階微分方程式初始值問題解的存在唯一性定理

這一個小單元將正式探討一階微分方程式初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), \quad y(0) = 0, \tag{7}$$

解的存在性 (existence) 與唯一性 (uniqueness)。

定理 10 (第 52, 83–89 頁)**.** 若 $F(x,y)$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ 在矩形區域 $R = [-a,a] \times [-b,b]$ 上連續, 則存在區間 $[-h,h] \subset [-a,a]$ 使得微分方程式 (7) 在 $x \in [-h,h]$ 中存在唯一解 $y = \phi(x)$。

以下將給予 定理 **10** 的證明。

證明: 由 $F(x,y)$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ 在矩形區域 R 上的連續性先推得以下兩個性質:

(A) 由極值定理 (Extreme Value Theorem) 知: 存在兩正數 M_0, M_1 使得在矩形區域 R 上滿足

$$|F(x,y)| \le M_0 \quad \text{與} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right| \le M_1\text{。}$$

(B) 由均值定理 (Mean Value Theorem) 知: 任給 $x \in [-a,a]$ 與 $y_1, y_2 \in [-b,b]$, 存在 y^* 介於 y_1, y_2 之間使得

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| = \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y^*)(y_2 - y_1)\right| = \left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y^*)\right| |y_2 - y_1| \le M_1|y_2 - y_1|\text{。}$$

現取一正數 h, 其中 $h \le a$ 而且滿足 $M_0 h < b$ 與 $M_1 h < 1$。以下討論將在區間 $[-h,h]$ 中找到函數 $y = \phi(x)$ 滿足初始值問題 (7), 並證明唯一性。
首先, 我們要證明一個等價敘述: 初始值問題 (7) 解的存在性等價於函數 $y = \phi(x)$ 滿足以下的積分方程:

$$\phi(x) = \int_0^x F(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s \quad \text{與} \quad \phi(0) = 0\text{。}$$

($\Rightarrow$) 若 $y = \phi(x)$ 滿足 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = F(x,\phi(x))$, 將方程式兩邊對於 x 積分, 並修改啞吧變數爲 s 後得到

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s = \int_0^x F(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s \Rightarrow \phi(x) = \int_0^x F(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s\text{。}$$

($\Leftarrow$) 若 $y = \phi(x)$ 滿足 $\phi(x) = \int_0^x F(s,\phi(s))\,\mathrm{d}s$, 由微積分基本定理, 兩邊對 x 求導後得到

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = F(x,\phi(x))\text{。}$$

因爲我們將微分方程的存在性問題轉變爲積分方程的存在性, 以下證明積分方程解的存在性的方法稱爲 皮卡德迭代法 (Picard's iteration method): 考慮 $\phi_1(x) \equiv 0$, 以及 $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x F(s,\phi_n(s))\,\mathrm{d}s,$$

我們將依序證明以下事情:

(A) 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(x)$ 在 $[-h,h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

當 $n=1$, 函數 $\phi_1(x) \equiv 0$ 在 $[-h,h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

假設 $n=k$ 時, 函數 $\phi_k(x)$ 在 $[-h,h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

當 $n=k+1$ 時, 因爲 $F(x,y)$ 是連續函數, 所以 $F(x,\phi_n(x))$ 是對 x 而言的連續函數, 因此

$$\phi_{n+1}(x) = \int_0^x F(s,\phi_n(s))\,\mathrm{d}s,$$

在 $x \in [-h,h]$ 都有定義, 並且爲連續函數。

故由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 函數 $\phi_n(x)$ 在 $[-h,h]$ 上有定義, 並且爲連續函數。

(B) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 與 $x \in [-h,h]$, 都有 $|\phi_n(x)| \le b$。

當 $n=1$, 則 $|\phi_1(x)| \equiv 0 \le b$ 成立。

假設 $n=k$ 時條件成立, 即對所有 $x \in [-h,h]$ 都有 $|\phi_k(x)| \le b$。

當 $n=k+1$ 時,

$$\begin{aligned}|\phi_{k+1}(x)| &= \left|\int_0^x F(s,\phi_n(s))\,\mathrm{d}s\right| \le \left|\int_0^x |F(s,\phi_n(s))|\,\mathrm{d}s\right| \le \left|\int_0^x M_0\,\mathrm{d}s\right| \\ &= M_0|x| \le M_0 h < b。\end{aligned}$$

由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 與 $x \in [-h,h]$, 都有 $|\phi_n(x)| \le b$。

(C) 對所有 $n \in \mathbb{N}$ 有以下估計: $|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \le (M_1 h)^{n-1} M_0 h$。

當 $n=1$, 則

$$|\phi_2(x) - \phi_1(x)| = \left|\int_0^x F(s,0)\,\mathrm{d}s\right| \le \left|\int_0^x |F(s,0)|\,\mathrm{d}s\right| < M_0 h。$$

假設 $n=k$ 時條件成立, 即

$$|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| \le (M_1 h)^{k-1} M_0 h。$$

當 $n=k+1$ 時, 因爲

$$\begin{aligned}|\phi_{k+2}(x) - \phi_{k+1}(x)| &= \left|\int_0^x F(s,\phi_{k+1}(s)) - F(s,\phi_k(s))\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_0^x |F(s,\phi_{k+1}(s)) - F(s,\phi_k(s))|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le \left|\int_0^x M_1\,|\phi_{k+1}(s) - \phi_k(s)|\,\mathrm{d}s\right| \\ &\le M_1 (M_1 h)^{k-1} M_0 h |x| \le (M_1 h)^k M_0 h。\end{aligned}$$

由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對於 $n \in \mathbb{N}$ 不等式 $|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \le (M_1 h)^{n-1} M_0 h$ 成立。

(D) 對於 $x \in [-h, h]$, 函數列 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至連續函數 $\phi(x)$, 且 $|\phi(x)| \le b$。

我們將函數列 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 理解爲級數的型式, 則爲

$$\begin{aligned}\phi_n(x) &= \phi_1(x) + (\phi_2(x) - \phi_1(x)) + \cdots + (\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)) \\ &= (\phi_2(x) - \phi_1(x)) + \cdots + (\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)),\end{aligned}$$

因爲對所有 $k = 1, 2, \ldots, n$ 有 $|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)| \le (M_1 h)^{k-1} M_0 h$, 而

$$\sum_{k=1}^{n} (M_1 h)^{k-1} M_0 h$$

是公比爲 $M_1 h$ 的等比級數, 因爲 $|M_1 h| < 1$, 所以級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (M_1 h)^{k-1} M_0 h$ 收斂, 由魏爾斯特拉斯判別法 (Weierstrass M-test) 得知 $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 均勻收斂至某個函數 $\phi(x)$, 並且 $\phi(x)$ 是連續函數, 因爲 $\phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x)$ 且 $|\phi_n(x)| \le b$, 所以 $|\phi(x)| \le b$。

(E) 函數列 $\{F(x, \phi_n(x))\}_{n=0}^{\infty}$ 均勻收斂至 $F(x, \phi(x))$。

這是因爲

$$\begin{aligned}&|F(x, \phi_n(x)) - F(x, \phi(x))| \le M_1 |\phi_n(x) - \phi(x)| \\ \Rightarrow\ &\sup_{x\in I} |F(x, \phi_n(x)) - F(x, \phi(x))| \le \sup_{x\in I} M_1 |\phi_n(x) - \phi(x)| = M_1 \sup_{x\in I} |\phi_n(x) - \phi(x)| \\ \Rightarrow\ &0 \le \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |F(x, \phi_n(x)) - F(x, \phi(x))| \le \lim_{n\to\infty} M_1 \sup_{x\in I} |\phi_n(x) - \phi(x)| \\ &\qquad = M_1 \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |\phi_n(x) - \phi(x)| = 0。\end{aligned}$$

所以函數列 $\{F(x, \phi_n(x))\}_{n=0}^{\infty}$ 均勻收斂至 $F(x, \phi(x))$。

(F) 函數 $\phi(x)$ 爲初始值問題 (7) 的解。

我們將迭代式 $\phi_{n+1}(x) = \int_0^x F(s, \phi_n(s))\, \mathrm{d}s$ 兩邊取極限後得到

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^x F(s, \phi_n(s))\, \mathrm{d}s = \int_0^x \lim_{n\to\infty} F(s, \phi_n(s))\, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^x F\left(s, \lim_{n\to\infty} \phi_n(s)\right) \mathrm{d}s = \int_0^x F\left(s, \phi(s)\right) \mathrm{d}s,\end{aligned}$$

於是 $\phi(x)$ 爲初始值問題 (7) 的解。

(G) 證明初始值問題的唯一性。

假設 $y = \psi(x)$ 是另一個滿足初始值問題 (7) 的解, 考慮

$$\begin{aligned}|\psi(x) - \phi(x)| &= \left| \int_0^x F(s, \psi(s)) - F(s, \phi(s))\, \mathrm{d}s \right| \\ &\le \left| \int_0^x |F(s, \psi(s)) - F(s, \phi(s))|\, \mathrm{d}s \right| \\ &\le M_1 \left| \int_0^x |\psi(s) - \phi(s)|\, \mathrm{d}s \right|,\end{aligned}$$

令 $M = \max_{s\in[0,h]} |\psi(s)-\phi(s)|$ (或者是 $M = \max_{s\in[-h,0]} |\psi(s)-\phi(s)|$), 其中最大值發生於 x_0, 並考慮

$$M = |\psi(x_0)-\phi(x_0)| \le M_1 \left| \int_0^{x_0} |\psi(s)-\phi(s)| \, \mathrm{d}s \right| \le M_1 M |x_0| \le M_1 M h$$

如果 $M \neq 0$, 則得到 $M \le (M_1 h) M < M$ 矛盾, 所以 $M = 0$, 因此唯一性得證。

□

證明完 定理 **10** 之後, 注意到若是考慮一般初始條件的一階微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), y(x_0) = y_0$ 解的存在唯一性, 只要透過坐標變換 $X = x - x_0$ 與 $Y = y - y_0$, 就可以將原始的問題轉變爲 $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F(X + x_0, Y + y_0), Y(0) = 0$ 再利用 定理 **10** 討論即可。

2.7.3 一階微分方程解不唯一的例子

和前一個小單元對照, 現在要介紹一個帶有初始值條件的微分方程式, 而方程式的解不只一個。如此可讓各位了解定理的條件 $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ 必須連續之重要性。

例 **11** (第 53 頁)**.** 考慮初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0。 \tag{8}$$

很清楚地 $y(x) \equiv 0$ 即爲一個解。另一方面, 若先針對 $y(x) \neq 0$ 的那些點, 將方程式改寫成分離變數型微分方程式並求解:

$$y^{-\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{3}} \, \mathrm{d}y = \int 1 \, \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = x + C,$$

於是我們可以把解表示成函數的型式:

$$y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}(x + C) \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{其中 } C \in \mathbb{R}。$$

因爲函數 $y(x)$ 的表達式是連續函數, 所以可以連續地定義於 $y(0) = 0$, 解得 $C = 0$, 因此 $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$ 是另外兩個滿足微分方程 (8) 的解。

更一般地, 對任意正數 x_0, 定義函數

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } 0 \le x < x_0 \\ \pm \left(\frac{2}{3}(x - x_0)\right)^{\frac{3}{2}} & \text{若 } x \ge x_0, \end{cases}$$

則 $y(x)$ 皆滿足微分方程式 (8)。

最後我們檢視微分方程式 (8), 若要和微分方程式解的存在唯一性定理做比較, 那麼 $F(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$, 而 $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$ 在 $y = 0$ 無定義, 所以 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 $y = 0$ 附近不是連續函數, 定理的條件不成立。