微分方程講義第 1 章

授課教師　李國瑋

目錄

1

微分方程簡介

自從牛頓 (I. Newton, 1643–1727) 與萊布尼茲 (G. W. Leibniz, 1646–1716) 建立了微積分以來, 微分方程一直是伴隨出現的數學產物。從數學家在微分方程的貢獻來說, 牛頓大致上對於一階常微分方程有了系統性地了解, 而萊布尼茲則發展出分離變數型微分方程式的理論, 也知道如何將齊次方程式轉變成分離變數型微分方程式, 還對線性微分方程有了初步認識。

伯努力家族在發展微分方程的求解法與應用也有重要的貢獻, 雅各‧伯努力 (Jakob I. Bernoulli, 1654–1705) 與約翰‧伯努力 (Johann Bernoulli, 1667–1748) 對於懸鏈線問題 (Catenary Problem) 與最速降線問題 (Brachistochrone Problem) 給出完整的結果, 而丹尼爾‧伯努力 (Daniel Bernoulli, 1700–1782) 對於貝索函數 (Bessel function) 有了最前沿的貢獻, 並且影響了微偏分方程的發展。到了歐拉 (Leonhard Euler, 1707–1783) 更是將微分方程推進了一大步, 他探討正合方程式與積分因子法、常係數線性微分方程理論、利用冪級數處理微分方程, 也對數值解、偏微分方程、變分學給出貢獻; 而拉格朗日 (Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813) 則是給出 n-階線性微分方程的理論還有參數變動法的原理; 拉普拉斯 (Pierre-Simon, marquis de Laplace, 1749–1827) 發展出拉普拉斯變換理論以處理傳統求解無法解決的微分方程問題。

到了十九世紀, 隨著數學分析日趨成熟, 也就是當極限的精確定義還有實數的完備性都有了嚴謹的理論之後, 微分方程每個部分的理論也都逐漸完善, 甚至在微分方程初始值問題解的存在性、唯一性、正則性、對於解的連續依賴性等問題都有快速的發展。

前面幾段文字是將微分方程的歷史發展做一個簡要介紹, 至於講義的編排則是將這些數學內容再做系統性整合; 也就是說, 我們會由淺入深介紹每一類微分方程, 針對每一個主題, 就會將十九世紀成形的數學分析工具再搭配線性代數的基礎將該主題的理論完整建立。至於這一章的主要目的是想給予微分方程最初步的認識, 單元 1.1 會先宣告欲研究的數學式, 於是會定義清楚什麼是微分方程, 在此架構下就會分成常微分方程與偏微分方程兩大領域, 而各自又可再細分成方程式或方程組。此外, 還會再從方程式的形態再重新取名, 像是定義線性與非線性、方程式的階等概念。單元 1.2 則是要討論求解的意義, 比方說我們要做到什麼樣的地步才算是得到答案, 再來會提到微分方程解的個數問題, 由此引發初始值問題與邊界值問題的概念。最後會從微分方程的人工求解說明處理微分方程的前置作業, 並解釋人工求解的技巧與課程的關係。單元 1.3 則是介紹幾個在物理或數學上經典而且十分有趣的問題, 這些問題可以透過設立微分方程然後求解的過程得到結果。至於問題的答案有些會在後面的章節介紹, 各位也可以透過網路搜尋的方式得到相關的討論。

1.1 微分方程的類型

對於一個系統, 我們會在該系統中觀察並且用一些符號註記系統中的某些概念, 但是這些符號中常常彼此之間是互相受到牽制的, 這時, 我們會用方程式設法描述這樣的限制。在中學數學階段, 主要是針對一元一次方程式、一元二次方程式、二元一次聯立方程式...... 等進行探討, 而這裡想要研究的方程式類型是微分方程式。以下先給出微分方程式的意思。

定義 **1** (第 16 頁)**.** 所謂 *常微分方程式* (ordinary differential equation, 簡記爲 ODE) 是由變數 x、未知函數 $y = y(x)$ 並帶有未知函數的導函數或高階導函數 $y^{(n)} = y^{(n)}(x), n \in \mathbb{N}$ 組合成一個等式關係。常微分方程式形式化的寫法如下:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1}$$

其中 $x \in I \subset \mathbb{R}$, 而 I 是一個區間。

微分方程式隨著微積分的發展下一直是伴隨的產物, 在數學日趨成熟下演變成兩門獨立的學科, 而微分方程式也被視爲微積分中一個重要而又直接的延續理論。

在仔細介紹微分方程式之前, 我們需要給出以下幾組術語以描述方程式的類型。

- 方程式 (1) 中未知函數 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 的最高求導次數 n 稱爲方程式的 *階* (order)。所以一階微分方程式型如 $F(x, y, y') = 0$, 而二階微分方程式型如 $F(x, y, y', y'') = 0$。

- 將未知函數 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 都視爲變數時, 若函數 F 對於 $y, y', \ldots, y^{(n)}$ 而言是線性函數, 則稱方程式 (1) 是 *線性微分方程式* (linear differential equation); 若函數 F 對於這些變數來說不是線性函數, 則稱方程式 (1) 是 *非線性微分方程式* (nonlinear differential equation) 。

除了上述兩種類型之外, 我們還會研究不同於方程式 (1) 的微分方程式, 例如:

- 當未知函數的種類超過一種時, 例如未知函數有 $x(t)$ 與 $y(t)$ 及其高階導函數, 這時候探討微分方程時需要不止一個方程式才能進行分析, 將這些方程式聯立起來稱爲 *微分方程組* (system of differential equations)。

- 若是研究多變數的未知函數例如 $u(x, y)$ 與其偏導函數 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 甚至更高階的偏導函數之間帶有等式關係的數學式, 我們稱之爲 *偏微分方程式* (partial differential equation, 簡記爲 PDE)。

除了上面的幾個基本分類外, 有些微分方程式具有特別的結構像是齊次 (homogeneous)、正則 (regular)...... 等, 這部分較爲細節的定義留到未來探討相關的微分方程式時再仔細介紹。

了解微分方程式的類型用意在於通常一個類型的方程式會對應到一套處理方程式的手法, 不論是方程式的求解, 或是方程式的定性與定量分析, 甚至是數學理論上經常會問有關方程式解的存在性、唯一性、正則性、連續解的依賴性...... 等都會與微分方程式的類型有關。有關這份講義的編排, 我們會先從一階常微分方程式開始討論, 之後會談論二階常微分方程式, 到了後期會面對如何處理微分方程組的問題。至於偏微分方程式是更進階的數學, 至今它已獨立成爲一門學科專門研究它, 因此這裡並不會對偏微分方程式的理論進行著墨。也因爲這個緣故, 到下一單元之後的討論會把常微分方程式簡記爲「微分方程式」或是「微分方程」。

例 **2.** 試說明以下微分方程的類型, 包括: 階數、線性或非線性、常微分或偏微分、方程式或方程組。

(A) $y' + 3y = 0$。

(B) $y'' + 3yy' = 3x$。

(C) $y^{(4)} + 5x^2 y = \mathrm{e}^x + \sin x$。

(D) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t)。\end{cases}$

(E) $\Delta u \xlongequal{\text{定義}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 其中 $u = u(x, y)$。

解.

(A) $y' + 3y = 0$ 是一階線性常微分方程式。

(B) $y'' + 3yy' = 3x$ 是二階非線性常微分方程式。

(C) $y^{(4)} + 5x^2 y = \mathrm{e}^x + \sin x$ 是四階線性常微分方程式。

(D) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) \end{cases}$ 是一階線性常微分方程組。

(E) $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 是二階線性偏微分方程式。

例 **3.** 以下敘述中提到的式子是否爲常微分方程式? 如果不是的話, 它又該怎麼稱呼?

(A) 欲求所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得 $3x + 2y = 5$。

(B) 想找到在 $\mathbb{R}$ 上的連續函數 $f(x)$ 使得對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 都滿足 $f(x + y) = f(x)f(y)$。

(C) 給定 $F(x, t)$, 欲求 $\phi(x)$ 使得 $\phi(x) = \int_0^x F(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s$。

(D) 試求函數 $f(x)$ 使得 $f'(x) \leq (f(x))^2$。

解. 這些式子中, (A) (B) (C) 都不帶有未知函數的導函數或高階導函數, 而 (D) 並非方程式, 所以它們都不是常微分方程式。

(A) $3x + 2y = 5$ 稱爲二元一次方程式。

(B) $f(x + y) = f(x)f(y)$ 稱爲函數方程式。

(C) $\phi(x) = \int_0^x F(s, \phi(s))\,\mathrm{d}s$ 稱爲積分方程式。

(D) $f'(x) \leq (f(x))^2$ 稱爲微分不等式。

1.2 初始值問題與邊界值問題

給定一個微分方程式 $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, 其中 $x \in I$, 因爲 $y(x)$ 現階段來說是未知的函數 (unknown function), 我們想要知道這個微分方程式的答案, 也就是說, 到底是哪一個確切的函數滿足方程式, 這時就引出解的概念。

定義 **1** (第 19 頁)**.** 若函數 $y = y(x)$ 滿足 n-階常微分方程式 $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, 其中 $x \in I$, 則稱 $y = y(x)$ 是這個常微分方程式的 解 (solution)。

上述解的形式 $y = y(x)$ 意指我們可以明確寫出 y 對於 x 的函數 (function) 關係。各位到時候在正式探討微分方程時, 便會發現到在求解的過程中, 有的時候我們不太能夠真的把 $y = y(x)$ 的函數關係確實表達, 只能退而求其次得到一個 x 和 y 之間的方程式 $G(x, y) = 0$。只要這個關係式 $G(x, y) = 0$ 不帶有任何 y 對於 x 的導函數與高階函導數, 而且透過隱函數微分法 (implicit function differentiation method) 將它理解爲 $G(x, y(x)) = 0$ 之下計算 $y(x)$ 的各階導函數後滿足微分方程 $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, 我們也說 $G(x, y) = 0$ 是微分方程式的解。換句話說, 未來在進行微分方程的求解時, 我們只要能夠找到像是 $G(x, y) = 0$ 這樣的關係式即爲所求, 不需要再特地花時間將 $G(x, y) = 0$ 強制寫成 $y = y(x)$ 的形式。

一個微分方程的解到底有多少個有時候我們必須澄清, 有可能無解, 可能只有一個解, 也可能有無限多解。比方說微積分課程中尋找一個函數的不定積分這件事我們可以將它視爲一個微分方程的問題, 這是因爲給定 $f(x)$, 不定積分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是將所有可微分函數 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$ 都收集起來, 注意到不定積分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 是一個集合。另一方面, 由微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus) 知道: 若 $f(x)$ 在區間 I 上連續, 則 $f(x)$ 的反導函數 (anti-derivative) 存在; 也就是說, 存在一個在區間 I 上的可微分函數 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$, 所以微分方程式 $F'(x) = f(x)$ 有解。此外, 若兩個在區間 I 上的可微分函數 $G(x)$ 與 $H(x)$ 滿足 $G'(x) = H'(x)$, 則 $G(x) = H(x) + C$, 其中 $C \in \mathbb{R}$, 所以我們知道: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, 其中 $C \in \mathbb{R}$; 也就是說, 微分方程 $F'(x) = f(x)$ 的解有無限多個。

由上面的例子可以看到: 一個微分方程的解不只一個, 這時, 若我們把微分方程式再加上一些條件的話, 那就會減少解的個數。在微分方程的領域中, 通常會問以下兩類問題:

- *初始值問題* (initial value problem): 考慮微分方程式 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 再搭配一個點 $x_0 \in I$ 的資訊, 例如 $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$。

- *邊界值問題* (boundary value problem): 考慮微分方程式 $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ 再搭配區間 $I = (a, b)$ 的邊界 $x = a$ 與 $x = b$ 的資訊, 例如 $y(a) = y_a, y(b) = y_b$。

由於多加了一些條件會降低微分方程式解的自由度, 於是我們就可以問微分方程式初始值問題解的存在性與唯一性, 或是微分方程式邊界值問題解的存在性與唯一性...... 等數學問題。若一個微分方程式的解存在且唯一, 這對數學家來說是感到興奮的, 因爲這個方程式與函數有一個對應關係, 也意味著微分方程是這個函數的獨特性質。

上面有關初始值問題與邊界值問題只是一個概略的介紹, 整個理論其實是非常複雜的, 往後的章節會用許多實際的例子跟各位詳細說明。

至於我們想要研究什麼樣的微分方程, 在數學上當然可以隨意寫下一個式子然後問這個微分方程式有沒有答案, 只是這樣的微分方程似乎沒有太多的數學意義。然而這樣的微分方程會在課程中時常出現, 因爲它們存在的用意是希望各位熟悉解方程時的技術性操作。另一方面, 若要讓微分方程式變得更有意義, 我們會從大自然中去尋找題材, 就像古代天文學家與物理學家觀察自然界萬物變化下發現一些通則然後寫成微分方程, 而微分方程的解就會和我們看到的自然現象互相呼應, 這樣的過程我們稱爲數學模型, 透過數學解看看有沒有辦法推測過去、解釋現狀、預測未來, 如果效果不錯, 那它就是一個好的模型, 如果不理想, 那就要再重新修正微分方程, 建立更好的模型。

當我們設定好想要研究的微分方程式, 甚至指定了初始值問題或是邊界值問題, 下一個核心目標是想要知道解的長相。在還沒有真正學微分方程的理論之前, 其實我們就可以對微分方程進行一些觀察, 這些觀察是基於你對微積分的認識, 比方說一階導數意謂著函數圖形的切線斜率, 二階導數反應函數圖形的凹口, 透過各階導數的符號得到函數圖形遞增、遞減、凹口朝上或朝下進而了解函數的輪廓。而微分方程式有時也有結構性, 比方說對稱性原理或是平移伸縮理論都可以告知微分方程的解有一些特別的性質。上述所提的觀察是有數學魂的人所具備的能力, 若你也想要具有數學魂的話那就要在這方面多下一點工夫。

因爲微分方程的發展歷史久遠, 前人已經做過各式各樣的嘗試得到各種心得與結果, 而微分方程的課程目標是試圖將這些結果整理歸納並且有系統地交代給各位, 省去大家披荊斬棘的辛苦過程。所以在微分方程的課程中會花上一部分的時間告訴各位如何人工求解, 這裡的人工求解指的是我們可以用一些數學技巧將微分方程的解用 $y = y(x)$ 或是 $G(x, y) = 0$ 的方式清楚地表達。回想各位在中學的時候學到一元二次方程式公式解的由來, 是透過配方法的原理然後將方程式變形再用代數的運算得到結果。同理, 給定某些特定類型的微分方程, 到時候也會學到一些技巧設法把求導的運算消除以得到方程式的解。所以講義的編排會先從一階微分方程式談論起, 這當中又會再細分爲分離變數型、齊次、線性、正合方程式逐一討論如何求解; 進到二階微分方程時, 會從二階常係數線性微分方程開始研究, 這時還會再把方程式分解成齊次式與非齊次式討論, 之後再進階到處理係數不是常數的情況。至於微分方程式在不帶未知函數的項在區間上不連續的話, 可以利用拉普拉斯變換得到解決。以上大致就是微分方程在人工求解的部分會學到的內容。

這裡我們再回到不定積分的理論觀察另一件事, 前面已經說明了一個函數的不定積分可視爲處理一個微分方程的問題, 這裡注意到: 因爲積分技巧的受限, 有太多函數的積分是「積不出來」的; 也就是說, 雖然連續函數 $f(x)$ 的反導函數 $F(x)$ 存在, 但是有許多的情形 $F(x)$ 無法表示成初等函數 (elementary function) — 常數函數、三角函數、反三角函數、指數、對數、冪函數的有次項四則運算與合成 — 的形式。比方說 $\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ 就是一個非常經典的例子, 滿足 $F'(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ 這個微分方程的解集合是 $\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$, 但這樣的表示無助於我們對於 $F(x)$ 有進一步地認識。換言之, 存在一大類微分方程的問題在人工求解後得不到更多對於解的資訊, 或者是根本無法進行人工求解, 這時又該怎麼辦呢? 目前已發展出的方法整理如下: 藉助電腦進行數值計算、利用數學軟體畫出方向場或解曲線、從級數解認識微分方程的解, 又如拿兩種模型出來, 從微分方程的差異得到解的差異, 這是後期在處理微分方程時的一個重要技巧。

數學系微分方程的課主要會從人工求解的方式去體會數學, 這是我們向來學習數學的一種模式, 而且人工求解的數學內容已經非常豐富了。至於用電腦求微分方程的數值解或認識向量場、解曲線的部分, 會在系上的數值分析課或是數學軟體的課介紹。

1.3 有趣的微分方程問題

猶記二十年前, 我在讀碩士的時候參與了台大數學系張海潮教授的一個計畫, 計畫名稱是「彩虹專案(微積分經典範例)」, 我們花了近一年的時間把坊間與微積分相關的書籍都拿出來, 找尋有趣的數學問題並整理。我們總共收錄了 51 個問題並放置在網站 `http://www.math.ntu.edu.tw/calculus/`, 希望各位從這些問題中體會微積分的奧義。

這些問題當中有一部分是微分方程的問題, 我把問題列在這個地方, 若各位很想要知道這些問題的結果, 可以直接到網站看相關的介紹, 我相信各位是看可以看得懂的。又或者是先把這些問題先記在心底, 當做學習微分方程的一個動機, 在學完微分方程的課程後, 看看能不能針對這些問題給出答案, 然後與網頁上的說明相對照。

問題 (懸鏈線)**.** 電線在兩電線桿之間懸垂成一曲線, 數學上要如何刻畫這個線條呢?

問題 (最速下降曲線)**.** 平面上有 A, B 兩點, 其中 A 點在左上 B 點在右下, 設計一個通過 A 與 B 的無摩擦 (只受重力影響) 溜滑梯, 而圓球從 A 滾至 B 所需的時間最短。

問題 (喝咖啡問題)**.** 某個人喜歡喝到比較熱的咖啡, 今天他買了一杯咖啡後想要過十分鐘再喝, 你覺得他要在買的當下就先加奶精, 還是要喝的時候再加奶精比較好? (假設溫度關係爲: 奶精 $<$ 室溫 $<$ 咖啡。)

問題 (狗追兎子問題)**.** 在坐標平面上, 兎子由 $(0, 0)$ 出發, 以等速 q 沿著 x 軸向右逃跑, 狗由 $(0, a)$ 出發, 其中 $a > 0$, 狗跑的時候始終朝著兎子前進, 並且以等速 p 追兎子, 請問狗何時可以追上兎子?

問題 (拖重物問題)**.** 有個人起初位於坐標原點, 其正北方 a 單位處有個重物, 今用一繩綁住重物並往 x 軸正向移動。試求重物被拖行的軌跡?

問題 (斜駛線)**.** 在球面上找到曲線使得它與經線夾角使終固定。

問題 (四隻蒼蠅飛行問題)**.** 有四隻蒼蠅 A, B, C, D 分別位於坐標平面上 $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ 與 $(1, -1)$ 的位置, 之後牠們一起以每秒 1 單位的速度移動, 移動方式爲: A 蒼蠅一直向著 B 蒼蠅靠近, B 蒼蠅一直向著 C 蒼蠅靠近, C 蒼蠅一直向著 D 蒼蠅靠近, D 蒼蠅一直向著 A 蒼蠅靠近。試問:

- 四隻蒼蠅會在何處相遇?
- 牠們多久會相遇?
- 找出 A 蒼蠅的行經軌跡。
- 計算 A 蒼蠅從開始到相遇的路徑長。
- 蒼蠅 A 會有什麼樣的生理反應?

問題 (除雪機問題)**.** 某日天空穩定地下著雪, 一部除雪機於中午開始除雪, 觀察到除雪機在第一個小時和第二個小時內分別除了一哩及兩哩的雪, 請問雪什麼時候開始下?