微分方程講義第 0 章

授課教師　李國瑋

目錄

0

如何學習數學系微分方程

每一年的學期末我都會問一些修過微分方程的學生課後感想, 特別想了解他們在這門課中學到了什麼? 我得到各式各樣的答案, 在這些回答中, 多數學生覺得微分方程學得很有心得, 因爲他們感受到微分方程是微積分最直接的應用, 而且課程架構很清楚, 原因是每一類的方程都有對應的解題技巧, 這種感覺就像回到高中學數學的氛圍 (最後這句話或許是突然想到被大一線性代數的抽象思維荼毒的慘狀下有感而發)。

微分方程這門課確實在同年級高等微積分課與代數課的襯托下讓多數學生覺得有好感, 而成就感這件事也的確是喜歡一個學科的因素之一, 回想各位在高中時風光又帶有驕傲的神情, 那些大家都解不出來的題目結果你一看完之後秒殺又可以解釋得頭頭是道, 心中幻想著這鼓氣勢可以一直延續到大學再次大顯身手, 二話不說就選填了數學系當作第一志願, 沒想到進了數學系之後, 系上的必修課程不論是難度或廣度都遽增, 在大一時銳氣就少了一大半, 到了大二就幾乎崩盤, 唯獨微分方程稍稍彌補了受創已久的心靈。

就即將要學習微分方程的大二同學來說, 或許在聽完學長姊描述的微分方程後就覺得很放心, 至少從他們口中得知微分方程是比較平易近人的一門學科。然而, 當我們重頭回想學長姊對於微分方程的看法時, 不難發現到那些言論當中可能夾帶一些情緒化的言詞, 而從數學面看課程的部分少之又少, 例如第一段文字中, 似乎只有「結構清楚」或是「每一個類型都有對應的解法」這樣粗略地認識而已。

這裡先回應觀感的部分, 日後若你看到別人對於一門課有什麼情緒上的抒發時, 想一想這些話是基於哪一個面向才有的結論。這裡我並不討論像是老師在課程中如何設定各種措施造成你對這門課的觀感問題, 而我想要和各位談論的是數學本身 (微分方程的數學內容) 帶給你的實質感受。這裡我拿高等微積分做比喻, 之前總是聽到學長姊說高等微積分很難, 又或者是「高微三修不稀奇」之類的話, 當我開設了高等微積分課之後, 我花了很多時間試圖破除這些迷思, 於是我寫了高等微積分講義第 0 章, 針對觀感的部分我用前面幾個單元說明一些看法, 但後來我發現更重要的應該是要多介紹高等微積分的特色, 這樣才會讓學習者更有感, 於是文章的後半段我就從數學的面向看課程。同理, 因爲這學期開設微分方程這門課, 所以我也決定寫第 0 章, 目的是想和大家說明從教師的觀點是怎麼看微分方程這門課。因此, 在接下來的鋪陳我想要從結構面跟大家解釋微分方程是什麼樣的一門課, 這裡的結構面包含: 單元 0.1 是在說明微分方程在數學系課程中的定位, 單元 0.2 是比較數學系微分方程與外系工程數學之間的異同, 另外也解釋教科書與自編教材的事情。單元 0.3 則是給出幾個學習微分方程的建議。從這些層面切入我想各位能更快掌握微分方程這門課的精神。

0.1 數學系微分方程

微分方程 (Differential Equations) 這門課在數學系課架中是二年級的課程, 其中微分方程 (一) 是系必修, 而微分方程 (二) 是數學組選修。微分方程設定爲二年級的課程原因是這門課需要用到大量的微積分 (Calculus) 還有線性代數 (Linear Algebra) 的知識, 有一些大定理像是隱函數定理 (Implicit Function Theorem) 還有函數列以及函數項級數均勻收斂 (uniformly convergent) 的相關性質也會用到, 它們會在二年級高等微積分課才會討論, 這些比較深刻的高等數學內容在微分方程的課程中就先接受它然後直接使用, 至於證明的部分就留在高等微積分課程補充。

微分方程需要用到微積分是所有人都能接受的事。其實各位在微積分課程中就處理過微分方程, 比方說一個函數的不定積分其實就算是一個處理微分方程的問題, 因爲 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 的意思就是想要找到所有的可微分函數 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$, 而它就是一個最單純的微分方程式。簡單說來, 微分方程是一個方程式裡帶有未知函數的導函數, 而我們的目標是想要知道這個函數是什麼以及這個函數的性質。當然, 微分方程絕對不是純粹的積分理論而已, 一般寫下的微分方程式可能非常複雜, 所以才會發展出一套理論以求解或分析一些現象, 並探索當中的數學結構。

各位在微積分課程中不僅學了求導法則還有積分技巧, 也學了各式各樣由極限概念延伸出來的產物, 像是函數的遞增遞減與凹口分析、函數的漸進行爲、瑕積分的收斂發散、無窮級數的收斂或發散、向量場的認識...... 等, 這些觀念也都會在微分方程中派上用場。整體來說, 凡是在微積分課程中學到的內容, 都有可能拿來回答或是解釋微分方程中遇到的問題。

至於微分方程與線性代數息息相關, 這是多數人在學習 (或學完) 微分方程之後不清楚或是不被重視的部分。比方說一個微分方程若用微分形式 (differential form) 表達時, 它的數學意義就需要用線性代數的觀點去解釋; 線性微分方程的解空間和向量空間的關係也必須從線性代數理論去認識; 函數空間中如何判定兩個函數是獨立或是相依, 其想法也是源於線性代數的基礎理論; 參數變動法 (The Method of Variation of Parameters) 的思維也有線性代數的影子在裡面; 微分方程的求解有時候可以將微分算子視爲一個線性變換, 然後透過找特徵值與特徵向量的方式找到方程式的解; 線性微分方程組的求解需要用到矩陣對角化的理論去處理; 又如 e^A, 其中 A 是一個矩陣, 這個符號的意義也要將線性代數與微積分兩者結合才能講清楚。

我一口氣講了這麼多數學內容無非是希望讓大家意識到微分方程和線性代數有非常緊密的關係, 但問題就在於: 爲什麼多數人無法體會到微分方程和線性代數的關聯性很大? 這裡我提供幾個可能的原因: 第一, 多數人對於線性代數這門課的感受不深。這有點像是你在學化學元素的那種感覺, 學了 O_2 或 H_2O 的很多化學符號與性質, 但是這些內容和你用鼻子吸到的氧氣或是嘴巴喝到的水總是有一層隔閡, 所以要花更多心思才能領悟到兩者的關聯。第二, 很多同學在學微分方程時只在乎找到答案, 很少去體會得到答案的過程, 或是思考爲什麼要做那些特別的假設, 若能將這些推理過程都釐清的話, 就會發現到這當中涉及很多線性代數的理論。第三, 我們下意識就會把分析和代數分開, 直覺就認定微分方程是在研究函數的變化或趨勢, 線性代數不可能會派上用場, 但實際上當我們要研究微分方程的結構面或是探討操作面的問題時, 那麼就會透過代數或線性代數的語言去描述它。

這一單元是試圖從課程架構的角度出發, 可看到微分方程是奠基在微積分還有線性代數的基礎上的一個學科, 至今已經發展得相當成熟, 所以才會將微分方程分門別類並經過整理與歸納以便初學者有系統地學習。

0.2 數學系微分方程與外系工程數學的比較

若各位有興趣研究理工科系開設的課程, 就會發現到這些科系在大二都會開設工程數學 (Engineering Mathematics)。工程數學到底是什麼樣的課呢? 從課名直譯就是學習工程上經常會用到的數學, 以便未來能順利了解專業課程。

至於工程數學包括哪些內容呢? 它涵蓋的層面很廣, 像是微分方程、複變函數論、偏微分方程、線性代數、離散數學、機率論, 或是更進階的泛函分析、傅立葉分析...... 等內容。雖然每個系都有工程數學, 但實際的課程內容會根據該科系的屬性進行調整。我之前在台灣大學開設理、工科系的微積分時, 也藉機逐一了解各系的工程數學, 發現到機械系的工程數學比較強調線性代數, 化工系或材料系的工程數學比較著重在微分方程, 至於大氣科學的工程數學會多介紹數學模型的建構或是動態系統理論, 化學系的工程數學則是會提到代數 (群論) 以研究晶體的結構, 至於台大電機系有如半個數學系, 那些常見的工程數學內容 (線性代數、微分方程、複變函數論、機率論) 都會開成一學期的課。相較之下, 數學系則是將這些內容用更長的時間 (一學期或一學年) 加以介紹。

爲什麼會突然提到外系的工程數學? 因爲這裡想從數學系的課程和外系的數學課進行比較, 從兩者的差異讓各位思考未來如何面對數學系的課程。從上一段的說明就會發現到數學系與外系的課程中最明顯的差異是在於講授數學內容的時間, 由於時間的受限, 外系在講授工程數學時會有一些目的性, 比方說課程內容必須精簡、濃縮到只講最重要而且是需要的內容, 對於某些特定的部份, 可能還會提一些解題技巧甚至是設計一套口訣讓學生快速學會而且使用正確, 所以有些外系的工程數學就有點像是「數學速成班」的感覺。至於數學系的課程特色是: 因爲時間充裕, 所以除了一般題目解說之外, 還會深入探討這門課的理論, 有時候還會用新的工具或觀點重新看待數學。就我看到的數學系課程, 很少會去用口訣或是話術傳授數學, 而是會盡可能地從數學的本質去詮釋它。

理工科系的學生在學工程數學的時候, 因爲清楚知道這門課的目的是在往後學習專業課程時可以更加順利, 所以學生在修完外系工程數學之後的不久就看到數學的應用, 普遍來說會覺得數學很有用。另一方面, 數學系的學生在修每一門系上的課程時, 因爲課程中有所謂的理論面必須釐清, 這時學生在學習的時候會因爲理論過於抽象或複雜而感到困難與受挫, 所以沒辦法把理論弄得透徹; 此外, 由於數學的應用層面太廣, 所以數學系的課反而很少提到數學的應用, 反正就預設學生在未來的某一天會發掘到它的用處, 導致數學系的學生在學習數學的階段容易產生「數學無用論」的錯覺, 學生因此兩敗俱傷。所以外系與數學系的學生在學習數學的時候也有很大的差異。

至於教科書的部份, 數學系和外系有可能是一樣的書, 但這不代表數學系和外系在介紹微分方程的時候就會一模一樣。到是這裡我想分享一個小故事, 在彰師大數學系的微分方程課來說, 向來都是用 Boyce 與 DiPrima 所著的 Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems 的書爲教材, 我回想我大二的微分方程教科書也是 Boyce 所著且書名一樣, 但兩者版本不同。當我在備課時發現到: 舊版的書在介紹理論時會一併附上數學證明, 但新版的書把很多證明都刪掉了。據聞, Boyce 想把書推銷給非數學系的人使用, 於是找了學工程的人幫忙合著, 添加了很多電腦與數值的內容然後刪除一些數學的證明。這件事反而讓我覺得新版的書並不適合當數學系的教科書, 因爲我認爲數學系微分方程的課應該要有數學系的樣子, 若與其它科系無異, 那不如就去修外系的課。而教科書這件事該怎麼處理呢? 最終的答案是: 我就自己編寫講義吧! 我會把我認爲數學系應該要學到微分方程的相關內容都寫進教材裡, 而且用自己的講義教學也無違和感。

0.3 如何學習數學系微分方程

不曉得各位有沒有注意到: 這一章還有這個單元的標題寫的是「如何學習數學系微分方程」, 而不是「如何學習微分方程」或是「數學系的學生如何學習微分方程」? 若有看懂前面的內容或許可以知道這些標題的差異, 並且能猜到接下來想要說的事。微分方程的理論至今已經發展得相當成熟, 也成爲大學理工科系必須修習的科目, 而各系有自身的考量所以會對內容進行取捨, 課堂上會給出不同的詮釋微分方程的方法, 於是數學系微分方程也有別於其它科系的微分方程。

那到底要如何學數學系微分方程呢? 以下想用三個小單元繼續闡述。

0.3.1 將學習的目標放得更長遠

一個初步認識微分方程的方法就是把書本拿出來, 將目錄瀏覽過一遍, 此時此刻的你當然不太清楚課程的實質內容, 甚至可能被標題誤導, 但這都不打緊, 我認爲做這件事總是一個很好的開始。一個課程的規劃通常都是由簡入深的方式鋪陳, 微分方程也不例外, 所以在介紹完微分方程的定義還有幾個重要的名詞定義後, 就會從一階、二階、高階微分方程逐一討論, 然後也會從微分方程式進階到微分方程組, 當中也會用一些別的工具重新認識微分方程, 像是級數解與拉普拉斯變換 (結合瑕積分理論將方程式變形與還原), 最後還有一些特殊單元。

正因爲微分方程教科書每個單元的標題大致上很有條理, 所以在學微分方程的時候很容易就會進入「一個類型的方程有一個特殊的解法」這個套路當中。它的確是微分方程的一大特色, 你可以很快就分辨清楚每一個微分方程的屬性, 但是如果你的學習過程中一直停留在這個層次的話, 在學完一個學期或是一年的課程後, 這件事就變成你對於微分方程的唯一記憶, 最終還是不知道微分方程在學什麼。假設各位對於這門課的企圖心不只是在拿到學分, 而是想要多知道這門課的具體內容的話, 在學習的時候就要經常注意避免掉入「純粹解題」這樣的模式。

回想你從小到大在學習數學的時候是不是一直在純粹解題這樣的無窮迴圈中跳不出來? 若是有這種感受的話, 那有沒有想要把這件事情進行改變? 這種台灣數學教育的怪異現象, 我認爲最根本的原因是學習者在學一個東西的時候目標過於短淺, 只想著學這些東西的目的是考試考高分, 在這個層面下, 學習狀態自然就會演變成純粹解題的學習模式。若你開始思索求學的意義時, 就會意識到考試導向的學習完全扼殺了學問的價值, 所以唯有把這件事情想通, 追求學問這件事才能得到救贖。

那麼要怎麼樣改變這件事情? 當然就是要把眼光放得長遠, 從學習的真正本質出發, 體會這個學科中粹取出來的數學精華, 思考爲什麼微分方程可以用來解釋自然界的很多大小事, 甚至是從美學的角度看數學也是另一種視角。簡單說來, 忘掉分數與考試你就成功一半了。

教學的時候會用例題還有作業的方式呈現, 這只是一個帶有框架的模式, 寫完習題算出答案後可以再對自己提問各種問題。例如就技術面來說, 這個方程式的解是否符合一些基本現象 (它可以幫助你檢視算出來的答案是否合理)? 例題或作業當中任兩個題目之間的差異在哪? 爲什麼這一題要用這個方法, 難道不能用另一個方法嗎? 不能使用的原因又在哪? 如果兩個都可以使用的話, 哪一個方法比較好? 就數學面而言, 也可以問類似的問題: 這一類方程式和另一類方程式的異同在哪? 兩類方程式是完全不同還是彼此有關聯? 高階微分方程和一階微分方程組有關係嗎? 學習拉普拉斯變換的用意是什麼? 有什麼是古典求解法不能回答的問題嗎?

總之, 多提問並自我尋求答案有助於對一門學科的全面認識。

0.3.2 微分方程與微積分、線性代數、高等微積分還有其它的理論結合

相信各位在看過前面的單元後, 可以了解微分方程與微積分、線性代數還有高等微積分有密切的關係, 而我認爲各位在修完數學系微分方程後, 除了微分方程自身的內容外, 也必須把許多領域之間的關聯性也都學到, 如此才有別於其它科系在學數學時僅止於解題的層面, 而是可以更加內化數學的本質。更進一步地, 在修完數學系的所有課之後, 最理想的情況是要清楚描述每個科目的特色與重要性, 還有不同科目之間的關係。

要如何將不同學科之間的學問進行整合呢? 透過自我提問並回答的方式、思考不同學科之間的相關性是一個很好的方法, 以下將拋磚引玉列出一些微分方程學到的內容, 然後再去追問它和微積分、線性代數還有高等微積分的關係。這些問題的答案, 絕大部分可以在微分方程的講義中找到, 所以各位在學習的時候可以經常把這一頁的問題列表拿出來看, 然後想想自己能不能回答這些問題。另一方面, 現在的你也可以思考這些問題的特色, 日後就可以自己提問各種問題。

(A) 函數 $y = y(x)$ 或 $z = z(x, y)$ 的微分 (differential) 是什麼? 如何用線性代數的語言解釋?

(B) 分析並比較不同類型的一階微分方程, 每一類微分方程的解法還可以做什麼樣的推廣?

(C) 一階線性微分方程初始值問題解的存在、唯一性的證明與函數項級數收斂理論之間的關係爲何?

(D) 用朗斯基 (Wronksian) 判斷函數是線性獨立或相依與線性代數的關聯以及它的單向邏輯爲何?

(E) 二階常係數線性微分方程式的分類, 當特徵方程式的解是共軛複根時如何對應到三角函數的解?

(F) 未定係數法中猜測特解的原理是什麼? 多項式、指數函數、三角函數在代數結構上的特色爲何?

(G) 如何從線性代數的角度去認識參數變動法 (The Method of Variation of Parameters)?

(H) 柯西-歐拉方程式與二階常係數微分方程式兩者的解有何關係? 如何用微分算子的理論說明?

(I) 拉普拉斯變換的特色, 包括變換的原理與重要性是什麼?

(J) 拉普拉斯變換表格當中每個變換式之間的關聯爲何? 如何用極限或平移伸縮理論了解它?

如果你未來想要走統計或資訊領域的話, 你看到數學系微分方程可能就是這種面貌, 若你會想要多修一些數學的專業課或是開始往數學研究路線前進的話, 可以再多看到一些微分方程的特色, 例如從微分方程爲基底, 下一個數學理論的延伸是偏微分方程, 在大學的課程中, 偏微分方程 (或是有些人稱它爲數學物理方程) 是探討多變數函數的微分方程, 一開始也是會將偏微分方程進行分類並求解, 到了研究所階段, 偏微分方程主要是在討論數學基礎理論, 像是解的存在性、唯一性、正則性......等, 而這些理論經常需要藉助常微分方程的幫忙才得以解決。此外, 微分方程也會延續到微分幾何的領域, 簡單說來, 現階段的微分方程就是觀察定義在一個區間上的函數, 而微分幾何想要研究的物件不再限定是那麼單純的區間, 而是一條曲線或是更複雜的幾何形體, 在微分幾何課程裡需要花一點時間把幾何物件先進行一番討論, 然後就可以把微分方程用在微分幾何的領域上, 成爲幾何分析 (geometric analysis) 的最初步開端。

0.3.3 微分方程的應用

在討論微分方程的應用之前, 我想先和大家討論有關「應用」二字。有關數學的應用, 其實有很多議題可以討論, 比方說每隔一段時間就會看到有人會提倡「數學無用論」的言論, 然後身爲數學系的一份子就必須捍衛數學的價值。可惜的是, 雖然唸數學的人都有一種邏輯思路比別人清楚的感覺, 但是要跟別人爭吵數學是否有用的時候常常都招架不住。

以雞兎同籠爲例, 相信不少人看到這個問題的時候一定會對此強烈批判, 他們提出的質問如下: 爲什麼我們要把雞和兎放在一個籠子裡? 動物的總數還有腳的總數會比各別計算雞還有兎子的數量容易嗎? 如果沒有的話爲什麼要把問題複雜化呢? 這些問題真的是正中紅心, 我認爲雞兎同籠的確是一個很愚蠢的「應用問題」, 放眼望去數學中真的充斥著很多莫名其妙的題目, 只是把問題套上幾個生活上會講到的字句, 然後就說這是「應用問題」, 這也難怪很多人對數學產生排斥, 然後推論出數學只是不斷殺死腦細胞的無聊東西, 一點實質的用處也沒有。針對上述的問題, 對你來說又要如何辨駁呢?

我對這個問題的看法有二: 雞兎同籠是一個很不好的應用問題, 原因在於題目出得不好, 而不是解二元一次聯立方程式沒有用處。我們設計應用問題應該要盡可能地與現實吻合, 讓整個問題突兀性降到最低, 如果這件事辦不到, 那不如不要設計應用問題, 就單純地問數學的問題即可。比方說, 如果雞兎同籠的問題改成下面問題:

> 一本遊樂券套票共 10 張要價 1900 元, 裡面有 100 元和 250 元兩種面額的票券, 請問這本套票裡兩種面額的票券分別有幾張?

我想信這樣的題目設計就與生活的結合度很高, 而且這件事在生活中也的確會發生。至於二元一次聯立方程式, 在數學上的精神就是一種「旁敲側擊」的概念, 可以透過推理將某兩種資訊換得另外兩種資訊, 這是在學二元一次聯立方程式的時候應該要得到的感想。

回到微分方程這個課題, 這裡想要談論微分方程的應用指的是在課堂中可以學到哪些應用問題而且可以如實反應現實生活中的現象。微分方程的起源是從大自然而來, 古代天文學家與物理學家爲了要了解天體的運行或是找到事物的規律, 在微積分發展的階段就同時也試著將問題轉變成一條又一條的微分方程式, 各位耳熟能詳的牛頓運動定律或者是克卜勒定律都是經典的例子。除此以外, 在講義第 1 章的單元 1.3 還精選了一些其它數學還有物理的問題, 都可以透過微分方程的方式進行討論並且解決。

第 2 章單元 2.4 我們會從最簡單的人口模型出發, 逐步修正數學模型以愈來愈貼近現實生活的情境, 像是描述瀕臨絕種的物種, 或是模擬受固定比例捕捉下的魚群數量。二階微分方程可以用在描述電路中連接兩個儲能元件 (電感、電容) 下電壓或是電流的狀態。至於拉普拉斯變換是給出當方程式的非齊次項不是連續 (電源突然打開) 或是有脈衝 (瞬間來個衝擊後又消失) 時怎麼給出電壓或是電流對於時間的關係。至於學期的最後還會再提幾個有趣的問題, 比方說掠食者與獵物系統、懸鏈線的認識、最速降線問題, 它們都對應到微分方程然後得到答案。

從上述的說明來看, 微分方程和生活中的很多事物都有很緊密的關聯, 也唯有我們學到更高等的數學時, 才可以認識複雜又深刻的概念。從應用面去學數學是促使我們去學高等數學的一個重要誘因, 更進一步地, 若可以用美學的角度去看待事物那更好; 也就是說, 若能從這些內容得到對於長年下來學問累積所得的豐碩成果而對此有所驚嘆, 求學也變得更有意義。

0.4 結語

在看完前面的文章後, 相信各位對數學系微分方程這門課已經有了不同的觀感, 這些內容應該是更加對焦在數學的面向去認識這一門學科。

這裡也期許各位在修數學系微分方程的時候, 時時刻刻提醒自己除了解題之外, 我們還要多認識定理的證明和其它科目的關聯, 以及微分方程的實質應用, 這樣的學習在修完課後必能收穫滿滿, 也可以更言之有物地和別人分享這門課學到的數學內容。

看看自己穿在身上的系服, 寫著「數學魂」三個字, 想想自己在學校的歲月中, 是否在這段日子中逐漸培養出一套用數理思維判斷事物的能力, 成為具有數學靈魂體質的人, 還是被數學不斷荼毒之後變成在數學系館漫無目的四處遊蕩的幽魂? 上面的這段話是我三年前帶高等微積分課的學期末跟大家說的勉勵語, 而我也想要把這句話獻給各位。