4

行列式

行列式對方陣來說是一個很特別的函數, 它在線性代數理論中占有一席之地, 我們在單元 4.1 的部分會先從行列式的定義開始談起, 認識行列式的計算公式, 並探討行列式的基本性質。行列式首要先建立的是 n-線性的性質, 由此可以得知若矩陣中有某一列的每一項都是零的話, 那麼這個矩陣的行列式必為零。行列式原始的定義是計算矩陣對於第一列的餘因子展開, 透過 n-線性我們可以推得行列式也可以是對於不同列的餘因子展開。其它常見的行列式性質像是矩陣中若有某兩列相等則行列式為零、矩陣兩列互換行列式差負號、矩陣進行第三類基本列運算下行列式不變、未滿秩的矩陣行列式為零, 這些結果都會在這個單元中給予證明。

單元 4.2 會繼續討論行列式的性質, 首先將單位矩陣以及基本矩陣的行列式完整介紹, 討論這些內容的主要目的是要證明行列式的另一個重要性質: 兩方陣相乘後的行列式為各自的行列式值相乘。在證明的過程中, 對於未滿秩的矩陣可利用前一個單元的結果立刻得證; 對於滿秩的矩陣, 該矩陣可逆, 因為它可以拆解成基本矩陣的乘積, 所以只要驗證基本矩陣的情況就可以得到可逆矩陣的結果。而這個單元還會證明可逆矩陣與其反矩陣的行列式互為倒數以及矩陣與其轉置矩陣之行列式相等, 當轉置矩陣的行列式結果建立後, 我們就可以把當初行列式只對於列的討論都轉換成對於行的討論。

回顧第 3 章曾經討論線性聯立方程式的可解性, 對於較為特殊的 n 個未知數的 n 個線性聯立方程式的問題, 我們可以用行列式的方式求解, 這是單元 4.3 中要介紹的克拉瑪法則。關於一個矩陣是否可逆以及可逆矩陣的反矩陣的表達, 在第 3 章也有仔細討論過, 這裡我們可以利用克拉瑪法則給出可逆矩陣的反矩陣表達, 此結果也將視為行列式的一個經典應用。當我們學會許多的方法與工具解決同一個問題時, 就可以更進一步地思考每一種方法的特色與優劣性。

單元 4.4 是數學上一個很有趣的問題, 在我們知道行列式具有的各種性質中, 到底哪些是行列式的基本性質? 我們想要從中挑出最重要的三個條件, 進而以此完全刻畫行列式。經過分析後, 最終得到的三個條件分別是 n-線性、交錯的、對於單位矩陣的取值為 1; 也就是說, 由這三個條件不僅可以證明行列式在前面單元所推得的性質都可以完全證明外, 滿足這三個條件的函數也只有行列式。

經過前面單元的討論, 我們知道行列式是一個很特別的 n-線性函數, 而這些討論幾乎都是圍繞在代數結構上了解行列式。一個矩陣的行列式可以賦予幾何意義, 單元 4.5 我們會從 2×2 的矩陣進行觀察, 經過論述及推廣後, 最後會得到關於行列式的幾何意義是在描述當矩陣以列向量依序寫出來之下, 考慮由這些向量所張出的有向 (帶有正負號的) n-維立體體積, 當幾何量給出正、負的觀念下則產生關於定向的議題, 這裡我們會給出一點初步的討論。

4.1 行列式及其基本性質

本單元的主要目的是要介紹行列式還有它的基本性質。在定義行列式之前, 我們先引進一個記號: 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 其中 $n \geq 2$, 記 $\tilde{A}_{ij}$ 是將矩陣 A 刪去第 i 列及第 j 行而得的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩陣。

例 **1.** 考慮

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix},$$

則

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{13} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix}。$$

這裡只寫出其中三個, 其餘六個讀者應能自行完成故不贅述。

定義 **2** (第 209 頁)**.** 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$,

- 若 $n = 1$, 則 $A = [A_{11}]$, 定義 $\det(A) = A_{11}$。
- 若 $n \geq 2$, 定義 $\det(A)$ 為

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} A_{1j} \cdot \det(\tilde{A}_{1j}),$$

純量 $\det(A)$ 稱為 A 的行列式 (determinant), 有時候也會寫成 $|A|$。

定義 **3** (第 210 頁)**.** 純量 $c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\tilde{A}_{ij})$ 稱為 A 的第 i 列第 j 行的 餘因子 (cofactor)。

若用餘因子的術語重新說明行列式的定義, 則 A 的行列式定義為 A 的第 1 列每一個項與它的餘因子相乘後加總; 換言之, A 的行列式可簡記為

$$\det(A) = A_{11}c_{11} + A_{12}c_{12} + \cdots + A_{1n}c_{1n},$$

這個式子稱為 沿著 A 的第 1 列餘因子展開式 (cofactor expansion along the first row of A)。

例 **4.** 對於 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F})$, 證明: $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$。

解**.** 直接計算可得

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{11}c_{11} + A_{12}c_{12} = A_{11}((-1)^{1+1}\det(\tilde{A}_{11})) + A_{12}((-1)^{1+2}\det(\tilde{A}_{12})) \\ &= A_{11}((-1)^{1+1}\det(A_{22})) + A_{12}((-1)^{1+2}\det(A_{21})) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}。\end{aligned}$$

例 **5.** 對於 $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{F})$, 證明:

$$\det(A) = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31}。$$

解. 根據定義, 我們有

$$\begin{aligned}\det(A) &= A_{11}c_{11} + A_{12}c_{12} + A_{13}c_{13} \\ &= A_{11}((-1)^{1+1}\det(\tilde{A}_{11})) + A_{12}((-1)^{1+2}\det(\tilde{A}_{12})) + A_{13}((-1)^{1+3}\det(\tilde{A}_{13})),\end{aligned}$$

因為

$$\begin{aligned}\det(\tilde{A}_{11}) &= A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}, \\ \det(\tilde{A}_{12}) &= A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}, \\ \det(\tilde{A}_{13}) &= A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\det(A) &= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{23}A_{31}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31}) \\ &= A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{13}A_{22}A_{31}。\end{aligned}$$

從定義來看, 計算一個 $n \times n$ 矩陣的行列式會有 $n!$ 個數字要相加, 當 n 愈大, 只利用定義計算行列式會愈不易, 所以我們必須對行列式的性質多一些了解才有助於簡化計算; 此外, 從了解行列式的性質中掌握其數學概念以及行列式的本質才不致淪為盲目地計算。

定理 **6** (第 212 頁)**.** *一個 $n \times n$ 矩陣的行列式具有的性質是: 固定其中的 $n-1$ 列, 對於剩下的列而言是線性函數; 也就是說, 對於 $p = 1, 2, \ldots, n$, 都有*

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p-1} \\ \mathbf{u} + k\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p-1} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + k\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p-1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right),$$

其中 $k \in \mathbb{F}$, 而 $\mathbf{a}_i$, 其中 $i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$, 以及 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{F}^n$ 是列向量。

證明:

- 當 $n = 1$, 此時 $A = [u + kv]$, 於是 $\det([u + kv]) = u + kv = \det([u]) + k\det([v])$, 線性性質成立。

- 假設 $n=l$ 時線性性質成立; 也就是說, 固定其中的 $l-1$ 列, 對於剩下的列而言是線性函數。

  當 $n=l+1$ 時, 給定 $A\in M_{(l+1)\times(l+1)}(\mathbb{F})$, 將 A 的每一列分別記為 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_{l+1}$, 選定 p 是 $1,2,\ldots,l+1$ 中的一數, 我們有 $\mathbf{a}_p=\mathbf{u}+k\mathbf{v}$, 其中 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_{l+1})$ 及 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\ldots,v_{l+1})$, 並記 B 與 C 分別為將 A 的第 p 列替換為 $\mathbf{u}$ 及 $\mathbf{v}$ 後所得的矩陣。在這樣的記號設定下, 以下目標將證明 $\det(A)=\det(B)+k\det(C)$。

  以下分成 $p=1$ 與 $p>1$ 兩種情況討論:

  ⋆ 若 $p=1$, 這時 A 的第 1 列是 $(u_1+kv_1,u_2+kv_2,\ldots,u_{l+1}+kv_{l+1})$, 它是 B 的第 1 列與 C 的第 1 列乘以 k 倍之和, 而對於 $j=1,2,\ldots,l+1$, 都有 $\tilde{A}_{1j}=\tilde{B}_{1j}=\tilde{C}_{1j}$, 於是

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot\det(\tilde{A}_{1j})=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}(u_j+kv_j)\cdot\det(\tilde{A}_{1j})\\&=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}u_j\cdot\det(\tilde{A}_{1j})+k\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}v_j\cdot\det(\tilde{A}_{1j})\\&=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j})+k\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}C_{1j}\cdot\det(\tilde{C}_{1j})\\&=\det(B)+k\det(C)。\end{aligned}$$

  ⋆ 若 $p>1$, 這時對於 $j=1,2,\ldots,l+1$ 來說, $\tilde{A}_{1j},\tilde{B}_{1j},\tilde{C}_{1j}$, 除了第 $p-1$ 列之外皆相同, 而 $\tilde{A}_{1j}$ 的第 $p-1$ 列是

$$(u_1+kv_1,u_2+kv_2,\ldots,u_{j-1}+kv_{j-1},u_{j+1}+kv_{j+1},\ldots,u_{l+1}+kv_{l+1}),$$

  它是 $\tilde{B}_{1j}$ 的第 $p-1$ 列與 $\tilde{C}_{1j}$ 的第 $p-1$ 列乘上 k 倍之和。因為 $\tilde{B}_{1j}$ 與 $\tilde{C}_{1j}$ 均為 $l\times l$ 矩陣, 由數學歸納法的假設有 $\det(\tilde{A}_{1j})=\det(\tilde{B}_{1j})+k\det(\tilde{C}_{1j})$, 又 $A_{1j}=B_{1j}=C_{1j}$, 所以

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot\det(\tilde{A}_{1j})=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot\Big(\det(\tilde{B}_{1j})+k\det(\tilde{C}_{1j})\Big)\\&=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j})+k\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}A_{1j}\cdot\det(\tilde{C}_{1j})\\&=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j})+k\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}C_{1j}\cdot\det(\tilde{C}_{1j})\\&=\det(B)+k\det(C)。\end{aligned}$$

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 一個 $n\times n$ 矩陣的行列式具有的性質是: 固定其中的 $n-1$ 列, 對於剩下的列而言是線性函數。

□

推論 7 (第 213 頁)**.** 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 有某一列的每一項皆為零, 則 $\det(A)=0$。

證明: 假設 A 的第 p 列的每一項全為 0, 其中 p 是 $1,2,\ldots,n$ 中的一數, 因為對於第 p 列來說可寫成 $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}$, 由 定理 **6** 利用 A 的第 p 列之線性性質得知: $\det(A)=\det(A)+\det(A)$, 所以 $\det(A)=0$。 □

根據定義, 行列式是計算沿著 A 的第 1 列餘因子展開式, 以下將證明行列式的結果可以是計算沿著 A 的任何一列之餘因子展開式。為得到這個結果, 我們先證明以下引理:

引理 8 (第 213 頁)**.** 令 $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 其中 $n \geq 2$, 若 B 的第 i 列為 $\mathbf{e}_k$, 其中 $1 \leq k \leq n$, 則

$$\det(B)=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

證明:

- 當 $n=2$ 時,

  ⋆ 若 B 的第 1 列是 $\mathbf{e}_1$, 則 $B_{11}=1, B_{12}=0$, 所以

  $$\det(B)=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}=B_{22}=(-1)^{1+1}\det(\tilde{B}_{11})=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

  ⋆ 若 B 的第 1 列是 $\mathbf{e}_2$, 則 $B_{11}=0, B_{12}=1$, 所以

  $$\det(B)=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}=-B_{21}=(-1)^{1+2}\det(\tilde{B}_{12})=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

  ⋆ 若 B 的第 2 列是 $\mathbf{e}_1$, 則 $B_{21}=1, B_{22}=0$, 所以

  $$\det(B)=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}=-B_{12}=(-1)^{2+1}\det(\tilde{B}_{21})=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

  ⋆ 若 B 的第 2 列是 $\mathbf{e}_2$, 則 $B_{21}=0, B_{22}=1$, 所以

  $$\det(B)=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}=B_{11}=(-1)^{2+2}\det(\tilde{B}_{22})=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

  由上討論得到公式 $\det(B)=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})$ 在 $n=2$ 時成立。

- 假設 $n=l, l\geq 2$ 時引理的結果成立; 也就是說, 若 B 的第 i 列是 $\mathbf{e}_k$, 其中 $1\leq k\leq l$, 則 $\det(B)=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})$ 成立。

  當 $n=l+1$ 時, 假設 $B\in M_{(l+1)\times(l+1)}(\mathbb{F})$, 若 B 的第 i 列是 $\mathbf{e}_k$, 其中 $1\leq k\leq l+1$。現分成 $i=1$ 以及 $1<i\leq l+1$ 兩種情況討論:

  ⋆ 若 $i=1$, 因為 $B_{1k}=1$ 而且若 $j\neq k$, 則 $B_{ij}=0$, 根據行列式的定義,

  $$\det(B)=\sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j})=(-1)^{1+k}\det(\tilde{B}_{1k})=(-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

★ 若 $1 < i \leq l+1$, 對每個 $j \neq k$, 其中 $1 \leq j \leq l+1$, 令 C_{ij} 表示 $(l-1)\times(l-1)$ 矩陣而且是消去 B 第 1 列與第 i 列還有消去 B 的第 j 行與第 k 行後所得的矩陣。對於每一個 j, 則 $\tilde{B}_{ij}$ 的第 $i-1$ 列是 $\mathbb{F}^l$ 中的向量, 其中

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{k-1} & 若\ j < k \\ \mathbf{0} & 若\ j = k \\ \mathbf{e}_k & 若\ j > k, \end{cases}$$

由數學歸納法的假設以及 推論 **7**, 得到

$$\det(\tilde{B}_{1j}) = \begin{cases} (-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(C_{ij}) & 若\ j < k \\ 0 & 若\ j = k \\ (-1)^{(i-1)+k}\det(C_{ij}) & 若\ j > k, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j}) \\ &= \sum_{j<k}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j}) + \sum_{j>k}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(\tilde{B}_{1j}) \\ &= \sum_{j<k}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot(-1)^{(i-1)+(k-1)}\det(C_{ij}) \\ &\quad + \sum_{j>k}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot(-1)^{(i-1)+k}\det(C_{ij}) \\ &= (-1)^{i+k}\left(\sum_{j<k}(-1)^{1+j}B_{1j}\cdot\det(C_{ij}) + \sum_{j>k}(-1)^{1+(j-1)}B_{1j}\cdot\det(C_{ij})\right)。 \end{aligned}$$

因為上式中括號內的式子即為 $\tilde{B}_{ik}$ 沿著第 1 列的餘因子展開式, 所以

$$\det(B) = (-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 令 $B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 其中 $n \geq 2$, 若 B 的第 i 列為 $\mathbf{e}_k$, 其中 $1 \leq k \leq n$, 則

$$\det(B) = (-1)^{i+k}\det(\tilde{B}_{ik})。$$

□

先討論 引理 **8** 是合理的, 因為矩陣第 i 列所成的向量空間中有標準有序基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, 而我們在 定理 **6** 又知道固定其中的 $n-1$ 列, 對剩下的列而言具有線性性質, 這麼一來就可以將兩者整合得到最終的結果, 即行列式的計算可以對任意一列進行餘因子展開。以下繼續將這個結果證明完畢。

定理 9 (第 215 頁)**.** 任何一個方陣的行列式可由沿著任一列的餘因子展開式計算之; 也就是說, 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 則對任何 i 是 $1, 2, \ldots, n$ 中之一數, 都有

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\cdot\det(\tilde{A}_{ij})。$$

證明: 若 $i = 1$, 此結果即為行列式的定義。若 i 是 $2, 3, \ldots, n$ 中之一數, 因為 A 的第 i 列的向量可以表示為 $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\mathbf{e}_j$。對於 $j = 1, 2, \ldots, n$, 令 B_j 表示將 A 的第 i 列替換為 $\mathbf{e}_j$ 所得的矩陣。根據 **定理 6** 以及 **引理 8**, 得到

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\det(B_j) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\cdot\det(\tilde{A}_{ij})。$$

□

這裡註記一件事: 從 **定理 9** 當中雖然我們可以推得若一個方陣的某一列全為零的話, 那麼沿著那一列的餘因子展式後可得知行列式為零 (**推論 7**), 但是這樣的論述在這份講義的建構過程中是有問題的; 也就是說, 因為 **引理 8** 的證明中已經用到 **推論 7**, 而 **定理 9** 又用到 **引理 8**, 所以我們不能再拿 **定理 9** 證明 **推論 7**, 否則這將產生循環論證的問題。

推論 10 (第 215 頁)**.** 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 有某兩列相等, 則 $\det(A) = 0$。

證明:

- 當 $n = 2$, 記矩陣

  $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

  滿足 $A_{11} = A_{21}$ 以及 $A_{12} = A_{22}$, 所以 $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = A_{21}A_{22} - A_{22}A_{21} = 0$。

- 假設 $n = l, l \geq 2$ 的時候具有: 若矩陣的第 p 列與第 q 列相等, 其中 $p \neq q$, 則 $\det(A) = 0$ 成立。

  當 $n = l + 1$, 令 $A \in M_{(l+1)\times(l+1)}(\mathbb{F})$ 的第 p 列及第 q 列相等且 $p \neq q$, 因為 $n \geq 3$, 在 $1, 2, \ldots, l+1$ 中存在一數 i 使得 $i \neq p$ 而且 $i \neq q$, 由 **定理 9**,

  $$\det(A) = \sum_{j=1}^{l+1}(-1)^{i+j}A_{ij}\cdot\det(\tilde{A}_{ij}),$$

  因為每個 $\tilde{A}_{ij}$ 都是 $l \times l$ 矩陣且有某兩列相等, 由數學歸納法的假設得知對於 $j = 1, 2, \ldots, l+1$ 都有 $\det(\tilde{A}_{ij}) = 0$, 因此 $\det(A) = 0$。

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 有某兩列相等, 則 $\det(A) = 0$。

□

回想在討論解線性聯立方程式的時候, 將問題轉換為矩陣表示時, 我們會對矩陣進行兩列互換還有將某一列乘上非零的倍數後加到另一列而得新的矩陣, 利用行列式的線性性質 (定理 **6**) 還有兩列相同的方陣行列式為零 (推論 **10**) 的結果, 我們可以得到這些矩陣的行列式之關係。

定理 11 (第 216 頁)**.** 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 而矩陣 B 是 A 的某兩列互換後所得的矩陣, 則 $\det(B) = -\det(A)$。

證明: 將 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的每一列分別記為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, 而 B 是將 A 的第 p 列與第 q 列互換所得的矩陣, 其中 $p < q$; 也就是說,

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

因為

$$\begin{aligned}
0 = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_q \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) \\
&= 0 + \det(A) + \det(B) + 0,
\end{aligned}$$

所以 $\det(B) = -\det(A)$。 $\square$

以下可再推得行列式的另一個重要性質: 將矩陣進行第 III 類基本列運算後行列式不變。

定理 12 (第 216 頁)**.** 假設 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 若 B 是將 A 的某一列乘以 k 倍加至 A 的另一列所得的矩陣, 則 $\det(B) = \det(A)$。

證明: 假設 B 是將 A 的第 q 列乘以 k 倍加至 A 的第 p 列所得的矩陣, 其中 $p \neq q$, 將 A 的每一列記為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, 而 B 的每一列記為 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, 則 $\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i$ 對所有 $i \neq p$, 而 $\mathbf{b}_p = \mathbf{a}_p + k\mathbf{a}_q$, 令 C 是 A 的第 p 列改成 $\mathbf{a}_q$ 後所得的矩陣, 由 定理 **6** 與 推論 **10**, 得到

$$\det(B) = \det(A) + k\det(C) = \det(A) + k \cdot 0 = \det(A)。$$

□

推論 13 (第 217 頁)**.** 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 滿足 $\operatorname{rank}(A) < n$, 則 $\det(A) = 0$。

證明: 將矩陣 A 的列向量以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 表示, 若 $\operatorname{rank}(A) < n$, 則 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 線性相依; 也就是說, 存在 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 不全為零使得 $c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$。假設 $c_p \neq 0$, 則 $\mathbf{a}_p$ 可以重新表示為

$$\mathbf{a}_p = \tilde{c}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + \tilde{c}_{p-1} \cdot \mathbf{a}_{p-1} + \tilde{c}_{p+1} \cdot \mathbf{a}_{p+1} + \cdots + \tilde{c}_n \cdot \mathbf{a}_n,$$

其中 $\tilde{c}_i = -c_p^{-1}c_i, i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$。由 定理 **6**, 先對於第 p 列用線性性質展開後, 得到每個矩陣都有某兩列相同, 故由 推論 **10** 得到

$$\det(A) = \tilde{c}_1 \cdot 0 + \cdots + \tilde{c}_{p-1} \cdot 0 + \tilde{c}_{p+1} \cdot 0 + \cdots + \tilde{c}_n \cdot 0 = 0。$$

□

這裡整理出到目前為止所推得的行列式性質:

- 固定其中的 $n-1$ 列, 行列式對於剩下的列而言是線性函數。 定理 **6**
- 若有某一列的每一項皆為零, 則行列式為零。 推論 **7**
- 行列式可由沿著任一列的餘因子展開式計算之。 定理 **9**
- 矩陣若有某兩列相等, 則行列式為零。 推論 **10**
- 矩陣任兩列互換, 行列式值差負號。 定理 **11**
- 將某一列乘以 k 倍加到另一列, 行列式值不變。 定理 **12**
- 矩陣不滿秩, 行列式為零。 推論 **13**

下一個單元會再繼續介紹行列式的性質。

4.2 行列式的進階性質

這個單元將繼續討論行列式的性質, 這些性質中有些仍然是一般的結果, 而有些是討論特別的矩陣之行列式。首先建立單位矩陣還有基本矩陣的行列式。

例 **1.**

(A) 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 單位矩陣 I_n 的行列式 $\det(I_n) = 1$。

(B) 若 E 是將單位矩陣 I_n 的任兩列互換後所得的矩陣, 則 $\det(E) = -1$。

(C) 若 E 是將單位矩陣 I_n 的某一列乘上非零倍數 k 後所得的矩陣, 則 $\det(E) = k$。

(D) 若 E 是將單位矩陣 I_n 的某一列乘上 k 倍後加至另一列所得的矩陣, 則 $\det(E) = 1$。

證明:

(A)
- 當 $n = 1$, 則 $\det(I_1) = \det([1]) = 1$ 成立。
- 假設 $n = k, k \in \mathbb{N}$ 時, 行列式 $\det(I_k) = 1$ 成立。

  當 $n = k + 1$ 時, 根據行列式的定義, 得到

$$\begin{aligned}\det(I_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{1+j} (I_{k+1})_{1j} \det(\tilde{I}_{1j}) = (-1)^{1+1} (I_{k+1})_{11} \cdot \det(I_k) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1。\end{aligned}$$

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 單位矩陣 I_n 的行列式 $\det(I_n) = 1$。

(B) 由 (A) 以及單元 4.1 的 定理 **11** 得到 $\det(E) = -1$。

(C) 假設矩陣 E 是將單位矩陣 I_n 的第 p 列乘上 k 後所得的矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 考慮 A 是將單位矩陣 I_n 的第 p 列換成零向量所成的矩陣, 則由 (A) 以及單元 4.1 的 定理 **6** 與 推論 **7** 得到

$$\det(E) = \det(A) + k \det(I_n) = 0 + k \cdot 1 = k。$$

(D) 假設矩陣 E 是將單位矩陣 I_n 的第 q 列乘上 k 後加到第 p 列所得的矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 由 (A) 以及單元 4.1 的 定理 **12** 得到

$$\det(E) = \det(I_n) = 1。$$

□

討論完單位矩陣及基本矩陣的行列式之後, 我們就可以建立兩矩陣相乘的行列式與各別矩陣行列式的關係。

定理 2 (第 223 頁)**.** 對任何 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 則 $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$。

證明: 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 首先討論 $\operatorname{rank}(A) < n$ 的情形。由單元 4.1 的 推論 **13** 知道 $\det(A) = 0$, 所以 $\det(A)\cdot\det(B) = 0$; 另一方面, 因為 $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A) < n$, 所以 $\det(AB) = 0$, 因此 $\det(AB) = 0 = \det(A)\cdot\det(B)$。

以下討論 A 是一個基本矩陣的情形。

- 若 A 是第 I 型基本矩陣, 即 A 是將 I_n 中的某兩列互換後所得的基本矩陣, 則 $\det(A) = -1$; 另一方面, 因為矩陣 AB 是 B 互換兩列後所得的矩陣, 所以

$$\det(AB) = -\det(B) = (-1)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)。$$

- 若 A 是第 II 型基本矩陣, 即 A 是將 I_n 中的某一列乘以 k 之後所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 則 $\det(A) = k$; 另一方面, 矩陣 AB 是 B 的某一列乘上 k 之後所得的矩陣, 根據單元 4.1 的 定理 **6** 得到

$$\det(AB) = k\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)。$$

- 若 A 是第 III 型基本矩陣, 即 A 是將 I_n 中的某一列乘以 k 之後加到另一列所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 則 $\det(A) = 1$; 另一方面, 矩陣 AB 是 B 的某一列乘以 k 之後加到另一列所得的矩陣, 由單元 4.1 的 定理 **12** 得到

$$\det(AB) = \det(B) = 1\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)。$$

最後討論 $\operatorname{rank}(A) = n$ 的情況。此時, A 是可逆矩陣, 而且它可以寫成基本矩陣的乘積, 記 $A = E_m E_{m-1}\cdots E_2E_1$, 其中 $E_1, E_2, \ldots, E_m$ 為基本矩陣, 則

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_m\cdots E_2E_1B) = \det(E_m)\cdot\det(E_{m-1}\cdots E_2E_1B)\\ &= \cdots = \det(E_m)\cdot\cdots\cdot\det(E_2)\cdot\det(E_1)\cdot\det(B)\\ &= \det(E_m\cdots E_2\cdot E_1)\cdot\det(B) = \det(A)\cdot\det(B)。\end{aligned}$$

□

推論 3 (第 223 頁)**.** 矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是可逆的若且唯若 $\det(A) \neq 0$, 而且若 A 是可逆的, 則 $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$。

證明: ($\Rightarrow$) 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是可逆的, 則有 $AA^{-1} = I_n$, 於是

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1。$$

因此, $\det(A) \neq 0$, 且 $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$。

($\Leftarrow$) 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是不可逆的, 則 $\operatorname{rank}A < n$, 所以 $\det(A) = 0$。 □

至今我們對於行列式的研究都只使用到矩陣的列, 例如行列式的遞迴定義僅提到沿著某一列的餘因子展開式, 而且在單元 4.1 總結出利用基本列運算以求得行列式的更有效方法。我們下一個結果將證明矩陣 A 與其轉置矩陣 A^t 的行列式相等。因為 A 的列即為 A^t 的行, 最終我們可將所有利用矩陣的列求行列式的敘述轉換為利用行求行列式的敘述。

引理 4. 基本矩陣的轉置矩陣也是基本矩陣, 而且行列式值相同。

證明:

- 若 A 是第 I 型矩陣, 即 A 是將 I_n 中的第 p 列與第 q 列互換後所得的基本矩陣, 因為 $A^t = A$, 所以 A^t 也是基本矩陣, 且 $\det(A^t) = \det(A) = -1$。
- 若 A 是第 II 型矩陣, 即 A 是將 I_n 中的第 p 列乘以 k 之後所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 因為 $A^t = A$, 所以 A^t 也是基本矩陣, 且 $\det(A^t) = \det(A) = k$。
- 若 A 是第 III 型矩陣, 即 A 是將 I_n 中的第 q 列乘以 k 之後加到第 p 列所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 即

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j \\ k & \text{若 } i = p \text{ 且 } j = q \\ 0 & \text{其它情況,} \end{cases}$$

因為

$$(A^t)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } i = j \\ k & \text{若 } i = q \text{ 且 } j = p \\ 0 & \text{其它情況,} \end{cases}$$

則 A^t 可以看成是將 I_n 中的第 p 列乘以 k 之後加到第 q 列所得的矩陣, 故 A^t 也是基本矩陣, 而且 $\det(A^t) = 1 = \det(A)$。

□

定理 5 (第 224 頁)**.** 對任何 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $\det(A^t) = \det(A)$。

證明: 若 A 不是可逆的, 則 $\operatorname{rank}(A) < n$, 因為 $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$, 所以 A^t 也是不可逆的。因此, $\det(A^t) = 0 = \det(A)$。

若 A 是可逆的, 則 A 可以寫成基本矩陣的乘積, 記 $A = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1$, 其中 $E_1, E_2, \ldots, E_m$ 是基本矩陣, 因為對於 $i = 1, 2, \ldots, m$ 都有 $\det(E_i) = \det((E_i)^t)$, 所以

$$\begin{aligned} \det(A^t) &= \det((E_1)^t (E_2)^t \cdots (E_m)^t) = \det((E_1)^t) \det((E_2)^t) \cdots \det((E_m)^t) \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \cdots \det(E_m) = \det(E_m) \cdots \det(E_2) \det(E_1) \\ &= \det(E_m \cdots E_2 E_1) = \det(A)。 \end{aligned}$$

因此, 對任何 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 都有 $\det(A^t) = \det(A)$。 □

4.3　克拉瑪法則與反矩陣的找法

這一個單元是要考慮帶有 n 個未知數 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n 個線性聯立方程式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$, 而 $i, j = 1, 2, \ldots, n$。透過矩陣的運算, 線性聯立方程式可以寫成 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}。$$

回想在第 3 章我們是討論帶有 n 個未知數的 m 個線性聯立方程式之一般情形, 而那時候我們是透過基本列運算與基本行運算搭配秩的概念給出關於線性聯立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的存在性與唯一性的理論及其證明。以下定理是針對特殊的情形, 也就是 n 個未知數 n 個方程式的時候給出利用行列式的方式求解, 而它可以視為第 3 章單元 3.4 的 **定理 5** 的具體實踐。

定理 1 (克拉瑪法則, Cramer's rule, 第 224 頁)**.** 考慮 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是含 n 個未知數 n 個線性聯立方程式。若 $\det(A) \neq 0$, 則此線性聯立方程式存在唯一解, 而且對於 $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$x_k = (\det(A))^{-1} \cdot \det(M_k),$$

其中 M_k 是將 A 的第 k 行改為向量 $\mathbf{b}$ 後所成的 $n \times n$ 矩陣。

證明: 若 $\det(A) \neq 0$, 則線性聯立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解。對於 $k = 1, 2, \ldots, n$, 令 $\mathbf{a}_k$ 表示 A 的第 k 行, 且令 X_k 表示將 $n \times n$ 單位矩陣的第 k 行替換成 $\mathbf{x}$ 後所得的矩陣。因為

$$\begin{aligned} AX_k &= A\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_{k-1} & \mathbf{x} & \mathbf{e}_{k+1} & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A\mathbf{e}_1 & \cdots & A\mathbf{e}_{k-1} & A\mathbf{x} & A\mathbf{e}_{k+1} & \cdots & A\mathbf{e}_n \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{k-1} & \mathbf{b} & \mathbf{a}_{k+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array}\right] = M_k, \end{aligned}$$

所以 $\det(AX_k) = \det(M_k)$。

現用沿著第 k 列的餘因子展開式計算 $\det(X_k)$, 得

$$\det(X_k) = \sum_{j=1}^{n} (X_k)_{kj} \cdot \det((\tilde{X}_k)_{kj}) = x_k \cdot \det(I_{n-1}) = x_k,$$

於是

$$\det(AX_k) = \det(A) \cdot \det(X_k) = \det(A) \cdot x_k = \det(M_k)$$

因此 $x_k = (\det(A))^{-1} \cdot \det(M_k)$。 □

例 **2.** 利用克拉瑪法則解以下線性聯立方程式:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = -6 \\ x - 2y + z = 7。\end{cases}$$

解. 首先, 這個線性聯立方程式的矩陣形式為 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ 及 } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

因為 $\det(A) = 3 - 4 - 1 - 3 - 2 - 2 = -9$, 而

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 得 } \det(M_1) = 3 + 12 - 7 - 21 + 6 - 2 = -9,$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 得 } \det(M_2) = -6 + 14 = 1 + 6 = 2 + 7 = 18,$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \text{ 得 } \det(M_3) = 21 - 4 - 6 - 3 - 14 - 12 = 21 - 39 = -18,$$

所以

$$x = \frac{\det(M_1)}{\det(A)} = \frac{-9}{-9} = 1, \quad y = \frac{\det(M_2)}{\det(A)} = \frac{18}{-9} = -2, \quad z = \frac{\det(M_3)}{\det(A)} = \frac{-18}{-9} = 2。$$

將克拉瑪法則與第 3 章介紹用基本列運算的方式找到線性聯立方程式的解相比較, 在 2×2 與 3×3 矩陣, 克拉瑪法則在手動計算上應該是會快一些, 而且也比較不會出錯, 至少個人的經驗上是如此。我想主要原因是在於行列式有很多的性質助於簡化計算。但這裡應註記的是: 若矩陣愈來愈大的時候, 我們會開始尋求電腦的協助, 目前市面上有非常多處理數學的軟體, 在這些數學軟體中, 若是牽涉到要進行大型矩陣的運算時, 那麼 MATLAB 算是首選。

現從大型矩陣的眼光看待同樣的問題時, 結局就會大翻轉, 因為當 n 愈來愈大的時候, 利用基本列運算或是基本行運算所需要的操作會是多項式等級就可以完成 (處理 n 個未知數的 n 條線性聯立方程式需要用到的乘法次數是 n^3 的等級), 但是克拉瑪法則需要計算的是行列式, 而每一個行列式會是階乘等級的運算量 (處理 n 個未知數的 n 條線性聯立方程式需要用到的乘法次數是 $(n+1)!$), 就算是利用行列式的一些性質化簡計算的話, 仍然需要用到 n^4 的等級, 所以克拉瑪法則在大型矩陣的情況下變得不好。這類的問題與演算法的時間複雜度 (time complexity) 有關, 若從數學的角度來看的話, 則是和等級 (order) 的原理有關, 各位若對資訊特別是寫程式感興趣的話, 應該要對這個議題加以了解, 在這份講義中或許就只是在此點到為止。

在線性代數的理論中, 判斷一個矩陣是否可逆是一個重要的問題, 甚至求出一個可逆矩陣的反矩陣表達式也是經常需要知道的事情。在第 3 章的時候, 我們介紹過利用一個方陣與一個單位矩陣結合成增廣矩陣, 再利用基本列運算還有基本行運算的方式就可以判斷這個方陣是否可逆, 若可逆, 也可以得到反矩陣的表達。當我們學到行列式以及克拉瑪法則知道關於線性聯立方程式的另一種求解法時, 我們也可以透過克拉瑪法則確實求得一個可逆矩陣的反矩陣。現對這個問題進行討論: 給定矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 假設 A 是可逆矩陣, 則存在 B 使得 $AB = I_n$, 將 B 的每一行記為 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, 回想單元 2.5 的 定理 **3**, 用行的觀點來看 $AB = I_n$ 這個式子, 則為

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{array}\right],$$

所以對於 $j = 1, 2, \ldots, n$ 都有 $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$。根據克拉瑪法則 (Cramer's rule, 定理 **1**), 我們得到 $b_{ij} = (\det(A))^{-1} \cdot \det(M_i)$, 其中 M_i 是將 A 的第 i 行改為 $\mathbf{e}_j$ 後所得的 $n \times n$ 矩陣, 因為 $\det(M_i) = (-1)^{j+i}\det(\tilde{A}_{ji})$, 所以

$$[A^{-1}]_{ij} = b_{ij} = (\det(A))^{-1} \cdot (-1)^{j+i}\det(\tilde{A}_{ji})。$$

例 **3.** 判斷矩陣

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

是否可逆? 若可逆, 試求出它的反矩陣。

解**.** 因為 $\det(A) = 3 - 4 - 1 - 3 - 2 - 2 = -9 \neq 0$, 所以矩陣 A 是可逆的。

現計算

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 3 & 0 & -3 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 0 & -3 \\ -7 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 1 & (-1)\cdot 3 & -4 \\ (-1)\cdot 3 & 0 & (-1)\cdot(-3) \\ -7 & (-1)\cdot(-3) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}。$$

4.4 行列式的刻畫

數學上常常定義數學物件 (mathematical objects) 並探討數學物件的性質, 而我們會反過來問的一個問題是: 滿足這些性質的數學物件有哪些? 最理想的情況是這些特性也能充分反應這個數學物件; 也就是說, 滿足這些數學特性的數學物件具有唯一性。又或者說, 是否能找到一個數學物件的基本特性, 並由這幾個基本特性推出這個數學物件的所有其它性質。

若從上段文字所述的觀點出發, 配合這一章探討的行列式, 我們在前面的單元知道行列式有很多性質, 於是現在想要問的是: 在這些特性當中哪些是行列式的本質? 綜觀前面單元所介紹行列式的性質, 函數具有線性性質一定是非常重要的性質, 我們先把它用下面的定義強調出來。

定義 **1** (第 238 頁)**.** 函數 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 稱為 *n-線性函數* (n-linear function) 是指當矩陣固定其中的 $n-1$ 列, 則 δ 對於剩下的列而言是一種線性函數; 也就是說, 對每個 $p = 1, 2, \ldots, n$ 都有

$$\delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p-1} \\ \mathbf{u}+k\mathbf{v} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) = \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p-1} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + k\delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p-1} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right)。$$

例 **2** (第 239 頁)**.** 對於 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 考慮 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 為 $\delta(A) = A_{11}A_{22}\cdots A_{nn}$, 則 δ 是一個 n-線性函數。

*解***.** 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 記矩陣 A 的列為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, 給定 p 是 $1, 2, \ldots, n$ 中的一個數字, 記 $\mathbf{a}_p = \mathbf{u} + k\mathbf{v} = (u_{p1} + kv_{p1}, u_{p2} + kv_{p2}, \ldots, u_{pn} + kv_{pn})$, 其中 $k \in \mathbb{F}$。此外, 記矩陣 B 與 C 分別是將矩陣 A 的第 p 列替換為 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 而成的矩陣; 也就是說, 若矩陣 B 的列為 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$, 矩陣 C 的列為 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$, 其中 $\mathbf{b}_p = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 以及 $\mathbf{c}_p = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, 而對於 $i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$, $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i$, 則

$$\begin{aligned}
\delta(A) &= A_{11}A_{22}\cdots A_{(p-1)(p-1)}A_{pp}A_{(p+1)(p+1)}\cdots A_{nn} \\
&= A_{11}A_{22}\cdots A_{(p-1)(p-1)}(u_{pp} + kv_{pp})A_{(p+1)(p+1)}\cdots A_{nn} \\
&= A_{11}A_{22}\cdots A_{(p-1)(p-1)}u_{pp}A_{(p+1)(p+1)}\cdots A_{nn} \\
&\quad + kA_{11}A_{22}\cdots A_{(p-1)(p-1)}v_{pp}A_{(p+1)(p+1)}\cdots A_{nn} \\
&= \delta(B) + k\delta(C),
\end{aligned}$$

所以 δ 是一個 n-線性函數。

第二個想要介紹的是交錯的觀念。

定義 **3** (第 239 頁)**.** 一個 n-線性函數 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 若滿足: 當 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 存在相鄰兩列完全相同時, 則 $\delta(A) = 0$, 我們稱 δ 是 *交錯的* (alternating)。

關於交錯的定義, 只約定若矩陣存在相同的相鄰列時, 函數的取值必須為零。令人驚豔的是, 這個性質配合著 n-線性函數可以引發出行列式具有的大部分性質。

定理 4 (第 240 頁)**.** 令 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 是一個交錯的 n-線性函數。

(A) 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 且矩陣 B 是 A 的某兩列互換後所得的矩陣, 則 $\delta(B) = -\delta(A)$。

(B) 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 有某兩列相同, 則 $\delta(A) = 0$。

證明:

(A) 令 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 令 B 為 A 的第 p 列及第 q 列互換後所得的矩陣, 其中 $p < q$。我們首先證明 $q = p + 1$ 的情況。因為 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 是交錯的 n-線性函數, 所以

$$0 = \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_{p+1} \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) = \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right) + \delta\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \mathbf{a}_{p+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}\right)$$
$$= 0 + \delta(A) + \delta(B) + 0,$$

所以 $\delta(B) = -\delta(A)$。

再看 $q > p + 1$ 的情況, 令 A 的所有列為 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, 首先, $\mathbf{a}_p$ 和 $\mathbf{a}_{p+1}$ 互換, 接著再將 $\mathbf{a}_p$ 逐次和後面的列互換, 換到所有的列依次為

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_{p+1}, \ldots, \mathbf{a}_q, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{q+1}, \ldots, \mathbf{a}_n,$$

這個過程需要 $q - p$ 次相鄰列互換而得到上述結果, 接著依序將 $\mathbf{a}_q$ 與前一列互換, 直到各列依次為

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_q, \mathbf{a}_{p+1}, \ldots, \mathbf{a}_{q-1}, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{q+1}, \ldots, \mathbf{a}_n,$$

以上過程需要 $q - p - 1$ 次相鄰列互換而得出矩陣 B。於是, 我們有

$$\delta(B) = (-1)^{(q-p)+(q-p-1)}\delta(A) = -\delta(A)。$$

(B) 假設 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的第 p 列及第 q 列相同, 其中 $p < q$, 若 $q = p+1$, 因為 δ 是交錯的, 而且 A 存在相同的相鄰列, 所以 $\delta(A) = 0$。

若 $q > p+1$, 令矩陣 B 是 A 互換第 $p+1$ 列及第 q 列後所得的矩陣, 則矩陣 B 產生相同的相鄰列, 得 $\delta(B) = 0$。由 (A) 知 $\delta(B) = -\delta(A)$, 所以 $\delta(A) = 0$。

□

從交錯的 n-線性函數這兩個條件我們可以得到將矩陣的任兩列互換後函數值差負號, 還有矩陣若有某兩列相同的話函數值為零。我們可由此再推得交錯的 n-線性函數也符合將矩陣的某一列乘上倍數加到另一列之後的矩陣與原矩陣所對應到的函數值不變。

推論 **5** (第 240 頁)**.** 令 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是一個交錯的 n-線性函數, 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 若 B 是 A 的某一列乘上 k 倍加至 A 的另一列所得的矩陣, 則 $\delta(B) = \delta(A)$。

證明: 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 令 B 是將 A 的第 q 列乘上 k 倍加至第 p 列所得的矩陣, 其中 $p \neq q$, 記 C 是將 A 的第 p 列替換成第 q 列所得的矩陣, 比較 A, B, C 的每一列, 除了第 p 列以外皆相同; 此外, 矩陣 B 的第 p 列是 A 的第 p 列及 C 的第 p 列乘上 k 倍之和。

因為 δ 是交錯的 n-線性函數, 且 C 有兩列相同 (第 p 列與第 q 列), 所以

$$\delta(B) = \delta(A) + k \cdot \delta(C) = \delta(A) + k \cdot 0 = \delta(A)。$$

□

推論 **6** (第 241 頁)**.** 令 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 是一個交錯的 n-線性函數, 若 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 滿足 $\operatorname{rank}(A) < n$, 則 $\delta(A) = 0$。

證明: 將 A 的列向量以 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 表示, 若 $\operatorname{rank}(A) < n$, 則 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 線性相依; 也就是說, 存在 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 不全為零使得 $c_1 \cdot \mathbf{a}_1 + c_2 \cdot \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$。假設 $c_p \neq 0$, 則 $\mathbf{a}_p$ 可以重新表示為

$$\mathbf{a}_p = \tilde{c}_1 \cdot \mathbf{a}_1 + \cdots + \tilde{c}_{p-1} \cdot \mathbf{a}_{p-1} + \tilde{c}_{p+1} \cdot \mathbf{a}_{p+1} + \cdots + \tilde{c}_n \cdot \mathbf{a}_n,$$

其中 $\tilde{c}_i = -c_p^{-1} c_i, i = 1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n$。因為 δ 是交錯的 n-線性函數, 所以在計算 $\delta(A)$ 的時候, 先對於 $\mathbf{a}_p$ 改用上述的關係式寫出, 透過線性性質展開, 得到每個矩陣都有某兩列相同, 故有

$$\delta(A) = \tilde{c}_1 \cdot 0 + \cdots + \tilde{c}_{p-1} \cdot 0 + \tilde{c}_{p+1} \cdot 0 + \cdots + \tilde{c}_n \cdot 0 = 0。$$

□

至此, 我們已經將單元 4.1 提及行列式的性質都討論過一遍了。只需要假設函數是「n-線性」及「交錯的」這兩個條件就能得到這些性質。這裡我們註記另一件事: 假設 δ 是 n-線性函數, 若矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 有某一列的每一項皆為零, 則 $\delta(A) = 0$, 這個證明就完全類比於單元 4.1 的 推論 **7** 之證明。此外, 關於單元 4.1 的 引理 **8** 與 定理 **9** 只是行列式操作上的不同表達, 與我們現在要討論的主題無關, 故也可以不予理會。

以下要討論的是交錯的 n-線性函數作用在基本矩陣的結果。

推論 7 (第 241 頁)**.** 令 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 是一個交錯的 n-線性函數, 且令 $E_1, E_2, E_3 \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 分別為第 I 型、第 II 型、第 III 型的基本矩陣。假設 E_2 是將 I_n 的某一列乘上 k 倍後所得的矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 則 $\delta(E_1) = -\delta(I_n), \delta(E_2) = k \cdot \delta(I_n)$, 以及 $\delta(E_3) = \delta(I_n)$。

證明:

- 假設 E_1 是將單位矩陣 I_n 的第 p 列與第 q 列互換後所得的基本矩陣, 其中 $p \neq q$, 由 定理 **4** (A) 得知 $\delta(E_1) = -\delta(I_n)$。
- 假設 E_2 是將單位矩陣 I_n 的第 p 列乘上 k 倍後所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 記矩陣 A 是將單位矩陣 I_n 的第 p 列替換成零向量 $\mathbf{0}$ 所得的矩陣, 因為 δ 是 n-線性函數, 而且 A 滿足 $\operatorname{rank}(A) = n-1 < n$, 得到 $\delta(A) = 0$, 因此 $\delta(E_2) = \delta(A) + k\delta(I_n) = 0 + k\delta(I_n) = k\delta(I_n)$。
- 假設 E_3 是將單位矩陣 I_n 的第 q 列乘上 k 倍後加到第 p 列所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 記矩陣 A 是將單位矩陣 I_n 的第 p 列替換成向量 $\mathbf{e}_q$ 所得的矩陣, 因為 δ 是 n-線性函數, 而且 A 的第 p 列與第 q 列相同, 所以 $\delta(E_3) = \delta(I_n) + k\delta(A) = \delta(I_n) + k \cdot 0 = \delta(I_n)$。

□

我們的終極目標是希望能夠設定最少的條件使得滿足這些條件的函數 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 就是行列式, 即 $\delta(A) = \det(A)$ 對所有 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$。從前面的討論中我們知道「$n$-線性」還有「交錯的」是兩個重要的性質, 而我們從 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ 的證明過程中發現: 只要再確定單位矩陣具備 $\delta(I_n) = 1$ 的話, 那麼就會有 $\delta(A) = \det(A)$; 也就是說, 被用來描述行列式特徵的第三個條件是交錯的 n-線性函數對任何的 $n \times n$ 單位矩陣取值必須是 1。這裡, 我們先證明若 δ 是交錯的 n-線性函數且 $\delta(I_n) = 1$, 則矩陣相乘後的 δ 取值為各別矩陣 δ 取值後再相乘。

如此就足以證明函數 δ 與矩陣乘法這兩個操作的先後順序可以互換。

定理 8 (第 241 頁)**.** 令 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 是一個交錯的 n-線性函數滿足 $\delta(I_n) = 1$, 則對任意 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 都有 $\delta(AB) = \delta(A) \cdot \delta(B)$。

證明: 給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, 首先討論 $\operatorname{rank}(A) < n$ 的情形。由 推論 **6** 知道 $\delta(A) = 0$, 所以 $\delta(A) \cdot \delta(B) = 0$; 另一方面, 因為 $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(A) < n$, 所以 $\delta(AB) = 0$, 因此 $\delta(AB) = 0 = \delta(A) \cdot \delta(B)$。

以下討論 A 是一個基本矩陣的情形。

- 若 A 是第 I 型基本矩陣, 即 A 是將 I_n 中的某兩列互換後所得的基本矩陣, 則 $\delta(A) = -\delta(I_n) = -1$; 另一方面, 因為矩陣 AB 是 B 互換兩列後所得的矩陣, 所以
$$\delta(AB) = -\delta(B) = (-1) \cdot \delta(B) = \delta(A) \cdot \delta(B)。$$
- 若 A 是第 II 型基本矩陣, 即 A 是將 I_n 中的某一列乘以 k 之後所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 則 $\delta(A) = \delta(I_n) = k$; 另一方面, 矩陣 AB 是 B 的某一列乘上 k 後所得的矩陣, 由 δ 是 n-線性得到
$$\delta(AB) = k\delta(B) = k \cdot \delta(B) = \delta(A) \cdot \delta(B)。$$

- 若 A 是第 III 型基本矩陣, 即 A 是將 I_n 中的某一列乘以 k 之後加到另一列所得的基本矩陣, 其中 $k \in \mathbb{F}, k \neq 0$, 則 $\delta(A) = \delta(I_n) = 1$; 另一方面, 矩陣 AB 是 B 的某一列乘以 k 之後加到另一列所得的矩陣, 由 推論 **5** 得到

$$\delta(AB) = \delta(B) = 1 \cdot \delta(B) = \delta(A) \cdot \delta(B)。$$

最後討論 $\mathrm{rank}(A) = n$ 的情況。此時 A 是可逆矩陣, 而且矩陣 A 可以寫成基本矩陣的乘積, 記

$$A = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1,$$

其中 $E_1, E_2, \ldots, E_m$ 為基本矩陣, 所以

$$\begin{aligned}
\delta(AB) &= \delta(E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1 B) \\
&= \delta(E_m) \cdot \delta(E_{m-1} \cdots E_2 E_1 B) \\
&= \cdots = \delta(E_m) \cdot \delta(E_{m-1}) \cdot \cdots \cdot \delta(E_2) \cdot \delta(E_1) \cdot \delta(B) \\
&= \delta(E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1) \cdot \delta(B) = \delta(A) \cdot \delta(B)。
\end{aligned}$$

□

經過前面的鋪陳, 我們最終可以證明行列式的刻畫。

定理 9 (第 242 頁)**.** 假設 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是一個交錯的 n-線性函數滿足 $\delta(I_n) = 1$, 則對所有 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 都有 $\delta(A) = \det(A)$。

證明: 令 $\delta : M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ 是一個交錯的 n-線性函數滿足 $\delta(I_n) = 1$。給定 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$,

- 如果 $\mathrm{rank}(A) < n$, 由 推論 **6** 可知 $\delta(A) = 0$。另一方面, 因為單元 4.1 的 推論 **13** 知道 $\det(A) = 0$, 所以 $\delta(A) = \det(A)$。

- 如果 $\mathrm{rank}(A) = n$, 則 A 是可逆的, 得到矩陣 A 可以表示成基本矩陣的乘積, 記 $A = E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1$, 其中 $E_1, E_2, \ldots, E_m$ 皆為基本矩陣, 因為 $\delta(I_n) = 1$, 而且 $\delta(E_i) = \det(E_i)$ 每一個基本矩陣 $E_i, i = 1, 2, \ldots, m$ 皆成立, 所以由 推論 **7** 的 例 **1** 知: 及單元 4.2

$$\begin{aligned}
\delta(A) &= \delta(E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1) \\
&= \delta(E_m) \cdot \delta(E_{m-1}) \cdot \cdots \cdot \delta(E_2) \cdot \delta(E_1) \\
&= \det(E_m) \cdot \det(E_{m-1}) \cdot \cdots \cdot \det(E_2) \cdot \det(E_1) \\
&= \det(E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1) = \det(A)。
\end{aligned}$$

□

當 定理 **9** 證明完畢之後, 我們就可以說行列式的刻畫如下: 行列式是唯一滿足 n-線性、交錯且對所有單位矩陣取值為 1 的函數。

4.5 行列式的幾何意義

線性代數本質上是代數, 主要是在研究向量空間中結構面的問題, 透過基底還有線性變換等了解向量空間的結構與轉換的關係。而線性代數在幾何上也有非常多的呈現, 代數 (algebra) 與幾何 (geometry) 雖然是兩個不同的領域, 但在認識數學的過程中若能在這兩者之間互相切換, 彼此相輔相成的話就會對數學有更全面的樣貌。

前幾個單元介紹行列式都是從代數的層面去思考問題, 這一個單元要給出行列式的幾何意義。我們先從二階矩陣看起, 給定矩陣 $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, 不妨記

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

我們想要得到用列向量 $\mathbf{v}_1 = (a,b)$ 與 $\mathbf{v}_2 = (c,d)$ 所張出的平行四邊形面積公式; 也就是說, 我們想要建構出一個函數 $f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 使得 $f(A)$ 表示由矩陣 A 的列向量所張出的平行四邊形面積。以下討論有時為了方便起見, 我們會把函數 $f(A)$ 寫成 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 的樣式, 其中第一個部分放的是矩陣 A 第一列的向量, 而第二個部分寫的是矩陣 A 第二列的向量。

現在要觀察的是面積這個概念需符合的性質, 然後將這些性質轉化為對於函數 f 的要求。

- 考慮 $\mathbf{v}_1 = (a,b), \tilde{\mathbf{v}}_1 = (\tilde{a},\tilde{b}), \mathbf{v}_2 = (c,d)$, 由 $\mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積會是由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積與由 $\tilde{\mathbf{v}}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積之和。

  如圖 4.1 的左圖所示, 由 $\mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積是灰色區域面積, 根據補貼的原理, 把灰色區域中最上方的三角形剪下然後補貼到最下方後所成的新區域, 它可以看成由左、右兩個平行四邊形組成, 於是面積不變。而左邊的平行四邊形是由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出, 而右邊的平行四邊形是由 $\tilde{\mathbf{v}}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出。

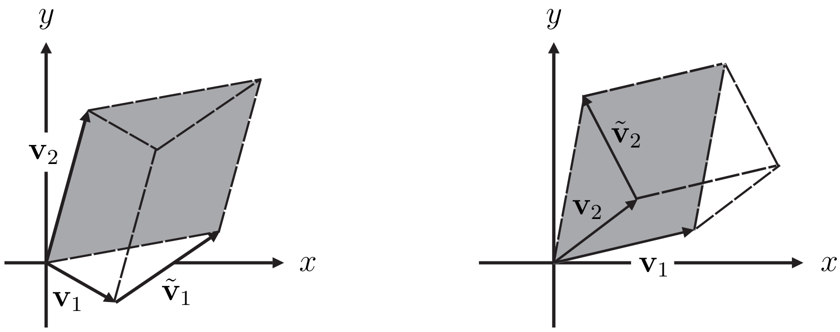


圖 4.1: 兩向量所張出的平行四邊形面積有 2-線性性質。

  若記 $\mathbf{v}_1 = (a,b), \mathbf{v}_2 = (c,d), \tilde{\mathbf{v}}_2 = (\tilde{c},\tilde{d})$, 考慮由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2$ 所張出的平行四邊形面積, 如圖 4.1 右圖的灰色區域面積, 根據補貼的原理, 將灰色區域中左邊的三角形剪下然後補貼到右邊後所成的新區域, 它可以看成由上、下兩個平行四邊形組成, 於是面積不變。而下面的平行四邊形是由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出, 而上面的平行四邊形是由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\tilde{\mathbf{v}}_2$ 所張出。

  現將上面討論的結果轉成對於函數 f 的要求, 則得到 $f(\mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + f(\tilde{\mathbf{v}}_1, \mathbf{v}_2)$ 以及 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \tilde{\mathbf{v}}_2) = f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + f(\mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2)$ 這兩個條件。

- 給定 $k \in \mathbb{R}$, 則由 $k\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積是由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積的 k 倍。過往大家對於幾何量 (長度、面積、體積) 的認識都是指非負的量, 也就是長度大小、面積大小、體積大小, 所以這些幾何量在過去的經驗中是無法接受像是面積為 -5 平方單位的說法, 但是在這裡我們希望函數 f 能夠保有線性的性質, 因為這是利用線性代數來討論事情時最重要的一個性質, 所以對於面積這個幾何量就要想一個方式將它推廣成有向面積 (或是說帶有正、負號的面積) 的概念, 一方面除了可以符合線性代數的精神, 也對於面積一事增添了新的思維, 當我們想要反應原始的幾何概念時, 只要將最後的結果再加上絕對值以形成非負的量即可。至於有向面積的規定, 這件事牽涉到定向 (orientation) 的概念, 我們留到這一個單元的最後再說明。

  同理, 給定 $k \in \mathbb{R}$, 則由 $\mathbf{v}_1$ 與 $k\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積是由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的平行四邊形面積的 k 倍。

  若是把上面的討論寫成對函數 f 的要求, 則形成 $f(k\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = kf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 以及 $f(\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2) = kf(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ 這兩個條件。

- 若 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, 則由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的區域 (其實是張不出區域) 面積為 0; 也就是說, 若 A 的兩列相同, 則必須規定 $f(A) = 0$。

- 若 $\mathbf{v}_1 = (1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1)$, 則由 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 所張出的區域面積為 1; 也就是說, 若 A 是單位矩陣, 則必須規定 $f(A) = 1$。

由上面的討論結合單元 4.4 關於行列式的刻畫, 我們得到 $f(A) = \det(A)$。所以矩陣 A 的行列式之幾何意義是在計算由列向量所張出的平行四邊形的有向面積。

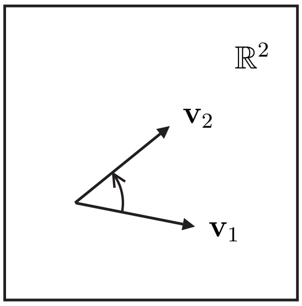
這裡我們進行以下幾個註記:

(A) 前面的討論我們是對於 2×2 矩陣的行列式給予幾何意義, 這件事情可以很自然地推廣至一般 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的情況, 例如在 3×3 矩陣的時候, 其行列式會對應於三個列向量張出的有向平行六面體體積, 至於維度再更高的時候, $n \times n$ 矩陣的行列式會對應於 n 個列向量所張出的有向 n-維立體體積。

(B) 正如前面幾個單元關於行列式的討論, 一開始都是先從列向量的觀點討論, 當一個矩陣與其轉置後的矩陣兩者的行列式相同被證明了之後, 所有關於行列式的觀點都可以改採用行向量為出發點, 於是一個 $n \times n$ 矩陣的行列式之幾何意義也可以解讀成由 n 個行向量張出的有向 n-維立體體積。

(C) 給定矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 若我們把 A 的列向量想成是由標準有序基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 經過形變 (線性變換) 後所得的產物, 那麼矩陣 A 的行列式之幾何意義可以想成是由單位體積 (因為將 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 組出來的矩陣是單位矩陣, 而我們又有 $\det(I_n) = 1$) 的一種增長量。從這樣的想法出發, 我們可以把它和多變數微積分的變數變換以及雅可比行列式 (Jacobian determinant) 相對應; 也就是說, 雅可比行列式就是在說明坐標變換下單位 n-維立體經形變之後體積的線性增長倍率。

當一個幾何形體 (在這裡是指平行四邊形、平行六面體或是 n-維立體) 賦予有正有負的面積或體積時, 這件事開拓了數學上另一個新局。在 $\mathbb{R}^n$ 上給定一組有序基底 $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, 將這些向量以列的方式組成矩陣 $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 若 $\det(A) > 0$, 我們說這組基底是具有 *正的定向* (positive orientation), 若 $\det(A) < 0$, 我們說這組基底是具有 *負的定向* (negative orientation)。以 $\mathbb{R}^2$ 為例, 有序基底 $\beta = \{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\}$ 是正的定向, 而 $\beta' = \{\mathbf{e}_2 = (0,1), \mathbf{e}_1 = (1,0)\}$ 是負的定向。關於正、負定向在圖形上的解讀如下: 因為向量 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 張出 $\mathbb{R}^2$, 所以 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 不平行 (不會線性相依), 所以 $\mathbf{v}_1$ 與 $\mathbf{v}_2$ 有一個小於 180° 的夾角, 以此夾角來看, 從第一個向量指向第二個向量的關係是呈現逆時針走向的話, 那麼這組有序基底是正的定向; 若第一個向量順時針指向第二個向量的話, 那麼這組有序基底是負的定向, 如圖 4.2 所示。



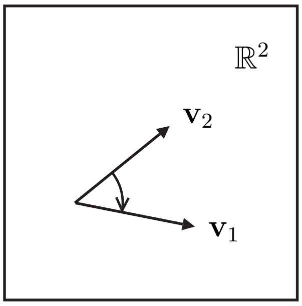
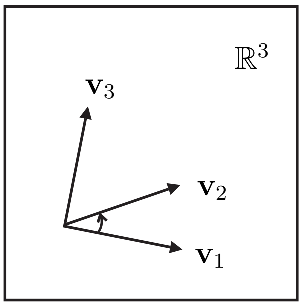


圖 4.2: 左圖: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 是正的定向。右圖: $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ 是負的定向。

在 $\mathbb{R}^3$, 關於有序基底 $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 的正、負定向的也可以直觀地給出判讀: 如圖 4.3 的左圖所示, 若由第一個向量指向第二個向量時, 第三個向量的方向符合右手定則 (右手除了姆指外的四隻手指先指向 $\mathbf{v}_1$, 然後手指彎曲指向 $\mathbf{v}_2$, 而姆指的方向與 $\mathbf{v}_3$ 一致) 的話, 則 $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是具有正的定向。若是考慮有序基底 $\beta' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$, 對照圖 4.3 的右圖, 若由第一個向量指向第二個向量時, 第三個向量的方向符合左手定則 (左手除了姆指外的四隻手指先指向 $\mathbf{v}_2$, 然後手指彎曲指向 $\mathbf{v}_1$, 而姆指的方向與 $\mathbf{v}_3$ 一致) 的話, 則 $\beta' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ 是具有負的定向。



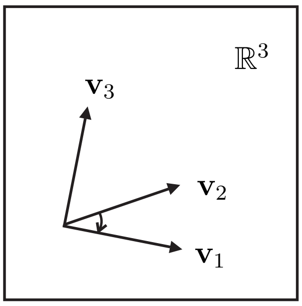


圖 4.3: 左圖: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ 是正的定向。右圖: $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ 是負的定向。

基底的正、負定向在數學上的很多場合都會用到, 最經典的例子是在微分幾何 (differential geometry) 領域中關於定積分這個概念必須建立在討論的數學物件上要是可定向的流形 (orientable manifold) 才能有良好的定義 (well-defined)。所謂的 n-維流形是把我們對於幾何物件 (曲線、曲面、實體乃至於在愛因斯坦眼中關於時空的模型) 抽象化後所定義出的數學名詞, 局部來說每一個小區域的長

像會和 n-維的歐氏空間中的一個區域 (半徑為 $r > 0$ 的 n-維實體內部) 差不多, 而流形是透過些小區域拼貼而成的形體, 因為每一個小區域都可以給予坐標系去描述流形上的點, 而在兩個區域重疊之處, 我們就必須要求兩組不同的坐標系要有一致性, 所謂的一致性就是要求兩個坐標系的雅可比行列式為正, 如此兩組坐標系有同樣的定向關係。

一個流形, 單從任兩個區域在重疊的地方要求要有同樣的定向, 但是這些區域不斷串接下, 有沒有可能再繞回與一開始的區域重疊然後造成定向不一致呢? 令人驚訝的是, 這種情況的確有可能發生, 各位或許有聽過莫比烏絲帶 (Möbius strip), 它就是一個這段文字想描述的不可定向的 2-維曲面 (non-orientable surface)。這裡我們把曲面的可定向性給出定義。

(A) 一個正則曲面 S 稱為 *可定向的* (orientable) 如果存在一組可以覆蓋 S 的坐標鄰域滿足: 若 $p \in S$ 屬於某兩個坐標鄰域下, 則坐標變換的雅可比行列式為正。這種選擇方法稱為 S 的一個 *定向* (orientation)。

(B) 一個正則曲面 S 若不存在上述性質的坐標鄰域則稱曲面是 *不可定向的* (non-orientable)。

對於一個可定向的曲面, 根據定向的關係可知這個曲面會有兩個面 (two-sided surface), 像是一顆球的表皮可以說內部與外部, 一個平面可以說正面或反面, 此時, 選定一種定向的關係後, 我們可以在可定向的曲面上操作積分並給出流形上的微積分理論; 而莫比烏絲帶是不可定向的曲面, 該曲面無法區分內外或正反, 我們說莫比烏絲帶只有一個面 (one-sided surface), 而不可定向的曲面就無法良好定義積分的概念。

這裡我們只給出一個簡單的介紹, 讓大家了解定向在數學上的發展, 各位若對這個主題感興趣的話, 可再去尋找一些相關的資料延伸閱讀。