1

向量空間

這一章主要是介紹線性代數理論中想要研究的數學物件: 向量空間 (vector space)。中學時期不論是物理課或是數學課都曾經提及向量的概念還有一些向量的操作與特性, 我們在單元 1.1 會舉幾個經典例子, 並從這些過往的經驗出發綜整出向量的性質。

數學上我們會把一個概念用抽象的語言描述它, 這麼做的用意是我們可以對此做更廣泛的應用, 對於熟知的有理數系 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$、實數系 $(\mathbb{R},+,\cdot)$、或是複數系 $(\mathbb{C},+,\cdot)$, 將它們共同的特性去蕪存菁地整理出來便抽象化成為體 (field) 的概念。單元 1.2 將介紹體的基本運算與性質, 而這裡只會提及線性代數會用到的內容以建立其預備知識。

將前兩個單元結合就成了單元 1.3 向量空間的定義。這時, 熟知的歐氏空間自然是向量空間的例子。此外還有更多的例子, 比方說函數空間或是無窮數列所成的空間, 當我們把函數或是無窮數列想像成一個向量, 那麼它們所屬的空間也會形成向量空間的結構, 這樣的思維就會引起很大的作用, 若我們研究清楚向量空間的結構, 自然可以了解像是函數空間或是無窮數列所成的空間之結構。而我們會在單元 1.4 證明一些向量空間中基本且常用的性質。

向量空間中有些特別的子集合也具有向量空間的結構, 這樣的子集合我們稱為子空間 (subspace), 這是在單元 1.5 要探討的內容, 這個單元將給出判斷向量空間的子集合形成子空間的充分必要條件, 並且給出一些子空間的例子。

透過向量加法或是純量乘法可發現向量空間中的向量彼此之間的關聯, 這樣就引出線性組合 (linear combination) 的想法, 這是單元 1.6 要討論的內容。而我們感興趣的問題是在向量空間中我們要怎麼選取某些向量就可以生成出這個向量空間, 而且如果可以的話, 我們要選出愈精簡 (元素個數愈少) 的集合以生成出向量空間。針對這個問題就必須仔細探討子集合當中向量之間的依賴關係, 從單元 1.7 有關線性相依 (linearly dependent) 與線性獨立 (linearly independent) 的討論, 還給出從線性獨立集再添加一個向量後變成線性相依集的充分必要條件, 然後過渡到單元 1.8 引進基底 (basis) 與維度 (dimension) 的概念, 就可以很清楚地知道有限維向量空間的主要結構: 基底是張出向量空間的骨架, 而維度代表基底的個數。介紹完向量空間的理論後, 單元 1.9 則是針對幾個特別的有限維向量空間做進一步的討論。

線性代數絕大多數是討論有限維向量空間, 對於無窮維向量空間的理論則是泛函分析 (functional analysis) 的範疇, 故這裡就不對無窮維向量空間著墨太多。而各位在初學階段, 對於向量空間佈於的體來說, 可先從實數系 $\mathbb{R}$ 作為認識理論的第一步, 之後再研究不同的體對向量空間在結構上的差異。

1.1 歐氏空間中的向量

各位初次接觸向量 (vector) 並使用向量解決問題, 想必來自於兩種場合: 一個是高中物理在學習牛頓力學 (Newtonian mechanics) 的時候, 比方說有一個質量為 m 的物體靜止於一個斜面, 其中斜面與地面之間的傾斜角為 θ, 如圖 1.1 所示:

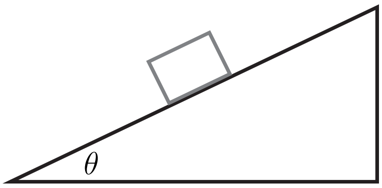

圖 1.1: 想了解為何物體會靜止於斜面。

為了理解物體靜止不動而不會滑落至底部, 我們把物體所受的重力 (大小為 mg) 用一個指向下的向量表示, 如圖 1.2 的左圖所示。另一方面, 斜面給予物體一個正向力 (大小記為 N), 這個正向力垂直於斜面並指向上; 此外, 斜面對於物體有一個靜摩擦力 (大小記為 f_r), 摩擦力的方向與斜面平行, 並指向上方。而物體靜止將對應於這三個力達成靜力平衡。

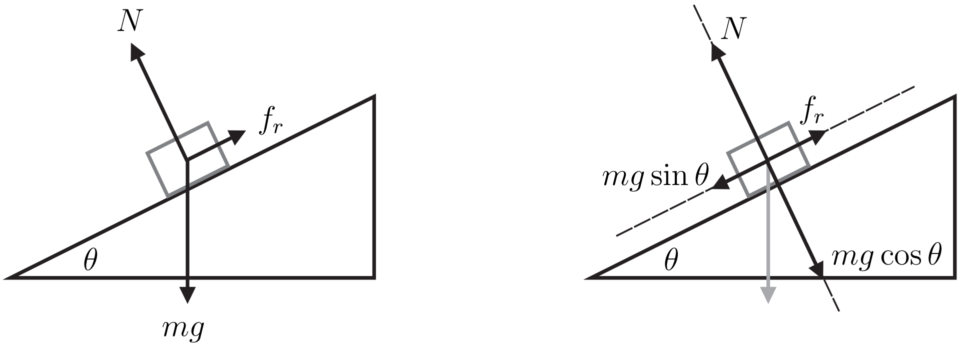

圖 1.2: 由力學原理可知物體靜止於斜面的原因。

若將重力對於平行斜面的方向與垂直於斜面的方向進行力的分解, 如圖 1.2 的右圖所示, 兩虛線分別平行與垂直於斜面, 而指向下且大小為 mg 的向量 (圖中的灰色向量) 分解為沿兩虛線方向的兩向量組合, 靜力平衡告知平行於斜面的力會抵消且垂直於斜面的力也會抵消, 於是這些力的大小有以下關係式:

$$\begin{cases} mg\cos\theta = N \\ mg\sin\theta = f_r\text{。} \end{cases}$$

關於這個問題還可以繼續追問的是物體從靜止狀態即將下滑的瞬間之力學原理, 在物理上就會引進靜摩擦係數、動摩擦係數等物理量以解釋其現象, 而那些內容是物理學探討的部分, 所以我們對此問題就暫時說到這裡。

另外一個場合則是高中數學課, 那個時候不僅對於平面向量還有空間向量都進行討論, 其中一部分內容是著重在向量的操作, 另有一部分內容提供了新觀點以處理不同的數學問題。這裡舉兩個經典的例子。

例 **1.** 如圖 1.3, 平面上有 A, P, B 三點共線, 其中 $\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$, 而 O 為坐標中心, 試證分點公式:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}。$$

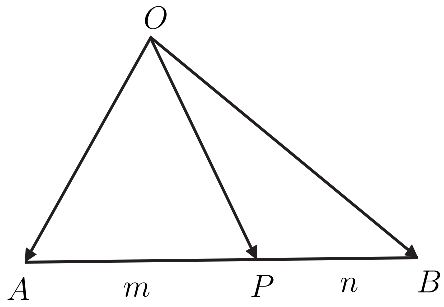

圖 1.3: 分點公式。

解**.** 將 $\overrightarrow{OP}$ 改寫, 得到

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \\ &= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}。\end{aligned}$$

例 **2.** 若 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 且 $x + 2y - 2z = 6$, 試求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值。此時, 產生最小值的點 (x, y, z) 為何?

解**.** 考慮向量 $\mathbf{u} = (x, y, z)$ 與 $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, 由柯西不等式 (Cauchy inequality)

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$$

得到

$$(x + 2y - 2z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + (-2)^2) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{36}{9} = 4,$$

而等號成立若且唯若 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 平行, 故解

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-2} \overset{令}{=} k,$$

因為 $x + 2y - 2z = 7$, 所以 $9k = 6$, 得到 $k = \frac{2}{3}$, 於是 $(x, y, z) = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$, 此時 $x^2 + y^2 + z^2$ 有最小值 4。

從過往的經驗, 可見得各位在開始學習線性代數之前就已經對向量的操作有一定的認識。那麼, 線性代數到底在學些什麼呢? 為了引出這門學科的核心理論, 現在想要從剛才的例子仔細觀察各位目前所認知的向量。

為了簡便起見, 這裡我們就以平面中的向量進行探討, 像是 例 **2** 借助了 $\mathbb{R}^3$ 中的空間向量處理問題, 而各位也清楚地知道, 我們可以很自然地把向量的概念對於維度進行類推。

向量是一個幫助我們記錄方向與大小的一個數學物件, 圖像化的方式有助於我們理解並且能有直觀的思維看待所要研究的數學。我們會把具有同樣指向並且同樣大小的向量視為一樣的向量, 就算向量的始點與終點的位置不同, 比方說圖 1.4 中的三個向量是視為一樣的。

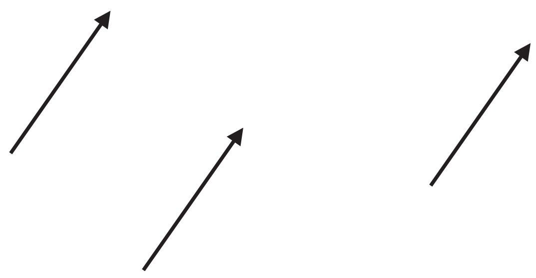

圖 1.4: 圖中的三個向量視為相同。

在討論牛頓力學的問題中, 我們用到了向量的拆解, 實際上向量更基本的概念是要如何將兩個向量相加。所謂兩個向量 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 相加就是先把向量 $\mathbf{v}$ 的始點接在向量 $\mathbf{u}$ 的終點, 然後得到從 $\mathbf{u}$ 的始點指向 $\mathbf{v}$ 的終點的向量, 記成 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, 如圖 1.5 所示, 這樣認識兩向量相加的過程稱為三角形法。

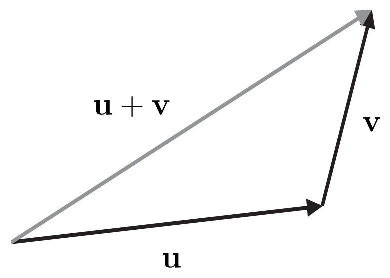

圖 1.5: 用三角形法理解向量的加法。

關於向量的註記, 如果我們在平面上標記點的所在位置, 如 例 **1** 在平面上標記 O, A, B, P 之後, 我們也會將向量用 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{AB}$ 等方式表達。所以像 例 **1** 解題的第一步 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ 就是用到向量相加的概念。

平常數字相加具有交換律 (commutative law), 而現在所討論的向量加法也具有交換律, 從圖 1.6 中可以看出這個性質, 因為先 $\mathbf{u}$ 後 $\mathbf{v}$ 的向量與先 $\mathbf{v}$ 後 $\mathbf{u}$ 的向量可組出一個平行四邊形, 而 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{v}+\mathbf{u}$ 代表同樣的向量。

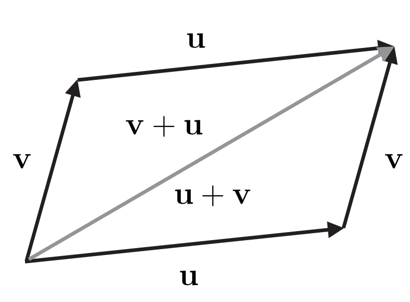

圖 1.6: 向量加法具有交換律。

就如數字的加法具有結合律 (associative law), 向量加法也具有結合律:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}),$$

這個性質從圖形來看也很容易理解, 如圖 1.7 所示:

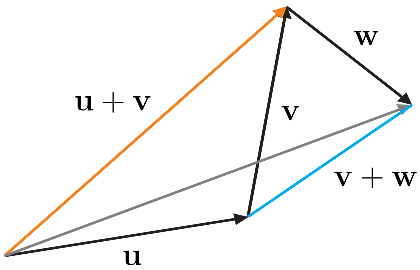

圖 1.7: 向量加法具有結合律。

始點和終點在同一個位置的向量稱為零向量 (zero vector), 記成 $\mathbf{0}$, 在圖形上是用一個點去呈現它而不會再加上箭頭的記號 (實際上我們也無法對於零向量指定方向)。既然零向量的始點與終點都是位在同一個位置, 所以對任何向量 $\mathbf{u}$ 來說, 都有 $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$。

給定一個向量 $\mathbf{u}$, 考慮對於 $\mathbf{u}$ 來說由終點指向始點的向量, 比方說記為 $\mathbf{v}$, 那麼就有 $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 如圖 1.8 所示。此時, 我們會說向量 $\mathbf{v}$ 是向量 $\mathbf{u}$ 的加法反元素。

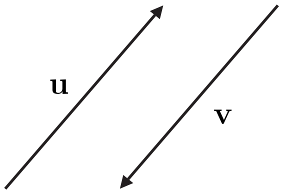

圖 1.8: 向量加法反元素。

向量除了有加法的運算系統外, 我們也可以對於一個向量 $\mathbf{u}$ 乘上倍數, 數學上稱之為對於向量進行純量乘法。在平面中, 我們乘上的倍數可以是實數 $c\in\mathbb{R}$。如果一個非零向量 $\mathbf{u}$ 乘上正的倍數 $c\in\mathbb{R}, c>0$, 得到的新向量 $c\cdot\mathbf{u}$ 和原向量同方向, 而長度是向量 $\mathbf{u}$ 的 c 倍。若 $c<0$, 則 $c\cdot\mathbf{u}$ 會指向與原向量相反的方向, 而長度是向量 $\mathbf{u}$ 長度的 $|c|$ 倍。若 $c=1$, 自然有 $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$。圖 1.9 的左圖示意這段文字相應的概念, 至於右圖欲說明的是向量的純量乘法具有結合律 (associative law): 對於 $a,b\in\mathbb{R}$ 與向量 $\mathbf{u}$, 我們有 $(a\cdot b)\cdot\mathbf{u}=a\cdot(b\cdot\mathbf{u})$。

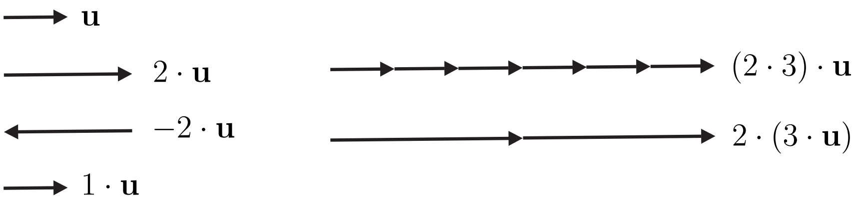

圖 1.9: 向量的純量乘法與純量乘法的結合律。

向量加法與向量的純量乘法有一些交互作用, 數學上稱為分配律 (distributive law), 由於數字可以相加也可以相乘, 向量可以相加也可以乘上純量, 所以關於分配律就產生了兩種情形, 一種是純量乘法對向量加法的分配律: $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$, 另一種是純量加法對向量進行純量乘法的分配律: $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$, 在圖形上的呈現如圖 1.10 所示。

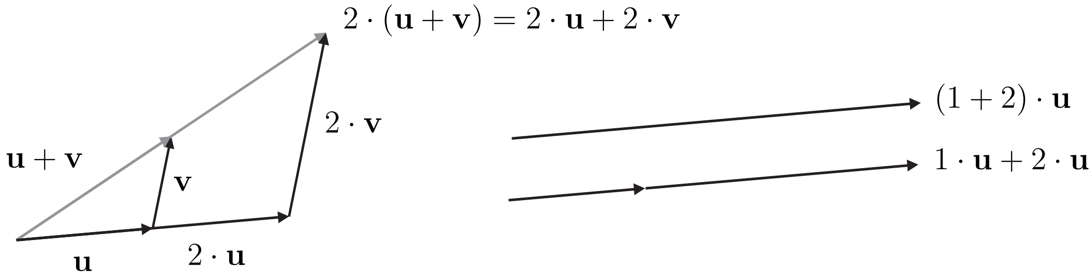

圖 1.10: 純量乘法對向量加法的分配律以及純量加法對向量進行純量乘法的分配律。

介紹完向量的運算規則後, 各位不妨回到 例 **1** 的計算過程中確實了解每一步驟用到哪一個向量運算規則。

向量的操作中還有一些其它的結構, 像是 例 **2** 的解題過程中就用到兩向量的內積 (inner product), 內積的引進可以幫助我們知道兩向量之間的夾角還有向量的長度。注意到最一開始在分辨兩向量是否一樣的時候, 我們是不需要用到內積就可以判定。除了內積以外, 各位在中學的數學課程中應該還學到兩向量的外積 (cross product), 只是這裡我們就暫且不提。

說到這裡, 我想大家對於線性代數所要討論的數學物件並不會感到陌生, 只是接下來要討論的內容並不只是停留在當初那些中學所學到的向量計算, 而是要徹底研究向量所成的集合搭配向量加法與純量乘法的結構性。

1.2 體的概念

這一個單元想要綜整出有理數系 $\mathbb{Q}$、實數系 $\mathbb{R}$、複數系 $\mathbb{C}$ 在四則運算下所具有的共同特性, 將這些重要的規則羅列出來隨即就抽象化產生體 (field) 的概念。在介紹完體之後, 我們會討論體的一些性質。關於體的認識, 到時候會對應於如何將向量進行純量乘法。

關於體的理論, 雖然這是在代數課 (algebra) 才會學到的內容, 而到那個時候不僅會研究體的結構, 還會再問一些更深刻的數學問題, 這裡只是想要給出在學習線性代數理論時需要知道的預備知識, 這些內容在這個單元介紹過後將視為已知的結果。

定義 **1** (第 552 頁)**.** 所謂 *體* (field) $\mathbb{F}$ 是指一個集合附帶兩種運算: *加法運算* (addition) $+$ 以及 *乘法運算* (multiplication) $\cdot$ 使得對任意 $a, b \in \mathbb{F}$ 都存在唯一元素 $a + b \in \mathbb{F}$ 以及存在唯一元素 $a \cdot b \in \mathbb{F}$, 並且具有以下的運算規則:

($\mathbb{F}_{+\mathrm{C}}$) *加法交換律* (commutative law): 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$, $a + b = b + a$。

($\mathbb{F}_{+\mathrm{A}}$) *加法結合律* (associative law): 對所有 $a, b, c \in \mathbb{F}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$。

($\mathbb{F}_{+\mathrm{Id}}$) *加法單位元素* (additive identity): 存在元素 $0 \in \mathbb{F}$ 使得對所有 $a \in \mathbb{F}$, $a + 0 = 0 + a = a$。

($\mathbb{F}_{+\mathrm{Iv}}$) *加法反元素* (additive inverse): 每個元素 $a \in \mathbb{F}$ 都存在另一元素 $b \in \mathbb{F}$ 使得 $a+b = b+a = 0$。

($\mathbb{F}_{\cdot\mathrm{C}}$) *乘法交換律* (commutative law): 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$, $a \cdot b = b \cdot a$。

($\mathbb{F}_{\cdot\mathrm{A}}$) *乘法結合律* (associative law): 對所有 $a, b, c \in \mathbb{F}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$。

($\mathbb{F}_{\cdot\mathrm{Id}}$) *乘法單位元素* (multiplicative identity): 存在元素 $1 \in \mathbb{F}$ 使得對所有 $a \in \mathbb{F}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$。

($\mathbb{F}_{\cdot\mathrm{Iv}}$) *乘法反元素* (multiplicative inverse): 每個元素 $a \in \mathbb{F}, a \neq 0$ 都存在另一元素 $b \in \mathbb{F}$ 使得 $a \cdot b = b \cdot a = 1$。

($\mathbb{F}_{\cdot+\mathrm{D}}$) *乘法對加法的分配律* (distributive law): 對所有 $a, b, c \in \mathbb{F}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$。

此時, 元素 $a + b$ 稱為 a 與 b 的 *和* (sum), 而元素 $a \cdot b$ 稱為 a 與 b 的 *積* (product)。

在不引起混淆的情況下, 我們會將乘法符號略去; 也就是說, 我們有時會將 $a \cdot b$ 簡寫成 ab, 而 $a \cdot (b + c)$ 會簡寫成 $a(b + c)$。

例 **2.** 有理數系 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$、實數系 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ 與複數系 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 都是體的例子。在線性代數課程中, 上述規則可直接拿來使用。至於數系 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ 的建構, 會在數學導論 (Introduction to Mathematics) 的課程中介紹。

注意到: 目前我們關心的是運算規則, 像是 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 中有更複雜的結構 (比方說 $\mathbb{R}$ 中有實數的完備性, 或是 $\mathbb{C}$ 中有代數基本定理) 並非現在討論的議題。

除了上述的幾個例子外, 各位或許會問: 是否還有其它體的例子呢? 若我們花力氣把這些性質歸納出來, 又繼續建構理論, 卻只能應用在這三個情況的話, 效益好像不是那麼大。實際上, 體的例子還有很多, 以下再介紹兩個例子。

例 **3.** 考慮集合 $V=\{a+b\sqrt{3}|a,b\in\mathbb{Q}\}$, 在 V 中引進如同實數系 $\mathbb{R}$ 當中的加法 $+$ 與乘法 $\cdot$, 則 $(V,+,\cdot)$ 形成一個體。

證明: 首先探討加法和乘法對於集合 V 的封閉性: 若 $x=a_1+b_1\sqrt{3}, y=a_2+b_2\sqrt{3}\in V$, 其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$, 則

$$x+y=a_1+b_1\sqrt{3}+a_2+b_2\sqrt{3}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3},$$

因為 $a_1+a_2\in\mathbb{Q}, b_1+b_2\in\mathbb{Q}$, 所以 $x+y\in V$; 此外, 因為

$$\begin{aligned}x\cdot y&=(a_1+b_1\sqrt{3})\cdot(a_2+b_2\sqrt{3})=a_1a_2+a_1b_2\sqrt{3}+b_1a_2\sqrt{3}+3b_1b_2\\&=(a_1a_2+3b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{3},\end{aligned}$$

因為 $a_1a_2+3b_1b_2\in\mathbb{Q}, a_1b_2+b_1a_2\in\mathbb{Q}$, 所以 $x\cdot y\in V$。

再來要檢查體的所有規則:

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{C}})$ 若 $x=a_1+b_1\sqrt{3}, y=a_2+b_2\sqrt{3}\in V$, 則

$$x+y=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\sqrt{3}=y+x,$$

故加法交換律成立。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{A}})$ 若 $x=a_1+b_1\sqrt{3}, y=a_2+b_2\sqrt{3}, z=a_3+b_3\sqrt{3}\in V$, 則

$$\begin{aligned}(x+y)+z&=((a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3})+(a_3+b_3\sqrt{3})\\&=((a_1+a_2)+a_3)+((b_1+b_2)+b_3)\sqrt{3}\\&=(a_1+(a_2+a_3))+(b_1+(b_2+b_3))\sqrt{3}=x+(y+z),\end{aligned}$$

故加法結合律成立。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{Id}})$ 考慮 $0=0+0\sqrt{3}\in V$, 則對所有 $x=a+b\sqrt{3}\in V$ 都有

$$x+0=(a+0)+(b+0)\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}=x,$$

故加法單位元素存在。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{Iv}})$ 對於 $x=a+b\sqrt{3}\in V$, 考慮 $y=-a+(-b)\sqrt{3}\in V$, 則

$$x+y=(a+(-a))+(b+(-b))\sqrt{3}=0+0\sqrt{3}=0,$$

故加法反元素存在。

($\mathbb{F}._{\mathrm{C}}$) 若 $x=a_1+b_1\sqrt{3}\in V, y=a_2+b_2\sqrt{3}\in V$, 則

$$x\cdot y=(a_1a_2+3b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{3}=(a_2a_1+3b_2b_1)+(a_2b_1+b_2a_1)\sqrt{3}=y\cdot x,$$

故乘法交換律成立。

($\mathbb{F}._{\mathrm{A}}$) 若 $x=a_1+b_1\sqrt{3}, y=a_2+b_2\sqrt{3}, z=a_3+b_3\sqrt{3}\in V$, 則

$$\begin{aligned}&(x\cdot y)\cdot z\\ =&((a_1a_2+3b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{3})\cdot(a_3+b_3\sqrt{3})\\ =&((a_1a_2+3b_1b_2)a_3+3(a_1b_2+b_1a_2)b_3)+((a_1a_2+3b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3)\sqrt{3},\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&x\cdot(y\cdot z)\\ =&(a_1+b_1\sqrt{3})\cdot((a_2a_3+3b_2b_3)+(a_2b_3+b_2a_3)\sqrt{3})\\ =&(a_1(a_2a_3+3b_2b_3)+3b_1(a_2b_3+b_2a_3))+(a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3+3b_2b_3))\sqrt{3},\end{aligned}$$

比較不帶有 $\sqrt{3}$ 的部分,

$$\begin{aligned}(a_1a_2+3b_1b_2)a_3+3(a_1b_2+b_1a_2)b_3&=a_1a_2a_3+3b_1b_2a_3+3a_1b_2b_3+3b_1a_2b_3\\&=a_1(a_2a_3+3b_2b_3)+3b_1(a_2b_3+b_2a_3),\end{aligned}$$

再比較帶有 $\sqrt{3}$ 的部分,

$$\begin{aligned}((a_1a_2+3b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3)\sqrt{3}&=(a_1a_2b_3+3b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)\sqrt{3}\\&=a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3+3b_2b_3),\end{aligned}$$

得到 $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$, 故乘法結合律成立。

($\mathbb{F}._{\mathrm{Id}}$) 考慮 $1=1+0\sqrt{3}\in V$, 則對所有 $x=a+b\sqrt{3}\in V$ 都有

$$x\cdot 1=(a+b\sqrt{3})\cdot(1+0\sqrt{3})=(a\cdot 1+3b\cdot 0)+(a\cdot 0+b\cdot 1)\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}=x,$$

故乘法單位元素存在。

($\mathbb{F}._{\mathrm{Iv}}$) 對於 $x=a+b\sqrt{3}\in V$, 其中 a,b 不全為零, 考慮 $y=\frac{a}{a^2-3b^2}+\frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\in V$, 則

$$\begin{aligned}x\cdot y&=(a+b\sqrt{3})\cdot\left(\frac{a}{a^2-3b^2}+\frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\right)\\&=\left(a\cdot\frac{a}{a^2-3b^2}+3b\cdot\left(\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)\right)+\left(a\cdot\left(\frac{-b}{a^2-3b^2}\right)+b\cdot\frac{a}{a^2-3b^2}\right)\sqrt{3}\\&=1+0\sqrt{3}=1,\end{aligned}$$

所以乘法反元素存在。

$(\mathbb{F}._{+\mathrm{D}})$ 若 $x = a_1 + b_1\sqrt{3}, y = a_2 + b_2\sqrt{3}, z = a_3 + b_3\sqrt{3} \in V$, 則

$$\begin{aligned}
x \cdot (y+z) &= (a_1 + b_1\sqrt{3}) \cdot ((a_2+a_3) + (b_2+b_3)\sqrt{3}) \\
&= (a_1(a_2+a_3) + 3b_1(b_2+b_3)) + (a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3))\sqrt{3} \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3 + 3b_1b_2 + 3b_1b_3) + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)\sqrt{3} \\
&= (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{3} + (a_1a_3 + 3b_1b_3) + (a_1b_3 + b_1a_3)\sqrt{3} \\
&= x \cdot y + x \cdot z,
\end{aligned}$$

故乘法對加法的分配律成立。

綜合上述討論, 我們得知 $(V, +, \cdot)$ 是一個體。 □

在 例 **3** 中, 因為要檢查很多條件, 所以我們花了很大的篇幅驗證 $(V = \{a+b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$ 形成一個體, 而在這個過程中勢必要得到一些心得, 比方說:

(A) 對初學者來說, 這部分有很多結果是熟知的, 甚至是用心算或是眼睛看就能馬上知道的結果, 或許就會覺得這些內容很冗長而感到不耐煩。注意到和代數相關課程在初期都會從一些最基本的規則出發, 然後逐步建構其理論, 雖然論證過程顯得漫長, 但各位應該要從中清楚知道每一個步驟成立的原因是什麼。

(B) 各位若花時間仔細證明複數系 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ 形成一個體, 會意識到這個證明的過程和 例 **3** 的證明是類似的, 比方說把上述證明帶有 $\sqrt{3}$ 的部分都替換成 $\sqrt{-1}$; 此外, 在 例 **3** 中, a, b 必須限定為有理數, 這樣可避免和 $\sqrt{3}$ 有同類型的量結合, 至於複數 $z = x + y\sqrt{-1}$ 中的 x, y 可允許是實數, 它們和 $\sqrt{-1}$ 不會有同類型的量結合。

(C) 在檢查 $(\mathbb{F}._{\mathrm{Iv}})$ 條件的時候, 關於 $x = a + b\sqrt{3}$ 所選取的 $y = \frac{a}{a^2-3b^2} + \frac{-b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}$, 這時你可能會問: 分母 $a^2 - 3b^2$ 是否有可能為 0? 如果分母為 0, 那麼所寫下的 y 就是一個沒有意義的記號。

實際上, 我們可以證明: 對所有 $a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 3b^2 \neq 0$。這個論證的手法類似於證明 $\sqrt{2}$ 不是有理數, 以下給出證明: 假設存在 $a, b \in \mathbb{Q}$, 其中 a, b 不全為零, 使得 $a^2 - 3b^2 = 0$, 首先可確定的是 a, b 皆不為零 (若其中一個為 0, 代入 $a^2 - 3b^2 = 0$ 之後將導致另一者必為 0, 矛盾)。令 $a = \frac{p_a}{q_a}, b = \frac{p_b}{q_b}$, 其中 $p_a, p_b, q_a, q_b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, 且 $(p_a, q_a) = 1, (p_b, q_b) = 1$, 於是 $a^2 - 3b^2 = 0$ 可整理成 $\frac{p_a^2}{q_a^2} = 3\frac{p_b^2}{q_b^2}$, 或寫成 $p_a^2 q_b^2 = 3p_b^2 q_a^2$。

現將 p_a, p_b, q_a, q_b 進行質因數分解, 並且將左式與右式有成對出現的整數都約掉, 最終可寫成 $p_1^2 p_2^2 \cdots p_n^2 = 3p_{n+1}^2 p_{n+2}^2 \cdots p_{n+m}^2$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots, p_{n+m}$ 皆不相等。因為 $p_1^2 p_2^2 \cdots p_n^2 = 3p_{n+1}^2 p_{n+2}^2 \cdots p_{n+m}^2$, 得到 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 中有某一個數必為 3, 假設 $p_1 = 3$, 代入並重新整理之後得到 $3p_2^2 \cdots p_n^2 = p_{n+1}^2 p_{n+2}^2 \cdots p_{n+m}^2$, 於是 $p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots, p_{n+m}$ 中必有某一個數字為 3, 這和 $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \ldots, p_{n+m}$ 皆不相等矛盾。故對所有 $a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 3b^2 \neq 0$ 成立。

例 **4.** 考慮 $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 並定義加法 $+$ 與乘法 $\cdot$ 如下:

加法 $+$	$0+0=0$	$0+1=1$	$1+0=1$	$1+1=0$
乘法 $\cdot$	$0 \cdot 0 = 0$	$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 1 = 1,$

則 $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ 形成一個體。

證明: 我們逐一檢視體的條件。首先注意到: 由加法與乘法的定義已明確告知加法與乘法的封閉性。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{C}})$ 由規則 $0+1=1=1+0$ 得知加法交換律成立。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{A}})$ 若要檢查加法結合律, 應討論以下幾種情況:

- $(0+0)+1=0+1=1$ 而 $0+(0+1)=0+1=1$, 兩者相等。
- $(0+1)+0=1+0=1$ 而 $0+(1+0)=0+1=1$, 兩者相等。
- $(0+1)+1=1+1=0$ 而 $0+(1+1)=0+0=0$, 兩者相等。
- $(1+0)+0=1+0=1$ 而 $1+(0+0)=1+0=1$, 兩者相等。
- $(1+0)+1=1+1=0$ 而 $1+(0+1)=1+1=0$, 兩者相等。
- $(1+1)+0=0+0=0$ 而 $1+(1+0)=1+1=0$, 兩者相等。
- $(0+0)+0=0+(0+0)$ 與 $1+(1+1)=1+(1+1)$ 由加法交換律得知。

故加法結合律成立。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{Id}})$ 因為 $0+0=0$ 以及 $0+1=1$, 所以 0 是加法單位元素。

$(\mathbb{F}_{+\mathrm{Iv}})$ 因為 $0+0=0$, 所以 0 的加法反元素是 0; 因為 $1+1=0$, 所以 1 的加法反元素是 1。

$(\mathbb{F}_{\cdot\mathrm{C}})$ 由規則 $0 \cdot 1 = 0 = 1 \cdot 0$ 得知乘法交換律成立。

$(\mathbb{F}_{\cdot\mathrm{A}})$ 若要檢查乘法結合律, 則須驗證以下情形:

- $(0 \cdot 0) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ 而 $0 \cdot (0 \cdot 1) = 0 \cdot 0 = 0$, 兩者相等。
- $(0 \cdot 1) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ 而 $0 \cdot (1 \cdot 0) = 0 \cdot 0 = 0$, 兩者相等。
- $(0 \cdot 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ 而 $0 \cdot (1 \cdot 1) = 0 \cdot 1 = 0$, 兩者相等。
- $(1 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ 而 $1 \cdot (0 \cdot 0) = 1 \cdot 0 = 0$, 兩者相等。
- $(1 \cdot 0) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ 而 $1 \cdot (0 \cdot 1) = 1 \cdot 0 = 0$, 兩者相等。
- $(1 \cdot 1) \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$ 而 $1 \cdot (1 \cdot 0) = 1 \cdot 0 = 0$, 兩者相等。
- $(0 \cdot 0) \cdot 0 = 0 \cdot (0 \cdot 0)$ 與 $1 \cdot (1 \cdot 1) = 1 \cdot (1 \cdot 1)$ 由乘法交換律得知。

故乘法結合律成立。

($\mathbb{F}_{\cdot\,\mathrm{Id}}$) 因為 $1 \cdot 0 = 0$ 以及 $1 \cdot 1 = 1$, 所以 1 是乘法單位元素。

($\mathbb{F}_{\cdot\,\mathrm{Iv}}$) 因為 $1 \cdot 1 = 1$, 所以 1 的乘法反元素是 1, 故乘法反元素存在。

($\mathbb{F}_{\cdot\,+\mathrm{D}}$) 若 $a = 0$, 不論 b, c 為何, $a \cdot (b + c) = 0$, 而 $a \cdot b + a \cdot c = 0 + 0 = 0$, 故乘法對加法的分配律成立。若 $a = 1$, 不論 b, c 為何, $a \cdot (b + c) = b + c$, 而 $a \cdot b + a \cdot c = b + c$, 故乘法對加法的分配律亦成立。

綜合上述討論, 我們得知 $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ 形成一個體。 □

註 5. 關於 例 **4** 的討論, 我們給出以下幾個註記:

(A) 給定 p 是質數 (prime number), 考慮 $(\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}, +, \cdot)$, 其中兩數相加還有兩數相乘的規則是先照自然數的加法與乘法運算, 再求除以 p 的餘數。仿照上述的方式可證明 $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ 是一個體。

注意到 p 必須為質數的時候 $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ 才會形成一個體。可以想一想為什麼 p 不是質數時無法形成體的結構? 在證明的過程中應能發現若 p 不是質數時, 有些規則不會成立。

(B) 因為 $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ 的元素個數有限, 我們把它稱為 有限體 (finite field)。

在線性代數的課程中, 我們最常使用的是實數體 $\mathbb{R}$, 之後的討論雖然我們會用體 $\mathbb{F}$ 的記號表達, 各位在初學階段可以先以實數體 $\mathbb{R}$ 為例仔細體會線性代數, 日後再探討其它體的情形。

回想中學時期處理數學問題的時候, 我們用到一些除了上述九個運算規則的其它性質, 這些額外的規則都可以透過體的九個規則推得。又或者說, 凡是不在體的規則當中的其它性質都需要被證明。比方說, 在體當中的加法與乘法具有消去律, 而消去律是需要加以驗證的。

定理 **6** (消去律, Cancellation Laws, 第 554 頁). 假設 $a, b, c \in \mathbb{F}$,

(A) 若 $a + c = b + c$, 則 $a = b$。

(B) 若 $a \cdot c = b \cdot c$, 且 $c \neq 0$, 則 $a = b$。

證明:

(A) 對於 c 來說, 存在 $d \in \mathbb{F}$ 使得 $c + d = 0$, 將等式 $a + c = b + c$ 兩邊加上 d 之後得到 $(a + c) + d = (b + c) + d$, 因為左式為 $(a + c) + d = a + (c + d) = a + 0 = a$, 右式為 $(b + c) + d = b + (c + d) = b + 0 = b$, 於是 $a = b$。

(B) 對於 $c \neq 0$ 來說, 存在 $f \in \mathbb{F}$ 使得 $c \cdot f = 1$, 將等式 $a \cdot c = b \cdot c$ 兩邊同乘 f 之後得到 $(a \cdot c) \cdot f = (b \cdot c) \cdot f$, 因為左式為 $(a \cdot c) \cdot f = a \cdot (c \cdot f) = a \cdot 1 = a$, 右式為 $(b \cdot c) \cdot f = b \cdot (c \cdot f) = b \cdot 1 = b$, 於是 $a = b$。

□

註 7. 根據體的交換律, 我們也可以得到「若 $c+a=c+b$, 則 $a=b$」以及「若 $c\cdot a=c\cdot b$ 且 $c\neq 0$, 則 $a=b$」這兩個結果。

當我們再次回顧體的規則, 關於加法單位元素、加法反元素、乘法單位元素、乘法反元素, 都只提及存在性。在體的結構中, 會有不只一個加法單位元素與乘法單位元素嗎? 而會有某個元素具有不只一個加法反元素或是乘法反元素嗎? 透過加法與乘法的消去律, 我們可以證明加法單位元素、加法反元素、乘法單位元素、乘法反元素的唯一性。

以下先證明加法單位元素與乘法單位元素的唯一性。

定理 8 (第 554 頁)**.** 在體 $(\mathbb{F},+,\cdot)$ 中, 加法單位元素 0 與乘法單位元素 1 是唯一的。

證明:

(A) 若 0 滿足對所有 $a\in\mathbb{F}, 0+a=a$ 而 $0'$ 也滿足對所有 $a\in\mathbb{F}, 0'+a=a$, 則 $0+a=0'+a$, 由加法消去律得知 $0=0'$。

(B) 若 1 滿足對所有 $a\in\mathbb{F}, 1\cdot a=a$ 而 $1'$ 也滿足對所有 $a\in\mathbb{F}, 1'\cdot a=a$, 則 $1\cdot a=1'\cdot a$, 由乘法消去律得知 $1=1'$。

□

再來要探討的是加法反元素與乘法反元素的唯一性。

定理 9 (第 554 頁)**.** 對於 $a\in\mathbb{F}$, 滿足 $a+b=b+a=0$ 的元素 b 是唯一的。對於 $a\in\mathbb{F}, a\neq 0$, 滿足 $a\cdot c=c\cdot a=1$ 的元素 c 是唯一的。

證明:

(A) 給定 $a\in\mathbb{F}$, 若有 $b,d\in\mathbb{F}$ 使得 $a+b=b+a=0$ 以及 $a+d=d+a=0$ 皆成立, 則 $b+a=d+a$, 根據加法消去律, 得到 $b=d$。

(B) 給定 $a\in\mathbb{F}, a\neq 0$, 若有 $f,g\in\mathbb{F}$ 使得 $a\cdot f=f\cdot a=1$ 以及 $a\cdot g=g\cdot a=1$ 皆成立, 則 $f\cdot a=g\cdot a$, 根據乘法消去律, 得到 $f=g$。

□

小學的時候, 我們常常說數字可以進行「四則運算」, 可是在體的建構當中, 怎麼只有加法和乘法兩個運算呢? 減法和除法的概念又從何而來? 經過上述的鋪陳, 現在可以對這個問題此進行解釋: 因為任何數字的加法反元素有唯一性, 而任何非零數字的乘法反元素也有唯一性, 現將 a 的加法反元素記為 $-a$, 而對於 $a\neq 0$ 的乘法反元素記為 a^{-1}。為了日後操作的方便起見, 定義減法 $-$ 的運算是: 給定 $a,b\in\mathbb{F}$, 則 $a-b\overset{\text{定義}}{=\!=}a+(-b)$, 另定義除法 $/$ 的運算是: 給定 $a,b\in\mathbb{F}, b\neq 0$, 則 $a/b\overset{\text{定義}}{=\!=}a\cdot b^{-1}$。這就是減法與除法的由來。

關於數字的運算還有一些大家都非常熟知的結果, 至於這些性質也都是要逐一推導並驗證的, 現陳述如下:

定理 10 (第 555 頁)**.** 假設 $a, b \in (\mathbb{F}, +, \cdot)$, 則有以下結果*:*

(A) $-(-a) = a$*;* 若 $a \neq 0$, $(a^{-1})^{-1} = a$。

(B) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$。

(C) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$。

(D) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$。

證明:

(A) 因為 $(-a) + a = a + (-a) = 0$, 所以 a 是 $-a$ 的加法反元素; 另一方面, 我們又將 $-a$ 的加法反元素記為 $-(-a)$, 由反元素的唯一性得知: $-(-a) = a$。

若 $a \neq 0$, 因為 $a \cdot a^{-1} = 1$, 所以 a 是 a^{-1} 的乘法反元素; 另一方面, 我們又將 a^{-1} 的乘法反元素記為 $(a^{-1})^{-1}$, 由反元素的唯一性得知: $(a^{-1})^{-1} = a$。

(B) 從 $0 \cdot a$ 出發, 一方面, $0 \cdot a = 0 + 0 \cdot a$, 另一方面, $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, 所以 $0 + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$, 由加法消去律得知: $0 = 0 \cdot a$。

(C) 因為 $a \cdot b + (-a) \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = 0 \cdot b = 0$, 所以 $(-a) \cdot b$ 是 $a \cdot b$ 的加法反元素; 另一方面, $a \cdot b$ 的加法反元素又記成 $-(a \cdot b)$, 由反元素的唯一性得知: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$。

因為 $a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot 0 = 0$, 所以 $a \cdot (-b)$ 是 $a \cdot b$ 的加法反元素; 另一方面, $a \cdot b$ 的加法反元素又記成 $-(a \cdot b)$, 由反元素的唯一性得知: $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$。

(D) 考慮

$$\begin{aligned}
(b + (-b)) \cdot (a + (-a)) &= (b + (-b)) \cdot a + (b + (-b)) \cdot (-a) \\
&= a \cdot (b + (-b)) + (-a) \cdot (b + (-b)) \\
&= a \cdot b + a \cdot (-b) + (-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b) = 0,
\end{aligned}$$

因為 $a \cdot (-b)$ 是 $a \cdot b$ 的加法反元素, 所以 $a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$, 又由 (C) 得知 $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$, 所以 $-(a \cdot b) + (-a) \cdot (-b) = 0$, 這說明 $(-a) \cdot (-b)$ 是 $-(a \cdot b)$ 的加法反元素, 也就是 $a \cdot b$, 故 $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$。

$\square$

1.3 向量空間

單元 1.1 我們複習了歐氏空間中的向量, 在單元 1.2 介紹體這個代數結構, 這一個單元要開始建構向量空間的理論, 首先要將那些不可或缺的數學性質明確地條列出來。

數學家經過長時間地思索後, 最終認定以下敘述是向量空間的最基本要素。

定義 1 (第 6 頁)**.** 我們說 $(V, \mathbb{F})$ 是一個 *向量空間* (vector space) 是指集合 V 中帶有兩種運算: $+$ 稱為 *向量加法* (vector addition) 與 $\cdot$ 稱為 *純量乘法* (scalar multiplication) 使得對任何 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 都存在唯一元素 $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V$ 以及對任何 $c \in \mathbb{F}$ 與任何 $\mathbf{u} \in V$ 都存在唯一元素 $c \cdot \mathbf{u} \in V$ 並且以下條件成立:

(V1) 對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 滿足 $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$。 (加法交換律)

(V2) 對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 滿足 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$。 (加法結合律)

(V3) 存在 $\mathbf{0} \in V$ 使得對所有 $\mathbf{u} \in V$ 都有 $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{u} = \mathbf{u}$。 (加法單位元素)

(V4) 對所有 $\mathbf{u} \in V$ 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{0}$。 (加法反元素)

(V5) 對所有 $\mathbf{u} \in V$, 都有 $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$。 (純量乘法單位元素)

(V6) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} \in V$, 都有 $(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$。 (純量乘法的結合律)

(V7) 對所有 $a \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, 都有 $a \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$。(純量乘法對向量加法的分配律)

(V8) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} \in V$, 都有 $(a+b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$。(純量加法對純量乘法的分配律)

此時, 我們說元素 $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{u}$ 與 $\mathbf{v}$ 的 *和* (sum), 而元素 $c \cdot \mathbf{u}$ 稱為 c 與 $\mathbf{u}$ 的 *積* (product)。

定義完向量空間之後, 有以下幾個註記:

(1) 關於體 $\mathbb{F}$ 中的元素我們稱為 *純量* (scalar), 而向量空間 V 中的元素我們稱為 *向量* (vector)。

(2) 各位在初學向量空間的階段時, 不妨先以 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 體會向量空間的理論, 待你已經熟悉線性代數的精神之後再專心研究 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 或是更一般的體 (例如 $\mathbb{Z}_p$) 的情形。

(3) 關於純量乘法, 在不引起任何誤會之下, 我們會略去 $\cdot$ 這個記號。

(4) 中學時期在學習平面向量與空間向量的時候, 我們會使用兩向量的內積 (inner product) 去討論一些事情 (例如求得兩向量的夾角、計算向量的長度...... 等), 但是在上述向量空間的定義中, 並沒有出現任何與內積相關的內容。在線性代數的理論發展中, 我們把內積視為一個額外的結構; 也就是說, 在目前所設定的八個條件而形成的向量空間來說, 就已經有非常豐富的例子, 也有很多數學結構可以探討, 所以這裡就不把內積再放進來討論, 到後期我們才會介紹內積的概念以及內積對於向量空間給出什麼樣的影響。

以下我們舉一些向量空間的例子。

例 **2** (第 8 頁)**.** 考慮 $\mathbb{F}^n$, 它是指將 n 個 $\mathbb{F}$ 中的元素有序地排列所形成的集合, 即

$$\mathbb{F}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) | u_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \dots, n\},$$

我們將 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 稱為 n-序組 (n-tuple)。定義兩個 n-序組 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ 與 $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 相等 (equal) 若且唯若 $u_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$。

現在 $\mathbb{F}^n$ 中分別定義向量加法與純量乘法的運算為坐標的加法與坐標的純量乘法; 也就是說, 給定 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ 而 $c \in \mathbb{F}$, 定義

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \quad \text{與} \quad c \cdot \mathbf{u} = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, \dots, c \cdot u_n),$$

則 $\mathbb{F}^n$ 是一個向量空間。注意到: 這裡或以後只寫 $\mathbb{F}^n$ 是一種簡記, 實際上它表示的是分佈於體 $\mathbb{F}$ 的向量空間 $(\mathbb{F}^n, \mathbb{F})$。

證明: 以下將檢驗向量空間的每一個條件:

(V1) 對所有 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ 都有

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) = \mathbf{v} + \mathbf{u}\text{。}$$

(V2) 對所有 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ 都有

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) \\
&= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2, \dots, (u_n + v_n) + w_n) \\
&= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2), \dots, u_n + (v_n + w_n)) \\
&= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\text{。}
\end{aligned}$$

(V3) 存在 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n$ 使得對所有 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{F}^n$ 都有

$$(u_1 + 0, u_2 + 0, \dots, u_n + 0) = (0 + u_1, 0 + u_2, \dots, 0 + u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

而這件事意味著 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$。

(V4) 對所有 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{F}^n$, 考慮 $\mathbf{v} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \in \mathbb{F}^n$, 則

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \\
&= (u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2), \dots, u_n + (-u_n)) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \dots, u_n - u_n) \\
&= (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}\text{。}
\end{aligned}$$

(V5) 對所有 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n$, 都有

$$1 \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2, \dots, 1 \cdot u_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathbf{u}\text{。}$$

(V6) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} \in \mathbb{F}^n$, 都有

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = (a \cdot b) \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) &= ((a \cdot b) \cdot u_1, (a \cdot b) \cdot u_2, \ldots, (a \cdot b) \cdot u_n) \\ &= (a \cdot (b \cdot u_1), a \cdot (b \cdot u_2), \ldots, a \cdot (b \cdot u_n)) \\ &= a \cdot (b \cdot u_1, b \cdot u_2, \ldots, b \cdot u_n) = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})。\end{aligned}$$

(V7) 對所有 $a \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, 都有

$$\begin{aligned}a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= a \cdot (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \\ &= (a \cdot (u_1 + v_1), a \cdot (u_2 + v_2), \ldots, a \cdot (u_n + v_n)) \\ &= (a \cdot u_1 + a \cdot v_1, a \cdot u_2 + a \cdot v_2, \ldots, a \cdot u_n + a \cdot v_n) \\ &= (a \cdot u_1, a \cdot u_2, \ldots, a \cdot u_n) + (a \cdot v_1, a \cdot v_2, \ldots, a \cdot v_n) \\ &= a \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) + a \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}。\end{aligned}$$

(V8) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{F}^n$, 都有

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot \mathbf{u} = (a + b) \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) &= ((a + b) \cdot u_1, (a + b) \cdot u_2, \ldots, (a + b) \cdot u_n) \\ &= (a \cdot u_1 + b \cdot u_1, a \cdot u_2 + b \cdot u_2, \ldots, a \cdot u_n + b \cdot u_n) \\ &= (a \cdot u_1, a \cdot u_2, \ldots, a \cdot u_n) + (b \cdot u_1, b \cdot u_2, \ldots, b \cdot u_n) \\ &= a \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) + b \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n) = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}。\end{aligned}$$

由上述討論得知 $\mathbb{F}^n$ 是一個向量空間。 $\square$

在之後的討論中, 我們有時候會把 $\mathbb{F}^n$ 中的元素用 行向量 (column vector)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

的方式表達, 在某些場合中也可能用 列向量 (row vector)

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

的方式表達。將向量寫成行向量或列向量的用意是可以和接下來要介紹的矩陣結合。矩陣在線性代數理論中是相當重要的數學物件, 日後我們會探討向量空間之間的線性變換時, 矩陣表示將具體呈現該理論對應到的數學概念, 以此可在矩陣上給出運算以充分了解線性結構。矩陣除了可以回答線性變換的議題之外, 各位可能更為熟知的會是有關解聯立方程式這方面的討論。總之, 現在要開始正式給出矩陣相關的定義。

定義 3 (第 8 頁). 對於一個體 $\mathbb{F}$, 我們從體 $\mathbb{F}$ 中選出一些數將它排列成 $m\times n$ 矩陣 ($m\times n$ matrix) 的樣式; 也就是說, 考慮

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 $a_{ij}\in\mathbb{F}, i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$。

關於矩陣, 有以下幾個術語必須約定:

(A) 當 $i=j$, 我們稱 a_{ij} 為矩陣的 對角元素 (diagonal entries)。

(B) 元素 $a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{in}$ 組成矩陣的 第 i 列 (i-th row), 而矩陣的所有列被視為 $\mathbb{F}^n$ 中的向量。而元素 $a_{1j},a_{2j},\ldots,a_{mj}$ 組成矩陣的 第 j 行 (j-th column)。而矩陣的所有行被視為 $\mathbb{F}^m$ 中的向量。

(C) 若矩陣中的每一個元素皆為零的時候, 我們稱矩陣為 零矩陣 (zero matrix), 記作 O。

(D) 本講議以 A,B,C 表示矩陣, 並以 A_{ij} 表示矩陣 A 中位於第 i 列第 j 行的元素。

(E) 若 $m=n$ 我們稱矩陣為 方陣 (square matrix)。

(F) 兩個 $m\times n$ 矩陣 A,B 若其所有對應的元素皆相等, 即對所有 $i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n$ 都有 $A_{ij}=B_{ij}$。則稱兩矩陣 相等 (equal)。

例 **4** (第 9 頁). 考慮所有選自體 $\mathbb{F}$ 的 $m\times n$ 矩陣所成的集合, 記為 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 定義以下向量加法與純量乘法: 對於 $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 與 $c\in\mathbb{F}$,

$$(A+B)_{ij}=A_{ij}+B_{ij} \quad 與 \quad (cA)_{ij}=cA_{ij}, \text{ 其中 } i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n,$$

則 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是一個向量空間。

證明: 由 例 **2** 知道 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 是一個向量空間, 對於 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_{m\times n})\in\mathbb{F}^{m\times n}$, 將這個向量的位置重新排列成矩陣的樣貌, 其中前 n 個置於第一列, 第 $n+1$ 到第 $2n$ 個置於第二列, 在每 n 個排成下一列之後, 重新標記下標還有向量的記號為

$$U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix},$$

在檢驗向量空間的所有條件中, 牽涉到的運算只與自身的位置有關, 故將 $\mathbf{u}$ 的每個位置重新擺放下並不會影響其規則, 故 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 是一個向量空間。 $\square$

前面的兩個例子或許各位覺得很自然, 實際上在之後的線性代數理論中, 我們也會利用矩陣的方式去呈現一般的理論。而向量空間的例子遠比想像中的還要多很多, 以下將介紹幾個不同面貌的向量空間的例子。

例 **5** (第 9 頁)**.** 考慮 $I = [a, b]$, 記 $F(I, \mathbb{R})$ 是所有由 $I = [a, b]$ 映至 $\mathbb{R}$ 的函數, 其中兩個函數 $f, g \in F(I, \mathbb{R})$ 被定義為相等的意思是: 對所有 $x \in [a, b]$ 都有 $f(x) = g(x)$。若對於集合 $F(I, \mathbb{R})$ 定義

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ 與 } (cf)(x) = c \cdot f(x), c \in \mathbb{R},$$

則 $F(I, \mathbb{R})$ 是一個向量空間。

證明: 以下將檢驗向量空間的每一個條件:

(V1) 對所有 $f, g \in F(I, \mathbb{R})$ 都有

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) + (g + f)(x)\text{。}$$

(V2) 對所有 $f, g, h \in F(I, \mathbb{R})$ 都有

$$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)\text{。}\end{aligned}$$

(V3) 定義 $0 \in F(I, \mathbb{R})$ 為 $0(x) = 0$ 對所有 $x \in I$, 則對所有 $f \in F(I, \mathbb{R})$ 都有

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) = 0(x) + f(x) = (0 + f)(x)$$

(V4) 對所有 $f \in F(I, \mathbb{R})$, 考慮 $g \in F(I, \mathbb{R})$, 其中 $g(x) = -f(x)$, 則對所有 $x \in I$, 都有

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - g(x) = 0 = 0(x),$$

(V5) 對所有 $f \in F(I, \mathbb{R})$, 都有

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)\text{。}$$

(V6) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $f \in F(I, \mathbb{R})$, 都有

$$((a \cdot b) \cdot f)(x) = (a \cdot b) \cdot f(x) = a \cdot (b \cdot f(x)) = a \cdot (b \cdot f)(x)\text{。}$$

(V7) 對所有 $a \in \mathbb{F}$ 以及任何 $f, g \in F(I, \mathbb{R})$, 都有

$$a \cdot (f + g)(x) = a \cdot (f(x) + g(x)) = a \cdot f(x) + a \cdot g(x) = (a \cdot f)(x) + (a \cdot g)(x)\text{。}$$

(V8) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $f \in F(I, \mathbb{R})$, 都有

$$((a+b)\cdot f)(x) = (a+b)\cdot f(x) = a\cdot f(x) + b\cdot f(x) = (a\cdot f)(x) + (b\cdot f)(x)。$$

由上述討論得知 $F(I, \mathbb{R})$ 是一個向量空間。 □

各位在學習數學的時候, 對於函數的認識或許會是以圖形的方式去認識它, 而線性代數的特色是要去研究函數所形成的空間的結構性, 並不是研究單一函數的行為 (變數改變而函數值的起伏); 也就是說, 在線性代數的課程中, 我們要把一個函數 $f(x)$ 想像成它是一根向量, 函數 $g(x)$ 想成是另一根向量, 而 $(f+g)(x)$ 想成是這兩個向量的相加, 而 $(cf)(x)$ 想成是向量 $f(x)$ 伸縮 c 倍之後而得的向量。

例 **6** (第 11 頁)**.** 所謂在 $\mathbb{F}$ 中的一個 數列 (sequence) 是指由正整數 $\mathbb{N}$ 映至 $\mathbb{F}$ 的一個函數 σ; 也就是說, 數列是指

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{N} &\to \mathbb{F}\\ n &\mapsto a_n,\end{aligned}$$

一般來說, 我們會將數列記成 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$。

記 V 是所有數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 所成的集合, 假設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是兩數列, 而 $c \in \mathbb{F}$, 定義

$$\begin{aligned}\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}\\ c\cdot\{a_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{c\cdot a_n\}_{n=1}^{\infty},\end{aligned}$$

則 $(V, \mathbb{F})$ 形成一個向量空間。

證明: 以下將檢驗向量空間的每一個條件:

(V1) 對所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ 都有

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n + a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} + \{a_n\}_{n=1}^{\infty}。$$

(V2) 對所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$ 都有

$$\begin{aligned}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) + \{c_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} + \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_n + b_n) + c_n\}_{n=1}^{\infty}\\ &= \{a_n + (b_n + c_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{(b_n + c_n)\}_{n=1}^{\infty}\\ &= \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + (\{b_n)\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n)\}_{n=1}^{\infty})。\end{aligned}$$

(V3) 存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 其中 $z_n \equiv 0$ 使得對所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 都有

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + 0\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0 + a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} + \{a_n\}_{n=1}^{\infty}。$$

(V4) 對所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 考慮 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 則

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n + (-a_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}。$$

(V5) 對所有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 都有

$$1 \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1 \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}。$$

(V6) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 都有

$$(a \cdot b) \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(a \cdot b) \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot (b \cdot a_n)\}_{n=1}^{\infty} = a \cdot \{(b \cdot a_n)\}_{n=1}^{\infty}。$$

(V7) 對所有 $a \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 都有

$$\begin{aligned} a \cdot (\{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) &= a \cdot (\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot (a_n + b_n)\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \{a \cdot a_n + a \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{a \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty} \\ &= a \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + a \cdot \{b_n\}_{n=1}^{\infty}。 \end{aligned}$$

(V8) 對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in V$, 都有

$$\begin{aligned} (a+b) \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} &= \{(a+b)a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot a_n + b \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} \\ &= a \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + b \cdot \{a_n\}_{n=1}^{\infty}。 \end{aligned}$$

由上述討論得知 $(V, \mathbb{F})$ 是一個向量空間。 □

定義 7 (第 9 頁)**.** 係數分佈於體 $\mathbb{F}$ 的 *多項式* (polynomial) 是指

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 n 是非負整數, 而 $a_k \in \mathbb{F}, k = 1, 2, \ldots, n$ 稱為 x^k 的 *係數* (coefficient)。若 $f(x) = 0$; 也就是說, $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_0 = 0$, 此時稱 $f(x)$ 為 *零多項式* (zero polynomial)。

介紹完多項式的概念, 我們需要對於多項式的一些特性給予特別的名詞, 故有下面定義:

定義 8 (第 10 頁)**.**

(A) 一個多項式的 *次數* (degree) 是指 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 中出現 x 的最大指數使其具有非零指數。為方便起見, 我們規定零多項式的次數是 -1。而零次多項式形如 $f(x) = c$, 其中 $c \neq 0$。

(B) 兩個多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 與 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 稱為 *相等* (equal) 如果 $m = n$ 且 $a_k = b_k, k = 1, 2, \ldots, n$。

例 **9** (第 10 頁)**.** 考慮 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 與 $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$ 是係數佈於體 $\mathbb{F}$ 的兩個多項式, 假設 $m\leq n$, 這時有 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$, 故將 $g(x)$ 表示為

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0。$$

現定義

$$(f+g)(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$

以及對任意 $c\in\mathbb{F}$, 定義

$$(cf)(x)\overset{\text{定義}}{=\!=}c(f(x))=(ca_n)x^n+(ca_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(ca_1)x+(ca_0),$$

在這樣的加法與純量乘法運算下, 所有係數佈於體 $\mathbb{F}$ 的多項式所成的集合是一個向量空間, 記為 $P(\mathbb{F})$。

證明: 若要證明所有係數佈於體 $\mathbb{F}$ 的多項式所成的集合 $P(\mathbb{F})$ 是一個向量空間, 各位可以確實從向量空間的八個條件逐一驗證。而這裡採用的方式是借助數列所形成的向量空間推得我們要的結果。

首先, 對於 例 **6** 有關數列的概念, 我們可以調整指標的記號為 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$; 也就是說, 我們可以考慮以下映射

$$\begin{aligned}\sigma:\mathbb{N}\cup\{0\}&\to\mathbb{F}\\ k\quad&\mapsto a_k,\end{aligned}$$

當我們只是把下標的記號前部移前一個單位, 這樣的重新註記並不會影響向量加法與係數乘法的運算, 所以這個空間仍然是向量空間。

給定多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 我們把多項式的係數用數列的方式記錄它; 也就是說, 考慮 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, 其中當 $k=0,1,2,\ldots,n$ 時, $a_k=a_n$, 當 $k>n$ 時, 定義 $a_k=0$。注意到多項式的加法是將同樣次數的係數相加, 而係數乘法則是逐項都乘上係數倍, 這與現在考慮的數列加法的係數乘法完全一致。因此多項式所成的集合 $P(\mathbb{F})$ 是一個向量空間。 □

前面介紹了很多向量空間的例子, 以下要討論的是: 哪些空間不會形成向量空間? 要如何確定一個空間並非向量空間?

例 **10** (第 11 頁)**.** 假設 $S=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$。對於 $(x_1,y_1),(x_2.y_2)\in S$ 以及 $c\in\mathbb{R}$, 定義

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1-y_2)\text{ 以及 }c(x_1,y_1)=(cx_1,cy_1),$$

則 S 在上述的運算之下不會形成一個向量空間。

解**.** 因為 $(x_2,y_2)+(x_1,y_1)=(x_2+x_1,y_2-y_1)=(x_1+x_2,-(y_1-y_2))\neq(x_1+x_2,y_1-y_2)=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$, 而 $-(y_1-y_2)$ 與 y_1-y_2 相等只有在 $y_1-y_2=0$ 的時候成立, 並非對所有的 $y_1,y_2\in\mathbb{R}$ 皆成立, 故 S 並非向量空間。

當我們要說一個集合搭配加法與純量乘法的運算下並非向量空間, 只要從中找到某一個條件不成立即可, 不需要每一個都驗證。實際上, 關於 例 **10** 來說, 有三個條件不成立。

- 上面的討論是根據向量加法交換律不成立得知 S 並非向量空間。
- 向量加法的結合律在這個情況也不會成立。對於 $\mathbf{u}=(x_1,y_1),\mathbf{v}=(x_2,y_2),\mathbf{w}=(x_3,y_3)\in S$, 一方面,

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}&=((x_1,y_1)+(x_2,y_2))+(x_3,y_3)=(x_1+x_2,y_1-y_2)+(x_3,y_3)\\&=((x_1+x_2)+x_3,(y_1-y_2)-y_3)=(x_1+x_2+x_3,y_1-y_2-y_3),\end{aligned}$$

  另一方面,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})&=(x_1,y_1)+((x_2,y_2)+(x_3,y_3))=(x_1,y_1)+(x_2+x_3,y_2-y_3)\\&=(x_1+(x_2+x_3),y_1-(y_2-y_3))=(x_1+x_2+x_3,y_1-y_2+y_3),\end{aligned}$$

  若要有 $y_1-y_2-y_3=y_1-y_2+y_3$, 必須 $y_3=0$, 並非對所有 $y_3\in\mathbb{R}$ 都成立。

- 向量加法之單位元素不存在。假設 $\mathbf{u}=(x_1,y_1)\in S$, 想要找 $\mathbf{0}=(x_2,y_2)$, 其中 $x_2,y_2\in\mathbb{R}$ 待定, 從 $\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$, 得到 $(x_2+x_1,y_2-y_1)=(x_1,y_1)$, 第一個式子得到 $x_2=0$, 但第二個式子給出 $2y_1=y_2$, 在 $y_1\in\mathbb{R}$ 之下, y_2 並非一個固定的數, 所以向量加法單位元素不存在。

1.4 向量空間的運算與性質

這一個單元想要討論幾個有關向量空間的性質。同樣地, 在學習這個單元的時候, 應專注於如何只透過向量空間的規則而推得一些我們熟知的結果。

首先注意到: 向量空間的八個條件中, 向量加法單位元以及向量加法反元素都只提及存在性, 而沒有說唯一性; 也就是說, 向量加法單位元與向量加法反元素的唯一性是可以透過向量空間的規則證明出來的。從前一個單元討論體的性質應該可以體會到向量加法單位元與向量加法反元素唯一性的成立是基於一個更根本的性質: 消去律, 所以我們要先建立向量加法的消去律。

定理 1 (向量加法的消去律, Cancellation Law for Vector Addition, 第 11 頁). 假設 $(V, \mathbb{F})$ 是向量空間, 若 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ 滿足 $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, 則 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$。同樣地, 若 $\mathbf{w} + \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$, 則 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$。

證明: 因為存在元素 $\mathbf{z} \in V$ 使得 $\mathbf{w} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$, 於是

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}。$$

同樣地, 我們有

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = (\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = (\mathbf{w} + \mathbf{u}) + \mathbf{z} \\ &= (\mathbf{w} + \mathbf{v}) + \mathbf{z} = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{z} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}。 \end{aligned}$$

□

觀察向量空間的第三個條件: 存在 $\mathbf{0} \in V$ 使得對所有 $\mathbf{u} \in V$ 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, 它表明零向量 (向量加法單位元素) 的存在性, 以下要證明的是零向量的唯一性。

定理 2 (零向量的唯一性, 第 11 頁). 滿足對所有 $\mathbf{u} \in V$ 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ 的零向量 $\mathbf{0}$ 是唯一的。

證明: 假設有另一個向量 $\mathbf{0}' \in V$ 滿足對所有對所有 $\mathbf{u} \in V$ 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, 則 $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{u} + \mathbf{0}$, 由向量加法的消去律 (定理 1) 得到 $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$。 □

觀察向量空間的第四個條件: 對所有 $\mathbf{u} \in V$ 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$。它表明向量加法反元素的存在性, 以下要證明的是向量加法反元素的唯一性。

定理 3 (加法反元素的唯一性, 第 12 頁). 在向量空間 $(V, \mathbb{F})$ 中, 對於 $\mathbf{u} \in V$, 滿足 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 的向量 $\mathbf{v}$ 唯一。

證明: 對於 $\mathbf{u} \in V$, 假設有 $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ 滿足 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ 以及 $\mathbf{u} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$, 則 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$, 由向量加法的消去律 (定理 1) 得到 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$。 □

一旦我們確定了向量加法反元素的唯一性之後, 我們會將 $\mathbf{u}$ 的加法反元素記為 $-\mathbf{u}$。

純量乘法與向量加法反元素之間有一些常用的規則, 各位對於以下的結果或許會覺得這是再自然不過的事, 而這裡我們必須確實驗證, 日後就可以很放心地使用。

定理 4 (第 12 頁)**.** 給定向量空間 $(V, \mathbb{F})$, 我們有

(A) 對所有 $\mathbf{v} \in V$ 都有 $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$。

(B) 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 都有 $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$。

(C) 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 與 $\mathbf{v} \in V$ 都有 $(-c) \cdot \mathbf{v} = -(c \cdot \mathbf{v}) = c \cdot (-\mathbf{v})$。

證明:

(A) 因為

$$0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} \xlongequal{\text{(V8)}} (0+0) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} \xlongequal{\text{(V3)}} 0 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0},$$

由向量加法的消去律 (**定理 1**) 得到 $0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$。

(B) 對任意 $c \in \mathbb{F}$, 因為

$$c \cdot \mathbf{0} + c \cdot \mathbf{0} = c \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = c \cdot \mathbf{0} = c \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0},$$

由向量加法的消去律 (**定理 1**) 得到 $c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$。

(C) 向量 $-(c \cdot \mathbf{v})$ 是 V 中唯一的元素使得 $c \cdot \mathbf{v} + (-(c \cdot \mathbf{v})) \xlongequal{\text{(V4)}} \mathbf{0}$; 另一方面, 由 $c \cdot \mathbf{v} + (-c) \cdot \mathbf{v} \xlongequal{\text{(V8)}} (c + (-c)) \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, 於是

$$c \cdot \mathbf{v} + (-(c \cdot \mathbf{v})) = c \cdot \mathbf{v} + (-c) \cdot \mathbf{v},$$

由向量加法的消去律 (**定理 1**) 得到 $-(c \cdot \mathbf{v}) = (-c) \cdot \mathbf{v}$。

因為向量 $-\mathbf{v}$ 是 V 中唯一的元素使得 $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, 得到

$$c \cdot (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) \xlongequal{\text{(V7)}} c \cdot \mathbf{v} + c \cdot (-\mathbf{v}) = c \cdot \mathbf{0} \xlongequal{\text{(B)}} \mathbf{0},$$

所以

$$c \cdot \mathbf{v} + (-c) \cdot \mathbf{v} = c \cdot \mathbf{v} + c \cdot (-\mathbf{v}),$$

由向量加法的消去律 (**定理 1**) 得到 $(-c) \cdot \mathbf{v} = c \cdot (-\mathbf{v})$。

$\square$

1.5 子空間

在研究代數的結構中, 我們會對一類具有相同且完整結構的子集合感興趣。在向量空間的情況下, 我們會把這樣的空間稱為子空間。

定義 **1** (第 16 頁)**.** 假設 W 是向量空間 $(V, \mathbb{F})$ 的一個子集合, 若在 $(W, \mathbb{F})$ 中使用 V 所定義的向量加法 $+$ 與純量乘法 $\cdot$ 之運算下使得 $(W, \mathbb{F})$ 形成一個向量空間, 則我們稱 W 是 V 的一個 子空間 (subspace)。

根據定義, 子空間 W 是沿用向量空間 V 的係數體 $\mathbb{F}$ 還有向量加法 $+$ 與純量乘法 $\cdot$, 所以在不引起混淆的情況下, 我們會略去這些記號。

介紹完子空間的定義, 我們將遇到的第一個問題是: 如何確定 W 是 V 的子空間呢? 這時, 各位或許會立刻聯想到要驗證向量空間的八個條件。但在此之前要先注意到一件事: 向量空間定義的前三行其實告知我們必須先檢驗向量加法與純量乘法的「封閉性」; 也就是說, 我們要確定以下兩點:

- 對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, 則 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$。 ($W$ 在向量加法下具有封閉性)
- 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 以及所有 $\mathbf{u} \in W$, 則 $c \cdot \mathbf{u} \in W$ (W 在純量乘法下具有封閉性)

所以這兩個條件會是 W 是否為 V 的子空間優先要檢查的條件; 換言之, 如果在集合 W 當中沒有向量加法封閉性或是沒有純量乘法封閉性的話, 那麼之後的八個條件也都不用檢驗了, 立刻得知 W 不是 V 的子空間。

在確定向量加法與純量乘法的封閉性之後, 再來我們逐項討論向量空間的八個條件。以下我們用 (S1)–(S8) 表示各條件:

(S1)「對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ 滿足 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$」這個條件是一定會成立的, 因為我們只要把 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 想成是在 V 上的向量即可藉由 V 的 (V1) 條件得知。

(S2)「對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in W$ 滿足 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$」這個條件也一定會成立, 因為我們只要把 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 想成是在 V 上的向量即可藉由 V 的 (V2) 條件得知。

(S3)「存在 $\mathbf{0}' \in W$ 使得對所有 $\mathbf{u} \in W$ 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{u} = \mathbf{u}$」, 這裡必須仔細思考: 因為 W 只是 V 的一個子集合, 若 V 的加法單位元素 $\mathbf{0}$ 有被選進 W 當中的話, 那麼這個 $\mathbf{0}$ 向量透過 (V3) 的條件可得知 $\mathbf{0}$ 會是 W 的加法單位元素。然而, 有沒有另一種可能是: $\mathbf{0}$ 並不在 W 裡面, 而是選到了另一個向量, 在此記為 $\mathbf{0}'$ 使得在 W 這個集合中滿足「對所有 $\mathbf{u} \in W$ 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{u} = \mathbf{u}$」這個結果呢? 這種情況是否會發生是需要加以澄清的事。總而言之, 關於這個條件, 我們必須要確定的是在 W 中零向量 $\mathbf{0}'$ 的存在性。

(S4)「對所有 $\mathbf{u} \in W$ 存在 $\mathbf{v} \in W$ 使得 $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}'$」這個條件是連帶 (S3) 之後必須面對的問題; 也就是說, 如果我們可以確定 W 中的零向量 $\mathbf{0}'$ 和大空間 V 的零向量 $\mathbf{0}$ 一致的話, 那麼這個問題就稍微容易一些, 因為在 V 中對於向量 $\mathbf{u}$ 的加法反元素有唯一性, 這件事就告知這個加法反元素也必須要在 W 中才能讓 W 有向量空間的結構。但是如果 $\mathbf{0}'$ 和 $\mathbf{0}$ 不一致的話, 那麼在 W 中對於 $\mathbf{u}$ 的加法反元素就要重新尋找。無論如何, 這邊我們先下一個結論是: 確定向量加法反元素的存在性, 並且要落在 W 裡面。

(S5)「對所有 $\mathbf{u} \in W$, 都有 $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$」這個條件是一定會成立的, 因為 W 和 V 使用相同的體 $\mathbb{F}$, 所以只要把向量 $\mathbf{u}$ 想成是 V 的向量, 就可以藉由 (V5) 條件得證。

(S6)「對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} \in W$, 都有 $(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$」這件事情是一定會成立的, 只要把 $\mathbf{u}$ 想成是 V 的向量, 就可以由 (V6) 條件得知其結果。

(S7)「對所有 $a \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, 都有 $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$」這件事情是一定會成立的, 只要把 $\mathbf{u}$ 想成是 V 的向量, 就可以由 (V7) 條件其結果。

(S8)「對所有 $a, b \in \mathbb{F}$ 以及任何 $\mathbf{u} \in W$, 都有 $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$」這件事情是一定會成立的, 只要把 $\mathbf{u}$ 想成是 V 的向量, 就可以由 (V8) 條件其結果。

綜合上述討論, 我們先初步地總結出: 向量空間 V 的一個子集合 W 是一個子空間所要驗證的條件有以下四個:

(s1) 對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, 則 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$。 ($W$ 在向量加法下具有封閉性)

(s2) 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 以及所有 $\mathbf{u} \in W$, 則 $c \cdot \mathbf{u} \in W$ (W 在純量乘法下具有封閉性)

(s3) 在 W 中存在零向量。

(s4) W 中的任一元素之加法反元素也在 W 中。

以下我們先解決零向量的問題 (條件 (s3))。

定理 2 (第 17 頁)**.** *假設 $(V, \mathbb{F})$ 是一個向量空間, 而 W 是 V 的一個子空間, 則 $\mathbf{0} \in W$。*

證明: 因為 W 是 V 的一個子空間, 所以對於 W 而言存在零向量, 現將這個零向量記為 $\mathbf{0}' \in W$, 此時, 對所有 $\mathbf{u} \in W$, 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{u}$。注意到, 這些 $\mathbf{u}$ 若是看成 V 的向量的話, 則有 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, 於是 $\mathbf{u} + \mathbf{0}' = \mathbf{u} + \mathbf{0}$, 根據向量加法的消去律 (Cancellation Law for Vector Addition), 我們得知 $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$。 □

現將 定理 **2** 的結果再與零向量的唯一性得知: 如果 W 是 V 的一個子空間, 則向量空間 W 的零向量必須和 V 的零向量一致; 也就是說, 而任何非零向量都不可能成為 W 的零向量。既然如此, 若能確實檢驗條件 (s2), 然後代入 $c = 0$, 即可確定 $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \in W$。

除此以外, 由條件 (s2) 關於 c 的任意性, 取 $c = -1$ (1 的加法反元素), 又由於 $(-1) \cdot \mathbf{u} \in W$, 且 $\mathbf{u} + (-1) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, 所以我們可以用條件 (s2) 推得條件 (s4) 成立。

綜合以上討論, 我們得到以下定理:

定理 3. *假設 $(V, \mathbb{F})$ 是一個向量空間, 而 W 是 V 的一個子集合, 則 W 是 V 的一個子空間若且唯若以下條件成立:*

(s1) 對所有 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ 都有 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$。

(s2) 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 與 $\mathbf{u} \in W$ 都有 $c \cdot \mathbf{u} \in W$。

討論完檢驗一個向量空間的子集合是否為子空間的理論後, 為了要舉一些子空間的例子, 我們必須先定義一些新的術語。

定義 4 (第 17 頁)**.**

(A) 一個 $m \times n$ 的矩陣 A 的 轉置矩陣 (transpose) A^t 是指一個 $n \times m$ 矩陣滿足 $(A^t)_{ij} = A_{ji}$。

(B) 一個 $n \times n$ 的方陣 A 若滿足 $A^t = A$, 我們稱之為 對稱矩陣 (symmetric matrix)。

例 **5** (第 17 頁)**.** 所有在 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 中的對稱矩陣所成的集合 W 是一個 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的子空間。

證明:

- 若 $A, B \in W$, 則 $A^t = A, B^t = B$, 於是 $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, 得到 $A + B \in W$。
- 若 $A \in W$, 則 $A^t = A$, 對任何 $c \in \mathbb{F}$, 則 $(c \cdot A)^t = c \cdot A^t = c \cdot A$, 得到 $c \cdot A \in W$。

由上討論得知: W 是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的一個子空間。 □

例 **6.** 考慮 $P(\mathbb{F})$ 是所有以 $\mathbb{F}$ 為係數的多項式所成的集合。給定非負整數 n, 記 $P_n(\mathbb{F})$ 是所有次數小於等於 n 的多項式所成的集合, 則 $P_n(\mathbb{F})$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的子空間。

證明:

- 因為兩個次數小於或等於 n 的多項式相加亦為小於或等於 n 的多項式, 所以在 $P_n(\mathbb{F})$ 中具有加法封閉性。
- 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 與 $p(x) \in P_n(\mathbb{F})$, 則 $(c \cdot p)(x)$ 也是一個小於或等於 n 的多項式, 所以在 $P_n(\mathbb{F})$ 中具有純量乘法封閉性。

由上討論得知: $P_n(\mathbb{F})$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的子空間。 □

例 **7** (第 18 頁)**.** 令 $C(I)$ 是所有定義在區間 I 上的連續函數所成的集合, 則 $C(I)$ 是 $F(I, \mathbb{R})$ 的一個子空間。

證明: 注意到: 兩個連續函數相加還有將連續函數進行純量乘法都是連續函數, 這個結果是在微積分 (或是高等微積分、數學分析) 課程中利用極限定義的方式證明, 這裡我們把它當成已知的事實然後繼續探討連續函數空間的結構性。

- 若 $f(x), g(x) \in C(I)$, 則 $(f+g)(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} f(x) + g(x) \in C(\mathbb{R})$, 故 $C(I)$ 具有加法封閉性。
- 若 $c \in \mathbb{R}$ 以及 $f(x) \in C(I)$, 則 $(cf)(x) \overset{\text{定義}}{=\!=} c \cdot f(x) \in C(I)$, 故 $C(I)$ 具有純量乘法封閉性。

由上討論得知: $C(I)$ 是 $F(I, \mathbb{R})$ 的子空間。 □

以下我們再回到矩陣的例子討論子空間的問題。

定義 8 (第 18 頁)**.** 一個 $n \times n$ 方陣 M 若滿足: 對所有 $i \neq j$ 都有 $M_{ij} = 0$, 我們稱矩陣 M 為 對角矩陣 (diagonal matrix)。

定義 9 (第 18 頁)**.** 一個 $n \times n$ 方陣 M 的 跡 (trace), 記為 $\mathrm{tr}(M)$, 是指將矩陣 M 之對角項相加; 也就是說, 定義

$$\mathrm{tr}(M) = M_{11} + M_{22} + \cdots + M_{nn}。$$

例 **10** (第 19 頁)**.** 考慮以下兩個集合:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | \mathrm{tr}(M) = 0\} \\ V_2 &= \{M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) | \mathrm{tr}(M) \geq 0\}, \end{aligned}$$

判斷 V_1 與 V_2 是否為 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子空間。

解**.**

(A) 若 $M', M'' \in V_1$, 則 $\mathrm{tr}(M') = (M')_{11} + (M')_{22} + \cdots + (M')_{nn} = 0$ 且 $\mathrm{tr}(M'') = (M'')_{11} + (M'')_{22} + \cdots + (M'')_{nn} = 0$。考慮 $M' + M''$, 因為

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(M' + M'') &= (M' + M'')_{11} + (M' + M'')_{22} + \cdots + (M' + M'')_{nn} \\ &= (M')_{11} + (M')_{22} + \cdots + (M')_{nn} + (M'')_{11} + (M'')_{22} + \cdots + (M'')_{nn} \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

若 $c \in \mathbb{R}, M \in V_1$, 計算

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(c \cdot M) &= (c \cdot M)_{11} + (c \cdot M)_{22} + \cdots + (c \cdot M)_{nn} = c \cdot M_{11} + c \cdot M_{22} + \cdots + c \cdot M_{nn} \\ &= c \cdot (M_{11} + M_{22} + \cdots + M_{nn}) = c \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

所以 V_1 是 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子空間。

(B) 考慮 $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 其中 $M_{11} = 1$ 以及 $M_{ij} = 0$ 若 $(i, j) \neq (1, 1)$, 則 $\mathrm{tr}(M) = 1 \geq 0$, 所以 $M \in V_2$。

取 $c = -1 \in \mathbb{R}$, 則 $c \cdot M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 其中 $M_{11} = -1$ 以及 $M_{ij} = 0$ 若 $(i, j) \neq (1, 1)$, 則 $\mathrm{tr}(c \cdot M) = -1 \ngeq 0$, 所以 $c \cdot M \notin V_2$。

由上述討論得知: V_2 不是 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子空間。

除了透過 定理 **3** 驗證一個向量空間的子集合是否為子空間, 下面的定理將給出如何從子空間構造出新的子空間。

定理 11 (第 19 頁)**.** 向量空間 $(V, \mathbb{F})$ 的任何子空間的交集仍為 V 的子空間。

證明: 給定一個指標集 I, 記 $\{W_\alpha | W_\alpha$ 是 V 的一個子空間, $\alpha \in I\}$ 是指定的子空間所成的集合, 考慮 $W = \cap_{\alpha \in I} W_\alpha$。

(s1) 若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, 則對所有 $\alpha \in I$ 都有 $\mathbf{u} \in W_\alpha$ 且 $\mathbf{v} \in W_\alpha$。因為 W_α 是 V 的子空間, 所以 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_\alpha$ 對所有 $\alpha \in I$, 所以 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \cap_{\alpha \in I} W_\alpha = W$。

(s2) 對所有 $c \in \mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u} \in W$, 則 $\mathbf{u} \in W_\alpha$ 對所有 $\alpha \in I$, 因為 W_α 是 V 的子空間, 所以 $c \cdot \mathbf{u} \in W_\alpha$ 對所有 $\alpha \in I$, 所以 $c \cdot \mathbf{u} \in \cap_{\alpha \in I} W_\alpha = W$。

由上討論得知: W 是一個 V 的向量子空間。 $\square$

1.6 線性組合

從過往的經驗或是向量空間的向量加法與純量乘法得知: 向量空間中的向量有時候彼此會有關聯。接下來的幾個單元將圍繞在這個主題中, 進而研究向量空間的主要結構。

首先要觀察的是一個向量能否由其它向量表示的問題, 於是引出以下定義:

定義 1 (第 36 頁)**.** 假設 $(V,\mathbb{F})$ 是一個向量空間, 而 S 是向量空間 V 的一個非空子集合。給定 $\mathbf{v}\in V$, 如果在 S 中存在有限個向量 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ 以及純量 $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得

$$\mathbf{v}=c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+c_n\cdot\mathbf{u}_n,$$

我們說向量 $\mathbf{v}$ 是 S 中元素的線性組合 (linear combination of elements of S), 我們也會說 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ 的 線性組合 (linear combination)。此時, $c_1,c_2\ldots,c_n$ 稱為這個線性組合的 係數 (coefficients)。

例 2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中考慮集合 $S=\{\mathbf{e}_1=(1,0,0),\mathbf{e}_2=(0,1,0),\mathbf{e}_3=(0,0,1)\}$, 對於 $\mathbf{v}=(3,4,-5)\in\mathbb{R}^3$, 因為 $\mathbf{v}=3\cdot\mathbf{e}_1+4\cdot\mathbf{e}_2+(-5)\cdot\mathbf{e}_3$, 所以 $\mathbf{v}$ 是 S 中元素的線性組合。

例 3 (第 24 頁)**.** 假設 $(V,\mathbb{F})$ 是一個向量空間, 而 S 是一個非空集合, 則 $\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{u}$, 其中 $\mathbf{u}\in S$。這件事告知: 零向量 $\mathbf{0}$ 是 V 當中任何非空子集合 S 的線性組合。

假設 $(V,\mathbb{F})$ 是一個向量空間, 而 S 是一個非空集合, 我們感興趣的問題是: 由 S 可以決定出多少在 V 當中的向量? 所以這個問題就引發了以下生成集的概念。

定義 4 (第 30 頁)**.** 令 S 是向量空間 $(V,\mathbb{F})$ 上的一個非空子集合, 定義 S 的 生成空間 (span of S) 是指所有 S 中元素的線性組合所成的集合, 記為 $\operatorname{span}(S)$。為了方便起見, 我們定義 $\operatorname{span}(\emptyset)=\{\mathbf{0}\}$。

下面的定理將描述生成空間的結構。

定理 5 (第 30 頁)**.** 向量空間 $(V,\mathbb{F})$ 的任何一個子集合 S 的生成空間 $\operatorname{span}(S)$ 是 V 的一個子空間。此外, 包含 S 的 V 之任一子空間必包含 S 的生成空間 $\operatorname{span}(S)$。

證明:

(A) 如果 $S=\emptyset$, 則 $\operatorname{span}(\emptyset)=\{\mathbf{0}\}$ 是一個 V 的子空間。因為 V 的任何一個子空間必包含空集合, 而這個子空間也包含 $\{\mathbf{0}\}$, 所以若 $S=\emptyset$, 定理結果成立。

(B1) 假設 $S\neq\emptyset$, 則 S 至少包含一個元素。令 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\operatorname{span}(S)$, 則存在 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m\in S$ 與 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\in S$ (注意到這些 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_m,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ 不全相異, 而且 m 和 n 也不見得相等) 以及純量 $c_1,c_2\ldots,c_m,\bar{c}_1,\bar{c}_2,\ldots,\bar{c}_n\in\mathbb{F}$ 使得

$$\mathbf{u}=c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+c_m\cdot\mathbf{u}_m\quad\text{與}\quad\mathbf{v}=\bar{c}_1\cdot\mathbf{v}_1+\bar{c}_2\cdot\mathbf{v}_2+\cdots+\bar{c}_n\cdot\mathbf{v}_n,$$

於是

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+c_m\cdot\mathbf{u}_m+\bar{c}_1\cdot\mathbf{v}_1+\bar{c}_2\cdot\mathbf{v}_2+\cdots+\bar{c}_n\cdot\mathbf{v}_n$$

意味著 $\mathbf{u}+\mathbf{v}\in\operatorname{span}(S)$。對任何 $c\in\mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u}\in\operatorname{span}(S)$, 則

$$\begin{aligned}c\cdot\mathbf{u}&=c\cdot(c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+c_m\cdot\mathbf{u}_m)\\&=(c\cdot c_1)\cdot\mathbf{u}_1+(c\cdot c_2)\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+(c\cdot c_m)\cdot\mathbf{u}_m,\end{aligned}$$

於是 $c\cdot\mathbf{u}\in\operatorname{span}(S)$。

由上討論, 我們知道 $\operatorname{span}(S)$ 是 $(V,\mathbb{F})$ 的一個子空間。

(B2) 假設 W 是 V 的子空間並且 $S\subset W$, 對任何 $\mathbf{w}\in\operatorname{span}(S)$, 存在 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\in S$ 以及純量 $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{F}$ 使得

$$\mathbf{w}=c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+c_n\cdot\mathbf{u}_n,$$

因為 $S\subset W$, 所以 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\in W$, 而 W 是 V 的子空間, 所以

$$\mathbf{w}=c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+c_n\cdot\mathbf{u}_n\in W,$$

因此 $\operatorname{span}(S)\subset W$。

$\square$

以下要開始探索一些特殊的子集合使其生成空間就是整個向量空間 V。

定義 **6** (第 30 頁)**.** 如果 $\operatorname{span}(S)=V$, 我們說向量空間 V 的子集 S 生成 V (generates V or spans V)。在此情況下, 我們亦稱集合 S 的元素生成 V。

例 **7** (第 31 頁)**.** 給定集合 $S=\{\mathbf{u}_1=(1,1,0),\mathbf{u}_2=(1,0,1),\mathbf{u}_3=(0,1,1)\}$, 它們是否可以生成 $\mathbb{R}^3$?

解**.** 給定任一向量 $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, 若它要能夠表示成 $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3$ 的線性組合, 代表存在 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 滿足

$$(x,y,z)=c_1\cdot(1,1,0)+c_2\cdot(1,0,1)+c_3\cdot(0,1,1);$$

也就是說, c_1,c_2,c_3 必須滿足以下聯立方程式:

$$\begin{cases}c_1+c_2=x\\c_1+c_3=y\\c_2+c_3=z,\end{cases}$$

將三式相加得到 $2(c_1+c_2+c_3)=x+y+z$, 於是 $c_1+c_2+c_3=\frac{1}{2}(x+y+z)$, 再將這個式子和聯立式的每一個方程式分別相減, 則得

$$c_1=\frac{1}{2}(x+y-z),\quad c_2=\frac{1}{2}(x-y+z),\quad c_3=\frac{1}{2}(-x+y+z),$$

因此 $\operatorname{span}(S)=\mathbb{R}^3$。

例 **8.** 有一個圓盤, 其周圍均勻分佈七個燈泡, 每個燈泡旁都有一個按鈕, 當按下某一個按鈕, 這個燈泡還有它的左、右兩邊的燈泡就會改變狀態; 也就是說, 如果原先燈是暗的就會變成亮的, 如果原先燈是亮的那麼就會變暗。

假設一開始圓盤上的所有燈泡都是暗的, 那麼按下哪些按鈕可以讓所有的燈泡都變亮呢?

解. 若要用數學回答這個問題, 首先把這七個燈泡標記 1 號、2 號、……、7 號, 然後把燈泡暗與亮的狀態分別用數字 0 與 1 表示, 於是就對應到 $(\mathbb{Z}_2)^7 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ 的向量空間; 也就是說, 考慮 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) \in (\mathbb{Z}_2)^7$, 其中初始狀態 (燈泡全暗) 為 $(0,0,0,0,0,0,0)$, 而燈炮全亮的狀態會是 $(1,1,1,1,1,1,1)$。

接下來要思考的是開關和 $(\mathbb{Z}_2)^7$ 的對應關係。如果按了 1 號按鈕, 這時將導致 $7,1,2$ 號的燈泡的狀態改變, 此時記 $\mathbf{e}_1 = (1,1,0,0,0,0,1)$; 如果按了 2 號按鈕, 這時將導致 $1,2,3$ 號的燈泡的狀態改變, 此時記 $\mathbf{e}_2 = (1,1,1,0,0,0,0)$; 由此依序得到 $\mathbf{e}_3 = (0,1,1,1,0,0,0), \mathbf{e}_4 = (0,0,1,1,1,0,0), \mathbf{e}_5 = (0,0,0,1,1,1,0), \mathbf{e}_6 = (0,0,0,0,1,1,1), \mathbf{e}_7 = (1,0,0,0,0,1,1)$。

在這個遊戲中, 對於 $i = 1,2,\ldots,7$, 假設第 i 個按鈕按了 c_i 下, 那麼圓盤上燈泡的狀態將會是

$$c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + c_2 \cdot \mathbf{e}_2 + c_3 \cdot \mathbf{e}_3 + c_4 \cdot \mathbf{e}_4 + c_5 \cdot \mathbf{e}_5 + c_6 \cdot \mathbf{e}_6 + c_7 \cdot \mathbf{e}_7,$$

所以我們想問: 是否存在 $c_1, c_2, \ldots, c_7 \in \mathbb{Z}_2$ 使得

$$(1,1,1,1,1,1,1) = c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + c_2 \cdot \mathbf{e}_2 + c_3 \cdot \mathbf{e}_3 + c_4 \cdot \mathbf{e}_4 + c_5 \cdot \mathbf{e}_5 + c_6 \cdot \mathbf{e}_6 + c_7 \cdot \mathbf{e}_7\text{。}$$

這裡注意到: 原遊戲按鈕可以按很多下, 但是按一下和按三下與按奇數下其實是一樣的, 而按偶數次按鈕的狀態和不按是一樣的, 所以我們可以改問 $c_1, c_2, \ldots, c_7$ 的值都在 $\mathbb{Z}_2$ 裡面即可。

例 **9.** 在物理學 (量子力學, Quantum Mechanics) 中, 包立矩陣 (Pauli matrix) 是一組三個 2×2 的埃爾米特矩陣 (Hermitian matrix), 即

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

若將這三個矩陣再與單位矩陣

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一起考慮, 則任何的 2×2 複矩陣 $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ 可以用這四個矩陣的線性組合表示。

解. 假設 $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, 其中 $M = z_1 \cdot \mathrm{Id} + z_2 \cdot \sigma_x + z_3 \cdot \sigma_y + z_4 \cdot \sigma_z$, 其中 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ 待定。若將所有量都用實部與虛部表示的話, 比方說, 記

$$M = \begin{bmatrix} x_{11} + iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ x_{21} + iy_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{bmatrix},$$

而 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3, z_4 = x_4 + iy_4$, 則

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{11} + iy_{11} & x_{12} + iy_{12} \\ x_{21} + iy_{21} & x_{22} + iy_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 + iy_1 + x_4 + iy_4 & x_2 + iy_2 - i(x_3 + iy_3) \\ x_2 + iy_2 + i(x_3 + iy_3) & x_1 + iy_1 - (x_4 + iy_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (x_1 + x_4) + i(y_1 + y_4) & (x_2 + y_3) + i(y_2 - x_3) \\ (x_2 - y_3) + i(y_2 + x_3) & (x_1 - x_4) + i(y_1 - y_4) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

現在 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ 都是待定的量, 它們分別滿足以下式子:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = x_{11} \\ x_1 - x_4 = x_{22}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_4 = y_{11} \\ y_1 - y_4 = y_{22}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 + y_3 = x_{12} \\ x_2 - y_3 = x_{21}, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 - x_3 = y_{12} \\ y_2 + x_3 = y_{21}, \end{cases}$$

得知這些量都有存在唯一解, 所以任何的 2×2 的複矩陣是 $\mathrm{Id}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 的線性組合。

這裡藉由線性組合這個概念示範了兩個在不同的體的向量空間的使用, 就如之前所說, 初學線性代數的階段可以先拿實數系 $\mathbb{R}$ 感受相關理論, 日後有需要用到不同的體的時候, 可以逐一類推。

1.7 線性相依與線性獨立

前一個單元是在觀察向量空間 V 中的某個向量 $\mathbf{v}$ 是否能夠被 V 中某個子集合 S 的元素以線性組合的方式表示。這一個單元要觀察的是子集合 S 內的向量是否能夠互相表示的問題。以下先引進線性相依的概念。

定義 **1** (第 36 頁)**.** 假設 S 是向量空間 V 的子集, 若存在有限個彼此相異的向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u}_n \in S$ 以及不全為零的純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

我們說集合 S 是 *線性相依* (linearly dependent)。我們也會說集合 S 中的向量是線性相依。

各位在看完線性相依的定義後或許會感到有一點怪, 好像這和前段文字所說的「子集合 S 內的向量是否能夠互相表示」不是那麼快就能連繫起來, 所以我們進行以下的討論: 假設某個向量 (例如 $\mathbf{u}_1$) 能夠被 S 當中其它的向量 (例如 $\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$) 以線性組合的方式表示, 那麼就有 $\mathbf{u}_1 = c_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n$, 其中 $c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, 這時, 將式子改寫成 $(-1) \cdot \mathbf{u}_1 + c_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \ldots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$, 然後記 $c_1 = -1$, 那麼 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 就不全為零。反之, 若有不全為零的純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得 $c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ 成立, 假設是某個 $c_i \neq 0$, 那麼

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_i &= -c_i^{-1}(c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + c_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n) \\
&= (-c_i^{-1} \cdot c_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (-c_i^{-1} \cdot c_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (-c_i^{-1} \cdot c_{i-1}) \cdot \mathbf{u}_{i-1} + (-c_i^{-1} \cdot c_{i+1}) \cdot \mathbf{u}_{i+1} \\
&\quad + \cdots + (-c_i^{-1} \cdot c_n) \cdot \mathbf{u}_n),
\end{aligned}$$

於是 S 中的某個向量可以被 S 中的其它向量以線性組合的方式表示。

這裡我們重新觀察 $c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ 這個式子, 若取 $c_k = 0, k = 1, 2, \ldots, n$, 則上式成立, 所以零向量 $\mathbf{0}$ 必定有一個 *平凡表示法* (trivial representation)。所以從上述定義來看, 若集合 S 是線性相依的話, 那麼對於零向量 $\mathbf{0}$ 來說, 就會存在一個 *非平凡表示法* (nontrivial representation)。

上面那一段話其實帶有很深刻的含義, 因為零向量 $\mathbf{0}$ 的形成有一個最自然的組成, 就是將所有向量都乘上零倍再相加, 而一組向量是線性相依則是告知這個零向量有另外的生成方法, 既然這個零向量可以有新的表示法, 那麼日後一旦討論跟向量有關的內容, 比方說寫出了某個向量 $\mathbf{w}$, 那它和 $\mathbf{w}+\mathbf{0}$ 相同, 而那個零向量又可以替換成新的表示法, 這樣的集合 S 在結構上就會過於豐富, 同一個東西若有過多的表示法會造成一些困擾。換個方式看, 當 S 中的某個向量 $\mathbf{u}$ 可以被在 S 中其它的向量以線性組合的方式表示, 那麼 $\mathbf{u}$ 顯得有一點多餘。

例 **2.** 在 $\mathbb{R}^3$ 中考慮 $S = \{\mathbf{u}_1 = (2, -1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, -1, 2), \mathbf{u}_3 = (1, -1, 1)\}$, 因為

$$1 \cdot \mathbf{u}_1 + 1 \cdot \mathbf{u}_2 + (-2) \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{0},$$

所以集合 S 是線性相依。

和線性相依的詞相對照, 以下引進線性獨立的概念。

定義 3 (第 37 頁)**.** 向量空間 V 中不是線性相依的子集 S 稱為 線性獨立 (linearly independent)。我們也會說 S 中的向量是線性獨立。

關於線性獨立集, 下列事實對任何的向量空間皆成立。

(A) 空集合 $\emptyset$ 是線性獨立集。因為線性相依集必為非空集合, 所以空集合不滿足線性相依的條件, 故為線性獨立集。

(B) 若一個集合 S 只有一個非零的向量, 比方說 $S = \{\mathbf{u}_1 \in V,\ 其中\ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}\}$, 則 S 為線性獨立集。這裡利用反證法證明之: 假設 S 是線性相依, 則存在 $c \in \mathbb{F}$ 且 $c \neq 0$ 使得 $c \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, 將等式兩邊同乘 c^{-1} 之後得到

$$\mathbf{u}_1 = c^{-1} \cdot (c \cdot \mathbf{u}_1) = c^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

矛盾。故 S 是線性獨立集。

(C) 一個集合 S 是線性獨立若且唯若 $\mathbf{0}$ 的平凡表示式是此集合上元素之線性組合的唯一表示式。

例 **4** (第 38 頁)**.** 探討集合

$$S = \{\mathbf{u}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{u}_2 = (0,1,0,-1), \mathbf{u}_3 = (0,0,1,-1), \mathbf{u}_4 = (0,0,0,1)\}$$

在 $\mathbb{R}^4$ 中是線性相依或是線性獨立。

解**.** 考慮

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + c_3 \cdot \mathbf{u}_3 + c_4 \cdot \mathbf{u}_4 = \mathbf{0},$$

其中 $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ 待定。現在想要確定的是: 這個式子是否存在非平凡表示法。

將這個式子確實寫開, 得到

$$c_1 \cdot (1,0,0,-1) + c_2 \cdot (0,1,0,-1) + c_3 \cdot (0,0,1,-1) + c_4 \cdot (0,0,0,1) = (0,0,0,0),$$

比較各分量, 得到對於 c_1, c_2, c_3, c_4 為未知數的聯立方程組:

$$\begin{cases} c_1 & & & & = 0 \\ & c_2 & & & = 0 \\ & & c_3 & & = 0 \\ -c_1 & - c_2 & - c_3 & + c_4 & = 0 \end{cases}$$

由此可解得 $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0, c_4 = 0$ 是唯一的解, 故 S 是線性獨立。

這裡想要用口語一點的方式去形容線性相依與線性獨立的概念: 若向量空間 V 中的一個子集合 S 是線性相依的話, 那麼 S 內會有多餘的向量; 若 S 是線性獨立的話, 表示集合內的向量各司其職, 每個向量都有重要的角色, 任何向量都無法被替換。

以下給出線性相依與線性獨立集的一個觀察。

定理 5 (第 39 頁)**.** 令 V 是一個向量空間, 而 S_1, S_2 是 V 的兩個子集合滿足 $S_1 \subset S_2 \subset V$,

(A) 若 S_1 為線性相依, 則 S_2 亦為線性相依。

(B) 若 S_2 為線性獨立, 則 S_1 亦為線性獨立。

證明:

(A) 因為 S_1 是線性相依, 所以存在有限個向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in S_1$ 與純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$, 這些純量不全為零使得

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

成立。因為 $S_1 \subset S_2$, 所以 $\mathbf{u}_k \in S_2$, 其中 $k = 1, 2, \ldots, n$, 因此, 我們可以在 S_2 中取出有限個向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 以及不全為零的純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

故 S_2 為線性相依。

(B) 在集合 S_1 中任取有限個相異的向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 出來, 因為 $S_1 \subset S_2$, 所以這些有限個相異的向量 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 也都在 S_2 中, 因為 S_2 是線性獨立, 所以對於式子

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

來說, 只有 $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ 這個平凡表示法。故 S_1 是線性獨立。

□

註 6. 關於 **定理 5** 的 (B) 也可以看成是 (A) 的否逆命題。

若用前段口語的方式描述線性相依與線性獨立去體會 **定理 5** 應該會覺得很自然: 既然線性相依的集合中有多餘的向量, 那麼比它更大的集合勢必也會有多餘的向量 (當初那些多餘的向量繼續存在於更大的集合中); 而線性獨立中的向量都不可或缺, 所以更小的集合也是不可或缺, 只是因為向量變少, 所能擴及的層面可能會變少。

既然線性獨立集 S 可想成是集合中的每個向量都具有獨特的貢獻, 那麼接下來想問的是: 如果我們從線性獨立集再添加一個向量 $\mathbf{v}$ 進入集合 S 的話, 那麼 $S \cup \{\mathbf{v}\}$ 仍然各具貢獻? 還是說新的集合中就會有多餘的向量呢? 以下定理將具體回答這個問題, 並且它將給出充分必要條件以便於日後檢驗此性質。

定理 **7** (第 39 頁)**.** 假設 S 是向量空間 $(V, \mathbb{F})$ 中的一個線性獨立集, 若 $\mathbf{v} \in V$ 不在集合 S 中, 則 $S \cup \{\mathbf{v}\}$ 是線性相依若且唯若 $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(S)$。

證明: ($\Rightarrow$) 若 $S \cup \{\mathbf{v}\}$ 是線性相依, 則存在 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in S \cup \{\mathbf{v}\}$ 以及 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 不全為零使得

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

成立。注意到 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 當中必有一個向量是 $\mathbf{v}$, 這是因為: 如果 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in S$, 因為 S 是線性獨立, 則不存在非平凡表示法。

現不妨假設 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}$ (若 $\mathbf{v}$ 是別的向量, 只要重新註記下標讓 $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ 即可)。將式子寫成

$$c_1 \cdot \mathbf{v} + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

注意到 $c_1 \neq 0$ (如果 $c_1 = 0$, 而 $c_2, \ldots, c_n$ 不全為零的話, 那麼就有不全為零的係數 $c_2, \ldots, c_n$ 使得 $c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ 成立, 則 $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ 是線性相依, 矛盾)。於是

$$\mathbf{v} = -c_1^{-1} \cdot (c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n) = (-c_1^{-1} \cdot c_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (-c_1^{-1} \cdot c_n) \cdot \mathbf{u}_n$$

得到 $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(S)$。
($\Leftarrow$) 若 $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(S)$, 則存在 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in S$ 以及不全為零的係數 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n,$$

將上式改寫成

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n + (-1) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

因為 $\mathbf{v} \neq \mathbf{u}_k, k = 1, 2, \ldots, n$, 所以 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$ 是線性相依, 由 定理 **5** 得知 $S \cup \{\mathbf{v}\}$ 是線性相依。 $\square$

1.8 向量空間的基底與維度

單元 1.7 已討論一個向量空間 V 的子集合 S 是線性相依或是線性獨立, 它在口語上的呈現是想了解集合 S 中是否有多餘的向量又或者是每個向量都很重要不可以排除。這一個單元想要研究的主題是: 什麼樣的集合 S 不僅可以生成 V, 而且愈精簡愈好。

定義 1 (第 43 頁)**.** 若向量空間 V 的一個子集合 β 生成 V 並且線性獨立, 我們稱 β 為 V 的一組基底 (basis)。有時我們也會說 β 當中的向量形成 V 的基底。

以下舉幾個向量空間基底的例子。

例 2 (第 43 頁)**.** 因為 $\operatorname{span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$ 而 $\emptyset$ 是線性獨立, 所以空集合 $\emptyset$ 是零向量空間的一組基底。

例 3 (第 43 頁)**.**

(A) 在 $\mathbb{F}^n$ 中, 考慮 $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)$, 則 $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 形成 $\mathbb{F}^n$ 的一組基底。這組基底我們通常會把它叫做 $\mathbb{F}^n$ 的 標準基底 (standard basis)。

(B) 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中, 令 $\mathbf{E}^{ij}$ 是第 i 列第 j 行的位置取值為 1 其它地方取值為 0 的 $m \times n$ 矩陣, 則 $\beta = \{\mathbf{E}^{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 形成 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組基底。

(C) 在 $P_n(\mathbb{F})$ 中, $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ 是一組基底, 我們會說它是 $P_n(\mathbb{F})$ 的一組 標準基底 (standard basis)。

(D) 在 $P(\mathbb{F})$ 中, $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ 是一組基底。

證明:

(A) 給定 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, 則 $\mathbf{v} = v_1 \cdot \mathbf{e}_1 + v_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + v_n \cdot \mathbf{e}_n$, 所以 $\operatorname{span}(\beta) = \mathbb{F}^n$。

考慮 $c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + c_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, 用坐標的方式寫下這個方程式即可得到 $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$。故 β 線性獨立。

由上述討論得知 $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的一組基底。

(B) 給定 $M \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 則 $M = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} M_{ij} \cdot \mathbf{E}^{ij}$, 所以 $\operatorname{span}(\beta) = M_{m\times n}(\mathbb{F})$。

考慮 $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} \cdot \mathbf{E}^{ij} = \mathbf{0}$, 對照矩陣的每個位置即得 $c_{ij} = 0, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$, 故 β 線性獨立。

由上述討論得知 $\beta = \{\mathbf{E}^{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組基底。

(C) 給定 $p_n(x) \in P_n(\mathbb{F})$, 則 $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, 所以 $\operatorname{span}(\beta) = P_n(\mathbb{F})$。

考慮 $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = \mathbf{0}$, 因為 $\mathbf{0}$ 代表 $0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0$, 所以 $c_n = 0, c_{n-1} = 0, \ldots, c_1 = 0, c_0 = 0$, 故 β 線性獨立。

由上述討論得知 $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ 是 $P_n(\mathbb{F})$ 的一組基底。

(D) 給定 $p(x) \in P(\mathbb{F})$, 假設 $\deg(p(x)) = m$, 其中 m 是非負整數, 記 $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$, 在此表示之下, $p(x)$ 是 β 中元素的線性組合, 所以 $\mathrm{span}(\beta) = P(\mathbb{F})$。

在 β 中取出有限個元素出來, 假設個數是 m 個, 對於這些元素觀察其次數 (degree), 次數的最大值記為 N。考慮

$$c_N x^N + c_{N-1}x^{N-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = \mathbf{0},$$

因為 $\mathbf{0}$ 代表 $0 \cdot x^N + 0 \cdot x^{N-1} + \cdots + 0 \cdot x + 0$, 所以 $c_N = 0, c_{N-1} = 0, \ldots, c_1 = 0, c_0 = 0$, 而在 β 中取出的 m 個元素所成的集合是 $\{x^N, x^{N-1}, \ldots, x, 1\}$ 的子集合, 而 $\{x^N, x^{N-1}, \ldots, x, 1\}$ 線性獨立, 由單元 1.7 的 定理 **5** 得知子集合也是線性獨立。故 β 線性獨立。

由上述討論得知 $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ 是 $P(\mathbb{F})$ 的一組基底。

□

在 例 **3** 中, (A), (B), (C) 呈現的是有限基底 β (基底的元素個數有限), 至於 (D), β 的元素個數無限。在線性代數課程中, 大部分的理論是在研究基底個數是有限的向量空間, 而基底個數無限的向量空間會有另一個稱為泛函分析 (functional analysis) 的理論探討之。

以下定理將表明向量空間 V 和基底 β 之間的關係。

定理 4 (第 43 頁)**.** *假設 V 是向量空間, 而 $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ 是 V 的一個子集合, 則 β 是 V 的一組基底若且唯若 V 中的每一個向量 $\mathbf{v}$ 皆能被唯一表示為 β 中向量的線性組合; 也就是說, 存在唯一一組純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得*

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n。$$

證明:

($\Rightarrow$) 令 β 是 V 的一組基底, 若 $\mathbf{v} \in V = \mathrm{span}(\beta)$, 而且假設

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n$$
$$\mathbf{v} = \bar{c}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \bar{c}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \bar{c}_n \cdot \mathbf{u}_n$$

是兩種 $\mathbf{v}$ 的線性組合表示法, 將兩式相減, 得到

$$\mathbf{0} = (c_1 - \bar{c}_1) \cdot \mathbf{u}_1 + (c_2 - \bar{c}_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (c_n - \bar{c}_n) \cdot \mathbf{u}_n,$$

因為 β 是線性獨立, 所以 $c_1 - \bar{c}_1 = 0, c_2 - \bar{c}_2 = 0, \ldots, c_n - \bar{c}_n = 0$, 於是 $c_1 = \bar{c}_1, c_2 = \bar{c}_2, \ldots, c_n = \bar{c}_n$。故任何 $\mathbf{v} \in V$ 皆能被唯一表示為 β 中向量的線性組合。

($\Leftarrow$) 假設任何 $\mathbf{v} \in V$ 都存在唯一一組純量 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n,$$

那麼 $V \subset \operatorname{span}(\beta)$, 又 $\operatorname{span}(\beta)$ 是 V 的子集合, 所以 $\operatorname{span}(\beta) \subset V$, 得到 $V = \operatorname{span}(\beta)$。

現在要驗證 β 是線性獨立, 考慮

$$c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

因為 $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$ 是一組滿足上式的純量, 由唯一性得知, 不會有其它不全為零的純量也滿足上式, 這就說明 β 是線性獨立。

□

從 定理 **4** 中, 我們可以體會到一件事: 若 $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ 形成向量空間 V 的一組基底, 則 V 當中的向量都能唯一表示成以下形式:

$$\mathbf{v} = c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{u}_n,$$

所以在這個基底之下, 向量 $\mathbf{v}$ 和 n-序組 (n-tuple) 之間有一一對應的關係; 換言之, 向量空間 V 和 $\mathbb{F}^n$ 的結構是相同的, 其中數字 n 是基底的個數。這個概念在代數上稱為 同構 (isomorphic)。

定理 **5** (第 44 頁)**.** 若一個向量空間 V 可以由一個有限集合 S 所生成, 那麼存在集合 S 的一個子集合形成 V 的一組基底。因此向量空間 V 有一組有限個數的基底。

證明: 若 $S = \emptyset$ 或是 $S = \{\mathbf{0}\}$, 則 $V = \{\mathbf{0}\}$, 而 $\emptyset$ 是 S 的一個子集合, 於是為向量空間 V 的基底。

現考慮集合 S 至少包含一個非零向量 $\mathbf{u}_1$, 則 $\{\mathbf{u}_1\}$ 是一個線性獨立的集合。以下流程將挑選出所要的向量以形成 V 的基底: 從 $\{\mathbf{u}_1\}$ 開始, 從 S 中選一個異於 $\mathbf{u}_1$ 的向量 $\mathbf{v}$, 探討 $\mathbf{v}$ 是否為 $\mathbf{u}_1$ 的線性組合, 如果 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{u}_1$ 的線性組合, 則不考慮向量 $\mathbf{v}$; 如果 $\mathbf{v}$ 不是 $\mathbf{u}_1$ 的線性組合, 則將 $\mathbf{v}$ 納入集合當中, 並將 $\mathbf{v}$ 改用 $\mathbf{u}_2$ 註記以形成集合 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$。依照這個流程逐一將 S 中的每個向量都討論過一次; 也就是說, 若 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 線性獨立, 將 S 中未討論過的向量中取一個出來, 記成 $\mathbf{v}$, 如果 $\mathbf{v}$ 是 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 的線性組合, 則將 $\mathbf{v}$ 剔除; 如果 $\mathbf{v}$ 不是 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 的線性組合, 則將 $\mathbf{v}$ 納入集合當中, 並將 $\mathbf{v}$ 改用 $\mathbf{u}_{k+1}$ 註記以形成 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}\}$。全部討論完後, 我們得到集合 $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$。

現審視集合 $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, 得知 β 是 S 的一個線性獨立子集合, 並且若再加上一個在 S 內但不在 β 裡的一個向量到 β 裡面的話將產生線性相依集。以下將證明 β 是 V 的一組基底:

- 由上述的建構過程得知 β 是線性獨立。
- 若能證明 $S \subset \operatorname{span}(\beta)$ 的話, 因為 S 生成 V, 則 $\operatorname{span}(S) = V$, 於是 $V \subset \operatorname{span}(\beta)$, 又因為 $\operatorname{span}(\beta)$ 是 V 的子空間, 即 $\operatorname{span}(\beta) \subset V$, 所以 $V = \operatorname{span}(\beta)$。以下給出 $S \subset \operatorname{span}(\beta)$ 的證明: 給定 $\mathbf{v} \in S$, 若 $\mathbf{v} \in \beta$, 自然有 $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\beta)$; 若 $\mathbf{v} \notin \beta$, 則由上述的建構得知: $\beta \cup \{\mathbf{v}\}$ 是線性相依, 由單元 1.7 的 定理 **7** 知: $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\beta)$。因此 $S \subset \operatorname{span}(\beta)$。

□

由 定理 **5** 的證明過程可得到從有限生成集當中精挑細選一些向量以形成向量空間 V 的基底 β 之方法, 這對於尋找向量空間的基底是非常有用的。注意到: 若選取向量的順序不同, 有可能得到的基底 β' 不見得和 β 一樣。

為深刻闡明上述定理的思維, 這裡給出一個實際例子與操作以詮釋之。

例 **6** (第 45 頁)**.** 考慮 $S=\{(2,-3,5),(8,-12,20),(1,0,-2),(0,2,-1),(7,2,0)\}$, 首先證明 $\mathrm{span}(S)=\mathbb{R}^3$: 對於 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$, 欲證明: 存在 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v}=c_1\cdot(1,0,-2)+c_2\cdot(0,2,-1)+c_3\cdot(7,2,0),$$

這時, c_1,c_2,c_3 必須滿足以下聯立方程組:

$$\begin{cases} c_1+7c_3=v_1 \\ 2c_2+2c_3=v_2 \\ -2c_1-c_2=v_3, \end{cases}$$

而這個聯立方程組的解為

$$c_1=\frac{1}{15}v_1-\frac{7}{30}v_2-\frac{7}{15}v_3,\quad c_2=-\frac{2}{15}v_1-\frac{7}{15}v_2-\frac{1}{15}v_3,\quad c_3=\frac{2}{15}v_1+\frac{1}{30}v_2+\frac{1}{15}v_3,$$

由此即證明了 $\mathrm{span}(S)=\mathbb{R}^3$。

再來我們想要利用 定理 **5** 所提供的流程找到 S 的子集 β 以成為 $\mathbb{R}^3$ 的基底。

首先在 S 上任選取一個非零向量形成一個集合, 比方說選取 $\{\mathbf{u}_1=(2,-3,5)\}$, 然後選 S 中的另一個向量例如 $\mathbf{v}=(8,-12,20)$ 探討 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{u}_1$ 的關係, 因為 $(8,-12,20)=4\cdot(2,-3,5)$, 即 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{u}_1$ 的線性組合, 於是我們不把 $(8,-12,20)$ 納入集合中。

再看向量 $\mathbf{v}=(1,0,-2)$ 與 $\mathbf{u}_1=(2,-3,5)$ 的關係, 考慮 $c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 由此得到聯立方程組

$$\begin{cases} 2c_1+c_2=0 \\ -3c_1=0 \\ 5c_1-2c_2=0, \end{cases}$$

解得 $c_1=0,c_2=0$ 是唯一的解, 所以 $\{\mathbf{u}_1\}\cup\{\mathbf{v}\}$ 線性獨立, 於是我們把 $(1,0,-2)$ 納入集合中並將它標記為 $\mathbf{u}_2$ 以形成 $\{\mathbf{u}_1=(2,-3,5),\mathbf{u}_2=(1,0,-2)\}$。

再看 $\mathbf{v}=(0,2,-1)$ 和 $\{\mathbf{u}_1=(2,-3,5),\mathbf{u}_2=(1,0,-2)\}$ 的關係。考慮 $c_1\cdot\mathbf{u}_1+c_2\cdot\mathbf{u}_2+c_3\cdot\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 得到聯立方程組

$$\begin{cases} 2c_1+c_2=0 \\ -3c_1+2c_3=0 \\ 5c_1-2c_2-c_3=0, \end{cases}$$

得到 $c_1=0,c_2=0,c_3=0$。所以 $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}\cup\{\mathbf{v}\}$ 線性獨立, 於是我們把 $(0,2,-1)$ 納入集合中並重新標記為 $\mathbf{u}_3$ 以形成 $\{\mathbf{u}_1=(2,-3,5),\mathbf{u}_2=(1,0,-2),\mathbf{u}_3=(0,2,-1)\}$。

最後要看的是 $\mathbf{v} = (7,2,0)$ 與 $\{\mathbf{u}_1 = (2,-3,5), \mathbf{u}_2 = (1,0,-2), \mathbf{u}_3 = (0,2,-1)\}$ 的關係, 考慮 $c_1 \cdot \mathbf{u}_1 + c_2 \cdot \mathbf{u}_2 + c_3 \cdot \mathbf{u}_3 + c_4 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, 得到聯立方程組

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 + 7c_4 = 0 \\ -3c_1 + 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ 5c_1 - 2c_2 - c_3 = 0, \end{cases}$$

可得一組不全為零的解: $c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 4, c_4 = -1$; 也就是說, 向量 $\mathbf{v}$ 是 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 的線性組合, 所以我們不把 $(7,2,0)$ 納入集合中。

最終我們得到 $\beta = \{\mathbf{u}_1 = (2,-3,5), \mathbf{u}_2 = (1,0,-2), \mathbf{u}_3 = (7,2,0)\}$ 是 S 的子集合, 而且是 $\mathbb{R}^3$ 的基底。

對於一個向量空間 V, 假設可以找到一組有限基底 β, 就如 定理 **5** 所述, 只要是有限個數的子集合 S 生成 V 的話, 必能再從 S 中挑選以組成 V 的基底, 而且這個基底會因選取的順序不同而得到不一樣的基底。這時將引發的下一個問題是: 這些形成向量空間 V 的基底的個數是否一樣?

為回答這個問題, 我們要先討論以下的替換定理, 由此就能確定形成向量空間的基底個數必相同。

定理 **7** (替換定理, Replacement Theorem)**.** *令 V 是一個向量空間, 它可以由一個集合 G 生成, 其中集合 G 的元素個數為 n。假設 L 是 V 的一個線性獨立子集合, 其元素個數為 m, 則 $m \leq n$。此外, 存在 G 的一個子集合 H, 其元素個數為 $n-m$, 使得 $L \cup H$ 可以生成 V。*

證明: 以下證明將對於 m 利用數學歸納法 (Mathematical Induction) 證明。

- 若 $m = 0$, 此時 $L = \emptyset$, 故 $H = G$ 滿足定理的結果。

- 假設本定理對於某個整數 $m = k, k \geq 0$ 成立; 也就是說, $k \leq n$, 且存在 G 的一個子集合 H, 其元素個數為 $n-k$, 使得 $L \cup H$ 可以生成 V。

  現考慮 $m = k+1$ 的情況: 令 $L = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}\}$ 是向量空間 V 的線性獨立子集。因為 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 是線性獨立, 由歸納法的假設得到 $k \leq n$, 並且存在 G 的一個子集合 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ 使得 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \cup \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ 生成 V。因此, 存在純量 $c_1, c_2, \ldots, c_k, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_{n-k} \in \mathbb{F}$ 使得

  $$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \cdot \mathbf{v}_k + \bar{c}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \bar{c}_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + \bar{c}_{n-k} \cdot \mathbf{u}_{n-k} = \mathbf{v}_{k+1}。$$

  這時必有 $n-k > 0$, 否則 $\mathbf{v}_{k+1}$ 是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的一個線性組合, 這和 L 是線性獨立矛盾。因此 $n > k$; 也就是說, $n \geq k+1$。

  此外, 在 $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_{n-k}$ 中, 必有某個 $\bar{c}_i$ 非零 (若全為零, 則會回到前一段文字的討論而得到矛盾), 不失一般性 (without loss of generality), 假設 $\bar{c}_1 \neq 0$。現將 $\mathbf{u}_1$ 重新表示得到

  $$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 = (-(\bar{c}_1)^{-1} \cdot c_1) \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + (-(\bar{c}_1)^{-1} \cdot c_k) \cdot \mathbf{v}_k + (\bar{c}_1)^{-1} \cdot \mathbf{v}_{k+1} \\ + (-(\bar{c}_1)^{-1} \cdot \bar{c}_2) \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + (-(\bar{c}_1)^{-1} \cdot \bar{c}_{n-k}) \cdot \mathbf{u}_{n-k}, \end{aligned}$$

令 $H = \{\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$, 則 $\mathbf{u}_1 \in \mathrm{span}(L \cup H)$, 因為 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}$ 都是 $\mathrm{span}(L \cup H)$ 的元素, 所以

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\} \subset \mathrm{span}(L \cup H),$$

因為 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{n-k}\}$ 生成 V, 所以 $\mathrm{span}(L \cup H) = V$。因為 H 是 G 的子集, 而且含 $(n-k)-1 = n-(k+1)$ 個元素, 所以定理對於 $m = k+1$ 成立。

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知定理成立。

□

有了替換定理, 我們就可以討論向量空間的基底個數是否一致的問題。

推論 **8** (第 46 頁)**.** 令 V 是一個向量空間而且有一個有限個數的基底, 則 V 的每一個基底包含相同個數的元素。

證明: 假設 β 是 V 的一組有限基底其元素個數為 n, 假設 γ 是 V 的另外一組基底。如果 γ 的元素個數大於 n, 則我們可從 γ 中選出一個子集 S 且恰含 $n+1$ 個元素。因為 S 是線性獨立且 β 生成 V, 由替換定理 (Replacement Theorem) 得到 $n+1 \leq n$, 矛盾。因此, 集合 γ 的元素個數有限, 而且 γ 的元素個數 m 滿足 $m \leq n$。將 β 和 γ 的角色互換, 可得 $n \leq m$, 故 $n = m$。 □

最後將總結這個單元的內容: 對於一個向量空間, 我們可以從基底可以完全掌握這個空間的所有向量, 並且也可以清楚知道向量空間的大小, 故引進維度的概念。

定義 **9** (第 46 頁)**.** 一個向量空間 $(V, \mathbb{F})$ 若存在一組有限個數的基底, 則稱此向量空間是 *有限維的* (finite dimensional)。此時, 基底的個數稱為向量空間 V 的 *維度* (dimension), 記成 $\dim(V)$。一個向量空間若不是有限維的則稱之 *無窮維的* (infinite dimensional)。

關於向量空間在基底於維度的主要理論將介紹到這裡, 下一個單元將針對一些實際的向量空間探討其基底。

1.9 有限維向量空間的討論

關於有限維向量空間的討論, 首先我們從單元 1.8 的 例 **2** 與 例 **3** 給出相應的向量空間的維度。

例 **1** (第 47 頁). 向量空間 $\{\mathbf{0}\}$ 的維度是 0: 因為 $\text{span}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$, 且 $\emptyset$ 的元素個數是 0, 故 $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$。

例 **2** (第 47 頁).

(A) 向量空間 $\mathbb{F}^n$ 的維度是 n。

(B) 向量空間 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的維度是 $m \times n$。

(C) 向量空間 $P_n(\mathbb{F})$ 的維度是 $n+1$。

解.

(A) 在 $\mathbb{F}^n$ 中, 考慮 $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)$, 則 $\beta = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ 形成 $\mathbb{F}^n$ 的一組基底 (詳見單元 1.8 例 **3** (A) 的討論)。而基底的個數是 n, 所以向量空間 $\mathbb{F}^n$ 的維度是 n。

(B) 在 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 中, 令 $\mathbf{E}^{ij}$ 是第 i 列第 j 行的位置取值為 1 其它地方取值為 0 的 $m \times n$ 矩陣, 則 $\beta = \{\mathbf{E}^{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ 形成 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的一組基底 (詳見單元 1.8 例 **3** (B) 的討論)。而基底的個數是 $m \times n$, 所以向量空間 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ 的維度是 $m \times n$。

(C) 在 $P_n(\mathbb{F})$ 中, $\beta = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ 是一組基底 (詳見單元 1.8 例 **3** (C) 的討論), 基底的個數是 $n+1$, 所以向量空間 $P_n(\mathbb{F})$ 的維度是 $n+1$。

以下的例子要說明的是: 向量空間維度的大小與它所分佈的體有關,

例 **3** (第 47 頁).

(A) 向量空間 $(V = \mathbb{C}, \mathbb{F} = \mathbb{C})$ 的維度是 1。

(B) 向量空間 $(V = \mathbb{C}, \mathbb{F} = \mathbb{R})$ 的維度是 2。

證明:

(A) 對任意 $z \in \mathbb{C}$, 取 $\beta = \{1\}$, 則 $z = z \cdot 1$, 其中 $z \in \mathbb{C}$, 所以 $\text{span}(\beta) = \mathbb{C}$。考慮 $z \cdot 1 = 0$, 其中 $z \in \mathbb{C}$ 待定, 若將這個式子的實部與虛部寫下, 則為 $(x + y \cdot i) \cdot (1 + 0 \cdot i) = 0 + 0 \cdot i$, 即 $x + i \cdot y = 0 + 0 \cdot i$, 於是 $x = 0, y = 0$, 所以 β 是線性獨立。故向量空間 $(V = \mathbb{C}, \mathbb{F} = \mathbb{C})$ 的維度是 1。

(B) 對任意 $z \in \mathbb{C}$, 取 $\beta = \{1, i\}$, 則 $z = x \cdot 1 + y \cdot i$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$, 所以 $\text{span}(\beta) = \mathbb{C}$。考慮 $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot i = 0$, 其中 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ 待定, 若將這個式子的實部與虛部寫下, 則為 $c_1 + c_2 \cdot i = 0 + 0 \cdot i$, 得到 $c_1 = 0, c_2 = 0$, 所以 β 是線性獨立。故向量空間 $(V = \mathbb{C}, \mathbb{F} = \mathbb{R})$ 的維度是 2。

$\square$

以下定理是討論有限維向量空間 V 的維度還有它的生成集中的元素個數與線性獨立集的元素個數之間的關係。

定理 4 (第 47 頁)**.** 假設 $(V, \mathbb{F})$ 是有限維向量空間, 記維度是 n, 則

(A) 向量空間 V 的任何一個生成集至少含有 n 個元素, 且恰有 n 個元素的 V 之生成集必為 V 的基底。

(B) 恰含 n 個元素的 V 之任一線性獨立子集必為向量空間 V 的基底。

(C) 向量空間 V 的每一個線性獨立子集可被擴充為向量空間 V 的一個基底。

證明: 令 β 是向量空間 V 的一組基底。

(A) 假設 G 為 V 的一個生成集, 由單元 1.8 的 **定理 5** 知: G 的某個子集 H 可為 V 的基底。由單元 1.8 的 **推論 8** 告訴我們 H 恰有 n 個元素。因 G 有一子集合含 n 個元素, 所以 G 至少含 n 個元素。而且, 假如 G 恰含 n 個元素, 則我們必得 $H = G$, 所以 G 為 V 的一個基底。

(B) 假設 L 是 V 的一個線性獨立子集而且恰含 n 個元素, 由替換定理 (單元 1.8 **定理 7**) 知: 存在一個 β 的子集合 H 而且 H 含有 $n - n = 0$ 個元素使得 $L \cup H$ 生成 V, 於是 $H = \emptyset$ 而且 L 生成 V。因為 L 線性獨立且生成 V, 所以 L 為 V 的一個基底。

(C) 假設 L 為 V 的一個線性獨立子集且含 m 個元素, 則由替換定理 (單元 1.8 **定理 7**) 知道: 存在一個 β 一子集 H 且 H 恰含 $n - m$ 個元素使得 $L \cup H$ 生成 V。因為 L 有 m 個元素, H 有 $n - m$ 個元素, 所以 $L \cup H$ 最多有 n 個元素; 另一方面, 由 (A) 知 $L \cup H$ 至少有 n 個元素, 因此 $L \cup H$ 恰有 n 個元素。故 $L \cup H$ 為 V 的一個基底。

□

例 5 (第 48 頁)**.** 證明: $\beta = \{x^2 + 3x - 2, 2x^2 + 5x - 3, -x^2 - 4x + 4\}$ 是 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組基底。

證明: 已知 $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, 只要再證 β 是線性獨立即可說明 β 是 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組基底。考慮

$$c_1 \cdot (x^2 + 3x - 2) + c_2 \cdot (2x^2 + 5x - 3) + c_3 \cdot (-x^2 - 4x + 4) = 0,$$

其中 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 待定。比較係數後得到 c_1, c_2, c_3 必須滿足以下聯立方程式:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ 3c_1 + 5c_2 - 4c_3 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 + 4c_3 = 0, \end{cases}$$

利用第一式與第三式設法將 c_3 消掉得得到 $2c_1 + 5c_2 = 0$, 此外, 將後兩式相加得到 $c_1 + 2c_2 = 0$, 而這兩式聯立得到 $c_1 = 0, c_2 = 0$, 於是 $c_3 = 0$。這就說明 β 是線性獨立。故 β 是 $P_2(\mathbb{R})$ 的一組基底。 □

下一個結果是有關子空間維度與所屬向量空間維度的關係。

定理 6 (第 50 頁)**.** 假設 W 是有限維度之向量空間 V 的一個子空間, 則 W 也是有限維度, 並且 $\dim(W) \le \dim(V)$。此外, 若 $\dim(W) = \dim(V)$, 則 $V = W$。

證明: 假設 $\dim(V) = n$, 若 $W = \{\mathbf{0}\}$, 則 W 為有限維度且 $\dim(W) = 0 \le n$。

若 W 含有一個非零元素 $\mathbf{u}_1$, 則 $\{\mathbf{u}_1\}$ 是線性獨立集。如果 $\operatorname{span}(\{\mathbf{u}_1\}) = W$, 則 $\dim(W) = 1$; 如果 $\operatorname{span}(\{\mathbf{u}_1\}) \ne W$, 則存在 $\mathbf{u}_2 \in W$ 使得 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 線性獨立。如果 $\operatorname{span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}) = W$, 則 $\dim(W) = 2$; 如果 $\operatorname{span}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}) \ne W$, 則存在 $\mathbf{u}_3 \in W$ 使得 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ 線性獨立。依照上述過程繼續下去, 直到得到一組生成 W 的線性獨立的向量為止。

因為 V 中的線性獨立子集所含元素不能多於 n, 因此這個過程必定在某個 $k, k \le n$ 之後終止, 於是我們得到 $\beta \overset{記}{=} \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ 是線性獨立且 $\operatorname{span}(\beta)$ 生成 W, 這麼一來 β 是 W 的一組基底, 於是 $\dim(W) = k \le n$。

若 $\dim(W) = n$, 則 W 的一組基底是 V 的線性獨立子集使得含有 n 個元素, 又由 定理 **4** (B) 知道此基底亦為 V 的一組基底, 故 $W = V$。 □

以下舉兩個例子探討如何證明子空間, 還有如何找到子空間的基底與子空間的維度並驗證之。

例 7 (第 50 頁)**.** 設 $W = \{(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \in \mathbb{F}^5 | w_1 + w_3 + w_5 = 0, w_2 = w_4\}$, 證明: W 是 $\mathbb{F}^5$ 的一個子空間, 而

$$\beta = \{(-1, 0, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0)\},$$

會是 W 的一組基底。因此, $\dim(W) = 3$。

證明:

(A) 若 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, 記 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ 滿足 $u_1 + u_3 + u_5 = 0$ 以及 $u_2 = u_4$, 記 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ 滿足 $v_1 + v_3 + v_5 = 0$ 以及 $v_2 = v_4$。考慮 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, 其中

$$\mathbf{w} \overset{記}{=} \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4, u_5 + v_5),$$

計算

$$\begin{aligned} w_1 + w_3 + w_5 &= (u_1 + v_1) + (u_3 + v_3) + (u_5 + v_5) \\ &= (u_1 + u_3 + u_5) + (v_1 + v_3 + v_5) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

以及 $w_2 = u_2 + v_2 = u_4 + v_4 = w_4$, 所以 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$。

對任意 $c \in \mathbb{F}$ 以及 $\mathbf{u} =\in W$, 記 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ 滿足 $u_1 + u_3 + u_5 = 0$ 以及 $u_2 = u_4$, 記 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$, 其中

$$\mathbf{w} \overset{記}{=} c \cdot \mathbf{u} = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, c \cdot u_3, c \cdot u_4, c \cdot v_5),$$

計算

$$w_1+w_3+w_5=c\cdot u_1+c\cdot u_3+c\cdot u_5=c\cdot(u_1+u_3+u_5)=0$$

以及 $w_2=c\cdot u_2=c\cdot u_4=w_4$, 所以 $c\cdot\mathbf{u}\in W$。

由上述討論得知: W 是 $\mathbb{F}^5$ 的子空間。

(B) 以下欲證 $\text{span}(\beta)=W$: 對任意 $\mathbf{w}\in W$, 記 $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)$ 滿足 $w_1+w_3+w_5=0$ 以及 $w_2=w_4$, 欲求 $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{F}$ 使得

$$(w_1,w_2,w_3,w_4,w_5)=c_1\cdot(-1,0,1,0,0)+c_2\cdot(-1,0,0,0,1)+c_3\cdot(0,1,0,1,0),$$

則 c_1,c_2,c_3 必須滿足以下聯立方程式:

$$\begin{cases}-c_1-c_2=w_1\\ c_3=w_2\\ c_1=w_3\\ c_3=w_4\\ c_2=w_5,\end{cases}$$

由此得到 $c_1=w_3,c_2=w_5,c_3=w_2=w_4$, 注意到: 將 c_2 代入第一式之後得到 c_1 也滿足 $c_1=-w_1-w_5$, 於是 $\mathbf{w}$ 滿足 $w_1+w_3+w_5=0$。所以 $\text{span}(\beta)=W$。

由上面討論特別看 $\mathbf{w}=\mathbf{0}$ 的時候得到 $c_1=0,c_2=0,c_3=0$, 所以 β 線性獨立。綜合上述結果得知 β 是 W 的一組基底, 而且 $\dim(W)=3$。

□

例 **8** (第 50 頁)**.** 證明: $n\times n$ 的對稱矩陣所成的集合 W 是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的子空間。考慮

$$\beta=\{A^{ij}:1\le i\le j\le n\},$$

其中 A^{ij} 表示第 i 列第 j 行元素為 1, 且第 j 列及第 i 行元素為 1, 其它元素皆為 0 的矩陣。證明: β 是 W 的一組基底。此外,

$$\dim(W)=n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n+1)。$$

證明:

(A) 假設 $U,V\in W$, 即 $U_{ij}=U_{ji}$ 與 $V_{ij}=V_{ji}$, 考慮 $M\overset{記}{=}U+V$, 則

$$M_{ij}=(U+V)_{ij}=U_{ij}+V_{ij}=U_{ji}+V_{ji}=(U+V)_{ji}=M_{ji},$$

對於 $c\in\mathbb{F}$ 以及 $U\in W$, 考慮 $M\overset{記}{=}c\cdot U$, 則

$$M_{ij}=(c\cdot U)_{ij}=c\cdot U_{ij}=c\cdot U_{ji}=(c\cdot U)_{ji}=M_{ji}。$$

由上討論得知 W 是 $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 的一個子空間。

(B) 以下欲證 $\text{span}(\beta) = W$: 對任意 $M \in W$, 則 $M_{ij} = M_{ji}$, 考慮

$$M = \sum_{1 \le k \le l \le n} c_{kl} \cdot A^{kl},$$

其中 $c_{kl} \in \mathbb{F}, 1 \le k \le l \le n$ 待定。若 $i \le j$, 則

$$M_{ij} = \sum_{1 \le k \le l \le n} (c_{kl} \cdot A^{kl})_{ij} = \sum_{1 \le k \le l \le n} c_{kl} \cdot (A^{kl})_{ij} = \sum_{1 \le k \le l \le n} c_{kl} \cdot \delta_i^k \delta_j^l = c_{ij},$$

此時,

$$\begin{aligned} M_{ji} &= \sum_{1 \le k \le l \le n} (c_{kl} \cdot A^{kl})_{ji} = \sum_{1 \le k \le l \le n} c_{kl} \cdot (A^{kl})_{ji} = \sum_{1 \le k \le l \le n} c_{kl} \cdot (A^{kl})_{ij} \\ &= \sum_{1 \le k \le l \le n} c_{kl} \cdot \delta_i^k \delta_j^l = c_{ij}, \end{aligned}$$

於是 $M \in W$。因此 $\text{span}(\beta) = W$。

由上面討論特別看 $M = \mathbf{0}$ 的時候得到 $c_{ij} = 0, 1 \le i \le j \le n$, 所以 β 線性獨立。綜合上述結果得知 β 是 W 的一組基底。

(C) 至於 W 的維度, 則是計算 β 的元素個數, 它是由滿足 $1 \le i \le j \le n$ 的 i, j 個數決定。取 $i = 1$ 時, j 可以取遍 $1, 2, \ldots, n$, 取 $i = 2$ 時, j 可以取遍 $2, 3, \ldots, n$, 取 $i = k$ 時, j 可以取遍 $k, k+1, \ldots, n$, 取 $i = n$ 時, j 可以取的數只有 n, 於是

$$\dim(W) = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)。$$

□

一個有限維向量空間與其子空間之間還有一些關係值得討論, 以下再提一個推論, 它是在說明: 我們可以從子空間的基底再添加一些向量後則可擴充成為原向量空間的基底。

推論 9 (第 51 頁)**.** 若 W 是有限維度向量空間 V 的一個子空間, 則 W 具有一組有限基底, 且 W 的任一基底皆可擴充以成為 V 之基底。

證明: 由 **定理 6** 知道 W 是有限維度的, 所以 W 具有一組有限基底。假設 $\dim(W) = k$, 其中 $k \le n = \dim(V)$, 任取 W 的一組基底 $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, 並取 V 的一組基底 $\gamma = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, 由替換定理 (Replacement Theorem, 單元 1.8 **定理 7**) 知: 可在 γ 中找到子集合 H, 其中元素個數有 $n - k$ 個, 使得 $\beta \cup H$ 生成 V, 則 $\beta \cup H$ 即為所求。 □

這一個單元的最後, 我們討論 $\mathbb{R}^n$ 的子空間。當 $n = 1$, $\mathbb{R}$ 的子空間就只有 $\{\mathbf{0}\}$ 與 $\mathbb{R}$。再以 $\mathbb{R}^2$ 為例, 我們知道 $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, 所以 $\mathbb{R}^2$ 的子空間維度有 $0, 1, 2$。維度為 0 或 2 的子空間分別是 $\{\mathbf{0}\}$ 及 $\mathbb{R}^2$, 而 $\mathbb{R}^2$ 中維度是 1 的任一子空間是由某個非零向量的所有純量倍所組成。

若 $\mathbb{R}^2$ 的一點以一般方式表示歐氏平面上的某一點, 則 $\mathbb{R}^2$ 的子空間: $\mathbb{R}^2$ 中維度 0 的子空間是歐氏平面的原點所組成, $\mathbb{R}^2$ 中維度 1 的子空間是通過原點的一直線, 而 $\mathbb{R}^2$ 中維度 2 的子空間是整個歐氏平面。

仿上述, $\mathbb{R}^3$ 的子空間必具有維度 $0, 1, 2$ 或 3, 以幾何意義說明這些情況, 可得知維度 0 的子空間必是歐氏三維空間的原點, 而維度 1 的子空間是通過原點的直線, 維度 2 的子空間是通過原點的平面, 而維度 3 的子空間是歐氏空間 $\mathbb{R}^3$ 本身。至於 $n \geq 4$ 的情況可以同樣地類推。