0

如何學習數學系線性代數

會看這篇文章的人, 我設想你是一位即將進入數學系的大一新生, 當初在高中時期因為自認為數學程度不錯, 師長對你的數學表現給予肯定, 同學們也稱羨你的數學很好, 所以在高三的時候在各種可能的大學入學管道下就選填了數學系, 想要在新的環境中進修並延續自己的數學長才。

然而, 這樣的憧憬很有可能就此破碎, 在入學的第一個月甚至只要前兩個星期你就會意識到大學數學好像和高中數學有著截然不同的差異。數學系大學一年級有兩門重要的數學必修課 — 微積分與線性代數, 就以往的觀察, 微積分對多數人在學習的初期都不會有什麼太大的問題, 原因很簡單, 因為大家在高三就已經學了一些極限還有導數的觀念, 所以這些內容湊合點用, 至少在期中測驗前大概都還可以吃老本 (如果學習態度不佳的話); 而微積分這個較為延緩的困難若沒有得到解決的話勢必會影響到後面的學習。

但是線性代數的問題就大了, 在還沒有正式接觸線性代數之前, 幾乎所有的人對這門學科產生滿臉的問號, 線性代數是什麼樣的學科? 數學系的線性代數和外系的線性代數有什麼差異呢? 為什麼線性代數會放在大學一年級的必修課而不是其它年級再學習的學科呢? 線性代數可以應用在什麼地方? 線性代數是不是很困難的學科呢? 要如何學好線性代數呢? 這裡的每一個問題初學者都很在乎, 若能早一點知道解答, 心裡多少就踏實了些, 學習線性代數來說也就會舒服些。可是這些問題極有可能在學過一年的線性代數後仍然無法完全解決, 在此我想先澄清的是: 剛才的那句話並不代表學長姊都不認真學習線性代數, 而是這個學科真的會有這樣的現象產生, 這件事我要留到後面的單元再做解釋。正因為線性代數在學習階段不太容易想清楚這門學科的價值, 於是學長姊這些過來人都苦笑地說線性代數是每個人的「第一次數學危機」。

說到這裡, 好像把大家搞得人心惶惶, 線性代數真的有那麼可怕嗎? 為了要讓初學者在修數學系線性代數這門課之前有一個很好的心裡建設與調適, 所以我花了一些時間寫下一些觀點放在第零章, 以便各位在尚未正式接觸數學主題前先試圖從某些面向了解這門學科。首先, 在單元 0.1 會大致勾勒出什麼是線性代數, 我會從自己開始學線性代數得到的心得隨著日後接觸到其它領域重新體會線性代數的方式告訴大家線性代數的精神。單元 0.2 我想從討論其它科系的線性代數以突顯數學系線性代數的學習重點與特色。至於單元 0.3 將盤點幾項初學高等數學可能會遇到的困難, 這些困難有的是數學本身所致, 也可能是學習者本身的狀況, 這裡除了點出困難外, 也會給予一些建議。單元 0.4 想從學習的角度分享幾個準備線性代數的策略 (甚至可以擴及到大學數學的準備)。這一章也寫了一點結語並放在單元 0.5。

0.1 何謂線性代數

線性代數 (Linear Algebra) 對數學系學生而言是一門大學一年級的必修科目, 對於理、工科系的同學來說, 線性代數可以說是工程數學 (Engineering Mathematics) 裡面的一個重要的數學教材。就字面上來看, 線性代數的學科屬性是代數, 而「線性」是形容詞, 所以說這個學科想要特別了解具有線性這種代數結構的數學。

這裡先給各位一個對於線性代數的最初步想法: 線性代數的特色, 除了「線性」這個結構配合運算操作起來相當方便, 只要透過幾個基本要件就能掌握整體的性質; 另一方面, 遇到一個問題處理的方式, 一旦轉換成數學語言之後, 常常伴隨的下一個思維就是研究關於這個問題的「線性」部分, 這是因為在很多情況下線性部分含蓋了該問題最主要的本質, 所以我們會利用一個量的線性部分所得到的性質繼續探究原問題並了解全貌。

其實大家在高中時期或多或少都有用線性代數處理過問題, 例如: 我們會利用矩陣 (matrix) 解 n 元一次聯立方程式, 然後這當中會引進行列式 (determinant) 的概念進而得到克拉馬法則 (Cramer's rule) 以給出求解公式。高中數學也會遇到關於旋轉矩陣與坐標變換的議題, 而旋轉矩陣的一個直接應用是可以將二次曲線 (或稱圓錐曲線, conic section) 還有二次曲面 (quadric surface) 分類。若是在矩陣的技術層面提問的話, 由於矩陣乘法是一個複雜的運算, 計算一個方陣的次方可以透過矩陣對角化 (diagonalization) 的理論給出不錯的結果。上述這些內容都算是線性代數的範疇, 只是各位在那個時候的學習都是以解決原問題為目的, 也可能是因為在當時的教學現場避免給出太多專業的用詞嚇到大家的關係, 所以並沒有正式將線性代數這個概念提出來。

如果你問學長姊什麼是線性代數, 問十個人可能會有十個不同的答案。甚至, 如果你問我什麼是線性代數, 我在不同時期也會告訴你不同的答案。倘若時光回到我大一結束的那個暑假, 我會告訴你線性代數大概就是矩陣理論, 可以用對角化處理方陣的高次方, 也學到有很多矩陣分解法用來處理最佳化理論; 如果你在我唸碩士的階段問這個問題 (那時正在學實分析與泛函分析), 我會告訴你線性代數可以用來認識無窮維的向量空間, 還可以分享很多神妙的理論。當我逐漸走向幾何領域深究學問的時候, 你再問我一次線性代數是什麼, 我會很興奮地告訴你線性代數和張量 (tensor) 之間有著非常密切的關係。

為什麼這個問題的答案會如此不明確? 在我寫下這篇文章之時, 我也認真地思考了這個問題, 或許是從前對於線性代數的一知半解, 所以才會給出這麼多不同的觀點。直到我現在要開線性代數這門課, 利用暑假的時間重新思索我對線性代數的理解, 而現在我要告訴你第四個答案:「線性代數」是個數學理論, 要討論的對象是一個有結構性的主體 — 稱為向量空間 (vector space), 而這個空間附帶著兩種運算: 向量加法與純量乘法, 然後再配合空間中的骨架 — 稱為基底 (basis) — 建立而成。向量空間本身有許多重要的結構與性質值得討論; 此外, 線性代數還必須探討兩個向量空間之間的線性變換 (linear transformation), 透過矩陣可具體呈現線性變換。而前面幾段文字述說的矩陣對角化、矩陣分解、泛函分析、張量理論等等都是從線性代數為根基綻放出的花朵。

對於還沒有學過線性代數的讀者來說當然不太能體會我前面幾段文字所說的意思, 或許自己設定幾個時間點, 像是一個月後、學期中、第一學期結束、一學年後、三年後之類的, 然後再回來看看這段引言應該會有各種體悟。至少我的第四個答案把自己以前的所有想法都整合起來, 基本上我也滿意現在的說法。

0.2　各科系線性代數的比較

線性代數這個學科並非數學系專屬的必修科目, 許多科系也將線性代數列為選修甚至是必修科目。這一個單元想要分析每個科系所開設的線性代數之異同。會寫下這個單元的主要用意是想和各位在學習線性代數之前能達成一個默契與共識, 在先確定並認同數學系所要學習線性代數的重點與方式之下, 才有可能學得好並學到位。

在此之前, 我想用體育課作為比喻, 這樣大家應該更能體會這個單元所要傳達的意義。從小到大各位在求學的過程中上過無數的體育課, 回想老師在某個學期教我們如何跑步, 在這個課程中, 你會從在操場跑個幾圈開始感受何謂跑步, 之後每星期都也都有跑步時段, 但也不會是整節課都只有跑步, 體育老師會從身體的每個構造 (骨略、肌肉、關節、神經) 還有各器官之間的關聯甚至搭配一些力學原理開始介紹如何讓身體執行跑步; 此外, 透過生活作息還有飲食討論這些如何影響跑步的表現, 也會花時間介紹運動傷害及其防護, 最後會介紹若以跑步為競技比賽時有關場地、歷史或運動賽事的事情。在這門體育課學到這些跑步的內容, 對你來說是什麼呢? 其中一個層面是: 在你嘗試過各種可能的運動類別之後, 最終可以找尋自己最喜歡或是可以經常執行的運動成為日常生活的一部分。

至於運動學系的學生主修田徑 (跑步項目) 會是什麼樣的情況呢? 首先, 運動學系會預設你的基本條件不錯 (運動細胞很好, 之前曾經比過一些校內、校際或是區域性的比賽, 以此做為申請入學的一項個人優勢), 在修這門課的時候, 會有一些目標, 比方說日後想要選拔成為國手, 然後在大形競賽場中爭取最佳表現, 以此為目標, 關於田徑這門課的上課內容就會非常精實, 首先要界定清楚你的跑步類別, 從短程 (100 公尺到 1500 公尺之間又有很多距離) 到中程 (5000 公尺到 10000 公尺) 還有長程 (半馬、全馬、超馬) 因距離而有不同的選擇, 還有是否增加障礙 (比方說跨欄) 也有很多分類, 每個不同的類別就會對應到不同的練習與準備方式。除了反覆練習, 對於各種設定就會有更高的要求與認識, 透過重訓強化肌肉, 裝備 (跑鞋) 的選取和功能的了解也必須更加講究, 賽事前的訓練課表搭配營養, 實地場勘或移地訓練或模擬訓練的需求也要設想。

上面兩段文字想要傳達的概念是: 雖然每個人在做的事名稱上相同 (都叫做跑步), 但是實際上的做法卻完全不同, 所以各位在開始進入大學修課前必須先想清楚數學系的學習層面與學習模式。

現在我們回到線性代數這門課進行探討。線性代數在工程科系像是電機系、資工系都會開設; 除此以外, 物理系、化學系還有機械系、化工系也會學習線性代數, 只是這些科系會將線性代數放在工程數學的課程中, 然後會用半個學期到一個學期不等的時間介紹線性代數。從這個面向來看, 線性代數在使用者的需求來說雖然不及微積分, 但也有一定的族群必須用到它。

資訊工程上需要用到線性代數的部分主要是關於矩陣的運算, 這裡的矩陣運算不是像高中數學那樣只是在算 2×2 或是 3×3 矩陣的操作而已, 而是會面臨大型矩陣的處理, 雖然電腦不斷在演進, 加快運作的速度, 另一方面, 若是理論上能有一個更有效處理矩陣的方法 (每個問題處理的手法會不同), 這樣的突破也會幫助於這個問題的具體實踐與成功。於是關於矩陣的各種分解理論顯得愈來愈重要, 從最古典的將方陣進行矩陣對角化 (diagonalization) 然後把這個概念推廣至一般 $m \times n$ 矩陣而得的奇異值分解 (singular value decomposition, 簡寫為 SVD), 另外還有將一個矩陣分成下三角矩陣與上三角矩陣相乘 (稱為 LU 分解)、也會把矩陣分解成一個正交矩陣與一個上三角矩陣相乘 (稱為 QR 分解) 以處理最小線性平方法相關的問題。所以對於資訊科系的人來說, 他們學習線性代數會有一種明確的目標導向, 於是就會從這些角度切入線性代數。

至於物理系或是機械系學習線性代數的重點會放在如何用矩陣去表現一些事物。以機械系為例, 若要製造一個機械手臂, 如何讓這個手臂照著想要的方式移動、旋轉甚至是抓取, 那麼你要對於平移矩陣、旋轉矩陣還有它們的各種組合有一定的認識。近幾年諾貝爾物理獎頒發給和研究量子領域的學者, 除了本身量子理論之外, 它也延伸至應用到量子科技, 所以有了量子電腦、量子計算等與最先近的科技產業接軌。若有興趣朝這方面探索, 一整學年的線性代數理論幾乎都是需要知道的內容。

至於數學系學習線性代數所關心的議題還有重點與其它系所的設定並不相同。關於這件事, 這裡想要從更廣泛一點的面向開始說起。首先, 數學系設置的課程主要是將近代數學 (分析、代數) 的理論做全面介紹, 以目前彰師數學系所設置的架構來說, 雖然有分數學、統計、資訊三個學程, 但系上的每位學生不論選擇哪一個學程畢業, 都必須完成系必修專業課程 — 微積分 (一)(二)、線性代數 (一)(二)、計算機概論、程式設計、高等微積分 (一)(二)、代數學 (一)(二)、微分方程 (一)、機率論、統計學、複變函數論 (一)。這些課程中, 多數將著重在理論的建立與探討, 至於每個學科在應用層面的部分會有其它課程介紹。

因為數學系主要學科的特色是著重在理論建構與邏輯推演的養成, 並非只是告訴你某個知識或是某個技巧然後要求你算得快狠準, 所以學習的時候應聚焦在如何掌握完整的理論, 並且能夠利用數學語言完成數學論證以展現你對這個理論的認識。說得更白話一點,「知其然」與「知其所以然」是兩種境界, 中學以前的數學多半是在於「知其然」的層次, 在直接告知某個數學的事實後, 接下來就直接進到如何熟練或如何活用; 當我們過渡到「知其所以然」的層次時, 則必須了解為什麼會有這個理論, 這個理論是如何形成的? 它的背後原理是什麼? 甚至未來有沒有可能自己建立新的理論?

於是乎線性代數將會是各位從「知其然」到「知其所以然」這個過渡階段的第一門課, 這門課相較於同一時間所學的微積分來說還要明顯, 因為微積分的操作面其實相當複雜, 幾乎需要花一整年的時間才有辦法全盤熟悉, 於是微積分的理論大部分就會留到高等微積分課程中才進行闡述。至於線性代數在操作面 (矩陣運算或是行列式計算) 的部分會仰賴各位在中學時期所學到的內容為基礎。以往你可能習於秒殺或速解數學習題, 得到答案就很開心然後立刻解下一題, 將整本數學題本都刷完從中得到快感與成就, 現在你必須轉換心境, 計算能力會是數學系學生預設的基本能力, 然後將學習的重心放在怎麼認識線性代數的本質。

更進階地, 每一個數學學科都有它的特色, 不太可能用你現在知道的一招一式就可以打通所有的數學領域, 若看待一個學科的方式不對就會一直困在裡面跳不出來。所以在學線性代數的時候, 除了學科本身的內容需要理解外, 也要藉此慢慢建立自己的數理思維還有數學寫作, 這樣會在日後學習其它學科時比較順遂。

因為理論的建立與認識需要長時間的鋪陳, 線性代數的課程會用掉絕大部分的時間在解釋理論。至於線性代數的應用, 在其它科目都會展現它的用處, 我可以說絕大部分數學系的課程中都有線性代數的影子在裡面, 就連微積分也有很多線性代數的內容, 比方說極限運算、函數求導、收斂級數、積分的運算都具有線性性質, 而微分 $\mathrm{d}x$ (differential) 用到了很深刻的線性泛函 (linear functional) 觀念; 此外, 在討論歐氏空間中的曲線與曲面論, 我們也會使用線性代數處理問題。這些微積分和線性代數的關係似乎多數人都不知道或是不太關注實為可惜。正因線性代數的應用層面太廣, 無法三言兩語道盡各式應用, 所以線性代數的應用就留給各位自己探索, 透過日後每個人所學的東西都會挖掘到不同的寶藏, 就像我在不同的求學階段中對於線性代數都有不同的體會一樣, 你將看到線性代數是一個極具特色的課程。

0.3 學習數學系線性代數可能會遇到的困難

有鑑於每年大一新生在學線性代數時會有不適應的情形, 這個單元綜整幾個各位在學線性代數時可能會遇到的困難, 並提供幾個建議。這一單元的標題特別強調是數學系線性代數, 就如前面的單元所述, 各科系看待線性代數的方式不盡相同, 所以我們會把焦點放在數學學科與學習之關聯。

0.3.1 抽象化的內容可能造成不適應

中學時期學到的數學幾乎都是在很明確的數學內容下討論, 比方說一些數學物體 (點、線、面) 會放在指定的坐標, 討論排列組合的問題時情境也很寫實, 而我們在這樣的數學模式中經歷了十二年之久。縱使變數 x, y 或是符號的運算在回答數學問題的過程中用了很多, 對於要讀數學系的各位來說, 這些符號並不構成困擾。

線性代數和微積分相比, 抽象的程度將會立即顯現。大一微積分的初期仍舊是在探討單變數函數的極限、求導或是積分的問題, 頂多面臨到的第一個抽象關卡是極限精確定義 (ε-δ language), 當你對一個微積分定理或敘述不是那麼確定的時候, 通常畫個函數圖形或是畫個示意圖輔佐就能大大提升你對微積分的認識, 所以微積分在各位的心中接受度很高。然而, 線性代數的抽象程度可能會造成學習上的困難。

抽象化有幾種類型, 比方說如果想要將很多事情的共通性萃取出來, 這時就會用完全沒聽過的字詞定義它。我們現在所學的高等數學幾乎都是歐美國家在十七到二十世紀間的產物, 那時的數學家想了一個名詞或形容詞去描述一個抽象的數學概念, 而現階段我們也必須接受這個英文字又或者是這個字的翻譯。有些人會覺得這些用字相當傳神, 但是英文語感若沒那麼好的話可能會感受不到奧義。此外, 當每個概念都用一個你從未見過的字, 全部串在一起之後就會無法適應或理解。

另一方面, 在數學的進程中, 十九世紀有一部分的數學家想要用抽象化的方式重新詮釋數學, 透過公理 (公設)、邏輯、符號、運算試圖將數學的每一個領域都給出對應的系統, 把那些具有共同性質的東西歸結出最重要的內容, 以此為基礎再衍生出其它的概念。於是各位日後將看到很多數學都是以公理化為基礎, 然後逐步推演以確定每一個論述都是符合邏輯的。這麼做的用意是希望理論的完整, 有組織有架構的方式點出數學的面貌。

抽象化的好處在於我們可以在至高點看事物, 因為它將一體適用於許多情況, 並且能夠淸楚知道核心所在, 不被外在的其它東西干擾。而抽象化壞處或難點在於學習上的不易, 缺少了實例與抽象數學的銜接, 在認識理論時就不容易接受它, 可能想很久也想不通前後文之間的關聯; 若無法調適, 你就可能會開始懷疑學這些怪理怪氣的東西有什麼用, 當這種負面的情緒一出來, 又無法適時解決的話, 久了之後就會有嚴重的影響。

線性代數會是各位第一次面臨較多抽象化術語串接數學的科目, 勢必要花時間適應與調整。關於遇到這樣的困難, 解法有以下幾個: 首先, 多拿實際的例子感受理論。以線性代數為例, 心中先拿平面向量或是空間向量當作標準標型, 告訴自己每次學到一個新的概念時在平面向量或是空間向量之下到底想要呈現什麼意思, 將這個對應關係建立起來有助於理論的認識。此外, 有時抽象化的東西只是經過一層包裝讓你霧裡看花, 試著把學習的時間拉長就會習慣它。數學上有很多內容都只是習慣的問題, 回想你過往的各種學習經驗, 對於一個很不熟悉的東西, 每天花時間消化, 給自己多幾次機會, 今天想不通, 明天再看一次, 透過心境上的轉變也會讓你的思緒產生不同的變化。

0.3.2 數學論證能力尚未成熟

回想中學時期學習數學的模式, 經常都是在介紹完一個觀念後緊接著透過例題或習題去認識或強化它。我在高中的時候學數學其實也帶著一種很現實的心態: 反正我題目解得出來就好了, 老師在上課所說的那些數學公式推導或是相關性質的證明好像了解個大概, 也不會特別去深究。但是當我一上大學馬上就發現我不能再用同樣的想法去面對數學, 正因為大學數學要學會的是數學理論的所有組成, 而數學理論又是透過證明逐一鋪陳, 所以要是逃避數學證明, 那麼整個大學的學習就會幾近空白。

回憶那些你曾經證明過的數學問題, 或許最多的情況是平面幾何證明三角形的全等或相似, 再來就是數學歸納法用得很順手, 然後有時遇到一些題目看起來像是證明題, 但是論述的方式好像就是一些計算、替換、化簡後結果就出來了, 這種感覺好像和論證又有一點不太像。若你沒有參加過數學競賽的話, 剛才那些幾乎就是你的證明經驗。

現在中學數學似乎愈來愈不強調證明, 然而大學數學系又著重在論證, 那麼總是要有一個學習如何證明的起點。無論如何, 正視並提升自己的數學寫作 (數學證明), 即使你過往在數學論述缺乏經驗也不打緊, 就從現在開始好好學習吧!

有一些初學者對線性代數的印象是矩陣計算, 這在數學系線性代數中並非如此。這門課大概會在第一學期的中間正式引入矩陣的運算並將矩陣與線性代數的理論 (線性變換) 結合, 然後在第一學期的後段討論矩陣的操作與聯立方程式的關係; 行列式的理論是在第二學期介紹, 而第二學期中段提及的對角化理論會有比較多矩陣運算。這段話也預示著數學系線性代數的第一階段就是透過一連串的證明描繪向量空間 (前面的單元有說這是線性代數所要研究的數學主體) 的結構。

至於數學證明的方式有很多種, 直接證法、反證法、矛盾證法是三個標準類型, 就算是直接證法, 對於一個命題, 有些是利用建構的方式得到結果, 也有些是用理論探討最終透過大定理或是最一開始的公理而必須接受存在性。至於證明的手法千變萬化, 若要學得精深, 將看過的證明學會當中的精神逐步堆疊並累積經驗是一個方式。

如何提升你的數學論述能力呢? 可以分成兩個階段: 先學會看懂證明, 再學會如何寫證明。在看懂證明的部分, 面對一個定理的證明, 除了每字每句前因後果的邏輯關係確實了解外, 可以再問自己幾個問題: 定理的前提有哪些? 最後要得到的結果是什麼? 證明的手法是什麼? 定理的條件在證明的哪個地方用到? 那些條件是否真的都有用到? 問這些問題是幫助你看清楚證明的結構。

再稍微進階一點的提問是: 為什麼定理需要那麼多的假設與條件? 如果這些條件少了一個或是換成其它條件的話定理仍然成立嗎? 還是說就可以造出反例? 證明的手法是否和過去曾經看過的證明類似? 若是一個全新的手法, 能否體會它的神來一筆? 這個證明真的需要用那麼長的篇幅嗎? 有沒有可能不要用那麼複雜的手法處理呢? 還有一個方式也可以嘗試: 看到一個定理及證明, 先把定理敘述遮住, 直接看證明的內容, 問自己是否有辦法從這些長篇大論中寫出定理的敘述, 再將自己寫下的定理和原定理對照, 這樣可以幫助你知道定理的前提與結論的一致性。

至於如何數學寫作是需要長時間培養的事, 數學證明不像平常的作文, 因為力求清晰正確, 把每個段落的訴求都清楚表達是最重要的事, 不需要用過於花俏的字句或寫作手法, 有時帶有條列式的風格會有不錯的效果。論述是要讓閱讀者能夠很順暢地知道你要表達的意思, 所以不要太跳步驟, 適當地補充說明, 特別是那些不顯然的事實應盡可能地解釋清楚。試著模仿如何數學寫作, 最終會有一套自己的獨特風格, 把數學寫作當成一個長期的投資, 思路才會愈來愈清晰。

0.3.3 始終無法掌握線性代數的精神

每個人都有學習數學或理解數學的方法, 而且看待的方式不盡相同, 這是很有趣的現象。不曉得各位有沒有想過一個問題: 自己的數學腦是屬於哪種類型? 這裡或許以代數腦與幾何腦作為最粗略的二分法好了, 當你在想一個數學問題時, 你會習於用符號處理問題, 還是會想像它有沒有幾何圖形的方式去解釋它?

算幾不等式 (Arithmetic-Geometric Mean Inequality) 是一個很經典的例子, 算幾不等式是說:「對於 $x, y > 0$, 則 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$。」若從代數的方式理解算幾不等式, 則是考慮左式的平方減掉右式的平方, 即

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - (\sqrt{xy})^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} - xy = \frac{x^2-2xy+y^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{xy})^2$, 再用 $f(x) = \sqrt{x}$ 是遞增函數 (increasing function) 的事實, 還有 $\sqrt{x^2} = |x|$ 的結果得到

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} \geq \sqrt{(\sqrt{xy})^2} \Rightarrow \left|\frac{x+y}{2}\right| \geq |\sqrt{xy}| \xRightarrow{(x,y>0)} \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}。$$

至於 $f(x) = \sqrt{x}$ 是遞增函數的討論如下: 對於 $0 < x_1 \leq x_2$, 計算

$$\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \cdot \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} \leq \sqrt{x_2}。$$

至於用幾何的方式證明算幾不等式的方法如下: 如圖 1, 在數軸上依序標出 A, B, C 三點使得 $\overline{AB} = x, \overline{BC} = y$, 取 O 為 $\overline{AC}$ 的中點。以 O 為圓心, $\frac{x+y}{2}$ 為半徑畫出上半圓, 再作通過 B 且垂直於 $\overline{AC}$ 的直線, 該直線與半圓的交點記為 D, 最後連線 $\overline{OD}$。

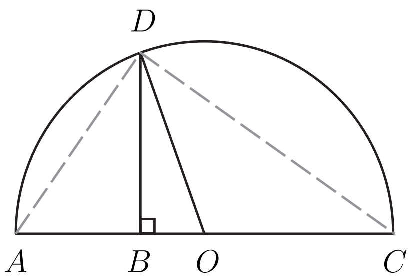

圖 1: 算幾不等式的幾何證明。

因為 $\overline{OD}$ 為圓的半徑, 故長度為 $\frac{x+y}{2}$, 我們可證明 $\overline{BD} = \sqrt{xy}$, 這麼一來, $\triangle OBD$ 是直角三角形, 其中 $\overline{OD}$ 是斜邊, $\overline{BD}$ 是另一邊, 故有 $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$。

至於 $\overline{BD} = \sqrt{xy}$ 需要用到相似形的證明: 連接 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CD}$, 考慮 $\triangle ABD$ 與 $\triangle DBC$, 因為 $\angle ABD = \angle DBC = 90°$, 而 $\angle BAD + \angle BDA = \angle BDA + \angle BDC = 90°$ 得到 $\angle BAD = \angle BDC$, 所以 $\triangle ABD$ 與 $\triangle DBC$ 相似 (AA 相似), 於是

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{x}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{y} \Rightarrow \overline{BD}^2 = xy \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{xy}。$$

在看過算幾不等式的兩種證明後, 想一想你比較喜歡哪一種證明? 或是說未來有人問你算幾不等式時, 你會用哪一種證明方法呢? 各位可以看到兩種證明方式各有特色, 一個是透過巧妙的配方操作以確定兩個量相減非負, 然後具體掌握開根號的操作保持數字大小, 還有數字開平方開號與絕對值的關係。另一個是將兩正數分別對應到直角三角形的斜邊與另一邊則可確定長度大小的關係, 特別是兩數相乘開根號的尺規作圖原理頗具巧思。

這裡為什麼會突然提到思考數學的模式? 這是因為有時候如果你看數學的方式不對的話, 會比較不容易掌握到學問的本質。據我的經驗, 代數課還有複變函數論的課程就比較不適合用幾何圖像化的方式理解, 代數課很講求每個運算規則的合理性還有各種代數結構之間的關聯性, 直接從運算的過程探索相關的知識會比較理想。至於複變函數論, 簡單說來它是討論以複數為變數的函數, 因為定義域與對應域都是複數, 本身不容易去畫出函數的圖形, 直接利用分析上的估計原理去體會這個學科會比從幾何的方式去思考還要容易掌握複變函數論。

那線性代數又是怎麼回事呢? 我們要用代數式思考還是幾何式思考呢? 線性代數的本質是代數, 自然用代數式思考是一個標準的看待方式。所以當你翻遍線性代數的教科書, 幾乎都是密密麻麻的文字, 看不太到什麼圖形。所以多數的人就會從代數的方式切入主題, 而這是一個認識線性代數不錯的切入點。

而線性代數的特色是它的應用層面很廣, 自然在幾何領域中有非常多現象與原理都可以和線性代數結合, 從最一開始向量空間的定義, 線性相依與線性獨立、基底的認識, 幾個特殊的線性變換 (伸縮、對稱、旋轉、投影) 的圖像化表示, 跡與行列式在幾何上的意義, 矩陣正交對角化 (orthogonal diagonalization) 和旋轉矩陣的關係, 內積的引進與幾何的聯繫, 這些內容都可以再透過幾何與圖形再次理解它, 當一個概念多了幾何的思維在裡面, 則會看到不同的風貌。實際上向量空間的形成最初也是在於我們有了向量的操作, 之後才慢慢發現很多其它的事物都與向量操作的概念一樣, 所以才會把這些想法做系統性地整理。

在你學了線性代數一段時間後, 若你始終無法掌握線性代數的精神, 那麼這個問題很有可能是出在你看待學科的方式需要調整。這邊要給各位的建議是: 學習線性代數時, 用代數式與用幾何式的思考都很好, 甚至應該並行且相輔相成。若你是代數腦, 習於從數式推演的過程理解線性代數, 當你一直不清楚內部的原理時, 可以想一想它在歐氏空間 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中代表的意思; 若你是幾何腦, 在認識定理敘述與證明時, 可從歐氏空間為模型確定這個定理想要傳達的概念, 確定清楚後, 試著將每個意義轉換成數式的推演將論述完成。

這個單元的最後, 我想試著把線性代數的精神再更聚焦一點, 雖然單元 0.1 已經大致介紹線性代數是什麼樣的學科, 也強調了數學系線性代數的學習重點, 而那裡的說明或許還是有點籠統。我覺得線性代數的精神可以三言以蔽之:

- 基底是撐起向量空間的骨架。
- 對於線性變換, 只要知道基底如何轉變, 就可以完全確定這個線性變換。
- 矩陣是將線性變換具體實現的一個數學物件, 線性變換的矩陣表現和基底選取有關。

各位在學線性代數時不妨經常把這三句話拿出來檢視, 想一想目前學到的東西和這三句話的關聯。當然你也可以自行增減你對線性代數的認識。

0.4　學習數學系線性代數的建議

前一個單元說明了學線性代數的困難並給出建議, 這裡還想再提出幾個看法可以思索。

0.4.1　學線性代數時勿操之過急

前面的單元已說明大學數學所要學習的內容是在認識每個數學學科的理論, 在正式進入線性代數的討論時, 你可能會遇到和你過往思維的一些衝突, 以下舉例說明之。大學數學會去深究許多看似再自然不過的問題, 例如: 在開學第一周就會提到關於數字消去律 (Cancellation Law) 的定理:「若 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 滿足 $a + c = b + c$, 則 $a = b$。」當你第一次看到這個定理時, 可能就會帶著諸多疑惑: 啥鬼? 消去律不是本來就對嗎? 這個規則我從以前到現在都經常地使用, 這種你知我知的性質為什麼還要證明它? 縱使經過一番思索與沉澱後你接受了消去律是一個需要證明的命題, 那麼隨即會遇到的困難是: 我要如何給出證明啊? 我的論述要寫到什麼地步才算是完整的證明呢?

這裡再舉幾個例子以突顯這個問題:「關於實數系 $\mathbb{R}$ 中的加法單位元素 0, 它是唯一的。」想必很多人又有話想講: 傻眼, 0 不就是 0 嗎? 這就是一個數, 你認知的 0 和我所認知的 0 不就是同一個嗎? 這有什麼好爭執的? 唯一性也要證明? 這到底有什麼好證的?

再來我想再拿微積分的例子說明這個現象, 比方說以下算式是你過去在寫微積分題目時習以為常的計算:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} \overset{\text{(A)}}{=\!=} \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} \overset{\text{(B)}}{=\!=} \lim_{x\to 3} x+3 \overset{\text{(C)}}{=\!=} \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 3 \overset{\text{(D)}}{=\!=} 3+3=6,$$

這裡想要強調的是: 大學數學的學習重點並不是在把答案快速求得這個層面而已, 而是要確信自己寫下來的每一句話、每一個等式的原因是否都非常清楚。針對上面的式子, 以下提出幾個問題, 你應該要想清楚每個問題的結果:

- 對照 (B) 的左、右兩式, 這兩個函數是不一樣的 (比方說兩式的定義域就不同, 左式在 $x = 3$ 的地方無意義, 而右式在 $x = 3$ 的地方有意義), 可是將兩式取極限之後會相等, 這裡會使極限相等的機制是什麼?

- 等號 (C) 用到極限的四則運算 (兩個量相加的極限等於各自取極限再相加), 極限的四則運算在什麼情況下會成立? 如果從比較代數一點的方式去想這個問題時, 它牽涉到的是兩種運算的交換性; 也就是說, (C) 的左邊是先把函數相加再求這個函數的極限, 而 (C) 的右式是先求函數在一點的極限, 然後再把極限值相加, 所以兩個運算的操作順序不同。若是你再把問題想得更深入一點, 會發現到 (C) 的左式的加法是函數的加法, 而右式是兩個實數相加, 兩個加法的層級也有一點不同。

- 等號 (D) 計算極限是把 x 用 3 代入而得到極限值為 3, 可是在等號 (A) 的時候我們又不能直接把 3 代入函數。計算極限時, 什麼時候我們可以直接代入而什麼時候不能代入呢? 是只有在分母代入後為零的情況下才不能這麼做嗎? 這個問題會歸結到另一個問題: 對於一個極限問題, 什麼情況下極限值與函數值相同呢?

由前面的幾個例子可知學數學並不是一件簡單的事。我們以前學數學的速度都太快, 並沒有好好停下來思考每個步驟的意義與正確性, 現在開始必須下苦工把每件事情、每個等號、每個估計、每個推論都弄得一清二楚, 否則總是在一個心浮氣躁的心境下學數學, 每寫一步又不確定這樣到底對或不對, 這樣很容易出狀況, 總是帶有不確定性的數學功力也無法發揮到別的場合。將字裡行間的意義逐一確認要花上很長的時間, 但這是一個絕佳的投資, 磨練一段時間後踏實感會建立起來, 之後的路自然就會愈走愈快也愈來愈順。

就執行面而言, 有一件事情必須澄清並討論, 之前有同學在聽了我說的話之後深表認同, 所以決定要在讀數學的時候不放過任何問題, 力求每個地方都弄得一清二楚。但是, 他在第一次遇到關卡的時候, 想了很久沒有弄懂, 想說明天再給自己一次機會思考, 隔天同樣的地方還是困住, 之後也持續這樣, 結果就一直停留在同一個地方打轉, 最終學習的進度幾乎是零。

有打破砂鍋問到底的態度是很好的, 但這之間也必須顧及現實的考量, 人的一天只有二十四個小時, 一個學期才短短的十八週, 一個學科有進度的壓力, 而且學期間一次要面對很多的科目, 不僅如此, 在非課業的部分也需要學習, 這樣忙碌的生活中要如何拿捏也是一門學問。試著在大學四年當中做好時間的管理, 日後必受用無窮。

針對上述同學的狀況, 這裡要給的建議是將事情折衷處理, 比方說一個問題給自己三次解決的機會, 每次機會設定十分鐘 (幾次和幾分鐘應隨自己可允許的時間還有問題的難度調整), 如果這三次機會時間過去了困難依舊存在, 那麼就應該尋求協助, 找同學、助教、老師討論是一個方式, 上網查資料與相關資源也是解決問題的方法。

除了上述大家應該想得到的標準做法外, 這裡要提一個新的看法, 那就是對於那些經過幾次自我解答的機會後仍然解決不了的困難, 就把它標註起來, 暫時先接受它, 先繼續往後學習。有時後面的內容可以幫助你把前面不懂的地方補足, 這是因為學習是一個不斷來回的過程, 先把流程全部走過一次, 記錄自己的盲點以及要加強的地方, 然後再試一次, 這麼做有時也可以解決當初的盲點。我們不可能每次走的都是非常順的路, 所以試著把所有流程先走過一次可以幫助你了解整體架構, 而這麼做也可以維持進度繼續前行不至於停滯不前。

回到與同學、助教或老師討論的部分, 這也是一個很好的學習機會, 正如前所述, 因為每個人的數學思維都不盡相同, 藉由和別人的交流, 觀察別人怎麼思考這個問題, 想一想為什麼別人解得出來但自己解不出來, 或是為什麼別人解得比你還要快很多, 察覺到問題的關鍵, 這有助於日後看問題的方式增加經驗。

但是這裡我想要強調一點的是: 問別人問題之前自己必須先花足夠的時間思考, 這樣子問別人才會有好的效益。一個問題你想了一陣子沒有想通於是尋求協助, 在和別人互動時, 你可以把遇到的困難描述得很精確也很聚焦, 如此就容易對症下藥把疑點處理掉。有時學生來問我問題的時候, 我最害怕聽到的就是「這個定理我不懂」或是「這題解不出來」, 因為我完全不知道要從何幫忙起。其實每個人的問題都只是一個小小的地方, 又或者說, 就算是問題很大, 那也是數個小問題組合而成, 透過清楚表達每一個小困難給別人聽, 逐一把結打開來就結束了。

現對這個單元做最後總結: 放慢腳步探索數學 (不限定是線性代數, 其它的數學學科也是如此), 一開始你可能並不清楚學數學的重點, 或是有很多數學上的疑問, 這時給自己機會沉澱下來釐清自己的疑問, 先訓練有沒有辦法自己解答, 若時間上已經嚴重擠壓到進度或是其它要做的事, 適時找別人求助以解決問題。

0.4.2 讀書習慣的改變

有空找個機會把高中數學課本和大學數學教科書同時放在書桌上比較它們的差異。外觀上很明顯看出厚度差很多, 內部排版也有差, 高中課本排版比較寬大, 而大學教科書編排緊湊, 字體與行距也較小。

現在問題來了, 若我們把高中數學課和大學的某一門數學科目相比較 (例如線性代數), 高中數學課的上課時間是一星期四到六節, 而線性代數一星期只有三節課; 高中數學一節課只講一至兩個觀念, 大學數學的一節課就會講很多理論; 至於深度就更不用說了, 前面單元已說明大學數學內容抽象又理論是學習的一大罩門。從這些客觀的比較就知道你不可能再用同樣的讀書方式面對大學的課業。

那要怎麼做才能顧好大學的學業呢? 讀書習慣的改變是一件很重要的事。如果你以前看書的習慣都是從第一個字精讀到最後一個字, 現在不會有這麼多時間讓你用同樣的方法學習。那要怎麼做才會是好的讀書方法呢? 以線性代數為例, 每次讀書時應設定一個主題, 例如: 接下來的三十分鐘我想要把向量空間的定義弄清楚, 有了目標之後, 你就可以從上課筆記、講義、教科書或是課程錄影等資源綜整出向量空間相關的內容。再舉一個例子, 周末的一個晚上可以選擇一個時段思考線性代數的意義, 於是你可以翻開線性代數的教科書以比較隨興一點的心情閱讀每一單元的前言, 還有那些穿插在定義、定理、證明之間的文字說明, 然後思考前後單元的關聯, 甚至可以想一想不同學科的關係。

在讀書前設定主題是一個提升效率的方式。每次設定的主題不見得要完全依照上課或書本的順序, 以我的經驗, 我會優先處理最重要的主題或是我最不熟的主題, 這是因為它們需要花較多的時間消化及解決。讀數學最好是在一個不受打擾的環境下進行, 靜下心思考數學比較容易把問題澄清, 所以手機、電腦等應暫時遠離或關機, 等讀書告一個段落之後再使用它。

在修一門課的時候, 建議手上要有兩本以上的參考書, 因為只看一本書不見得會看得懂, 手邊若有另一本書可以互相對照並比較, 可幫助你對該主題的認識。若你的經濟狀況不允許你再添購書籍, 善用網路資源是一個替代方案, 透過網路搜尋關鍵字就能找到非常多相關的資料, 只是網路資源會有較多的錯誤, 書本因為有經過較嚴謹的審查程序所以錯誤率極低, 所以當你在使用網路資源時應多加啟動你的辨思能力, 不該全然地相信網路上的內容, 但這對剛開始學習高等數學的你來說可能會有一點困難, 也因此我才會比較建議有書籍類型的參考書較佳。

有些人習慣把讀書時間安排得滿滿的, 比方說某一天晚上八點到十一點有三個小時的時間可以讀書, 於是擬定讀書計畫是微積分、線性代數、英文各花一個小時, 並在開始讀書前給自己很高的期許希望完成它。結果當天晚上和朋友吃飯超過晚上八點, 也不好意思說我想要回去讀書, 終於要開始讀線性代數的時候又大卡關, 一個小時過去了進度根本不到預計的一半, 最後進度全被打亂而失敗收場。

要知道大學的生活相較於高中會有很多不確定性, 像是剛才描述的非課業部分會有一些不確定性, 而課業的部分因為數學內容變深變難所以你也很難掌握是否可在時限內完成進度。所以這裡我想要提供一個擬定讀書計畫的方式, 以三小時切成三個一小時為例, 不要將三個時段都安排事情, 而是三個時段只放兩件事情, 例如第一個時段放線性代數, 第二個時段放微積分, 第三個時段則是空白。空白的時段當做是緩衝時間, 若是因為吃飯而延誤你的晚上規劃 (八點到八點半要讀線性代數無法執行), 那麼就是用空白時段去補原先的進度 (十點到十點半強制自己讀線性代數), 如果你讀書的時候遇到卡關 (微積分有一個地方看不懂, 花了太多的時間), 那麼就可以在空白的時段補足進度。如果你的兩個讀書時段都有照進度完全達標, 那麼你就可以給自己獎勵, 空白的時段休息一下, 或是當下放進一個新的計畫。總而言之, 這樣的設定你會比較容易達成目標, 制定計畫才有意義, 也才會持續下去。

0.4.3 把上課當成第一次的複習

每年班上會有非常多同學在一種渾渾噩噩的情況下修習每一門數學課, 他們述說的狀況如下: 當我進到教室後老師開始介紹一個從未聽過的數學內容, 在我還沒搞清楚定義的時候老師就開始要介紹定理了, 當我對於定理敘述了解個大概時, 老師就已經把這個定理證明完畢了, 我始終無法跟上老師的腳步。另外一種經常出現的情況是: 我在上課的前五分鐘就聽不懂了, 我認為我前面沒有搞懂的話後面聽再多也沒有用, 所以我決定在上課的時間努力地把前面五分鐘的內容搞懂, 結果每次一節課過去了我只會上課前五分鐘的內容。

學生每次在上課聽不懂的時候就會以羨慕的眼光盯著老師, 然後想著: 為什麼老師那麼厲害, 這些抽象的內容以及這麼複雜的理論為什麼老師都懂呢? 相較之下覺得自己數學很差。事實上, 老師並沒有比你厲害, 授課教師只是聞道有先後早你二十年 (或更多) 學了這個理論, 之後又經過長時間數學的薰陶自然對這個理論比較清楚, 而且只要每開設過一次課程後下次再開同樣的課時, 授課經驗又會更豐富, 所以老師的講授經驗也是逐年累積且進步的, 而且比你學習的進步幅度還要來得大很多。

難道因為這樣我們就甘願變成在教室裡總是學不到完整的內容嗎? 可是看到教室裡好像又有一些同學都聽得懂的樣子, 於是又開始懷疑自己的數學程度和班上同學是不是有落差。針對這樣的困境, 這裡想要提供一個很好的解法, 那就是進行課前預習。每個人都會覺得課後複習很重要, 每天回家把上課的內容做整理, 每次期中測驗與期末測驗前我們也都是拼了命地複習, 所以大家的學習經驗都是在複習中不斷輪迴。實際上課前預習比課後複習重要, 而且是重要太多了。試著在上課前花時間預習隔天 (或是下一節課) 要學習的內容, 拿起講義或是教科書自己先看過一次, 有些是你自己看過一次之後就會的內容, 而有些地方是你看了之後還不是很清楚, 將那些不懂或是不確定的地方註記起來。

進行課前預習除了啟動你的自學能力, 另一個作用是你心中帶著目的而進到教室, 接下來的五十分鐘是要解決你的疑惑。上課並不是五十分鐘都是全神貫注的, 只要把當初你在預習時發現不懂的地方, 透過老師在課堂上的講解幫助你解除心中的困惑, 你這一節課就有收穫且值得, 而這段時間就轉變成你對數學內容的第一次複習。你把這段話和這個單元一開始述說的兩個狀況相比較, 你會發現預習的效果會讓你上課的時候變得有效率而且有意義。至於你可能會想: 為什麼以前的學習不太需要預習? 原因就在於大學數學在難度、深度、內容量都比以往還要大非常多, 是完全不同等級的, 藉由自己先把內容消化過一次, 上課的時候藉由老師的協助解決你需要幫助的地方, 而不是被動地等著老師告訴你一個完全不懂的東西, 讓整個心情大受影響。

這時你可能會想: 我怎麼可能會有時間預習? 若仔細思考就會發現, 你只要在最一開始的時候花時間預習, 之後本來預計要課後複習的時間就可以改成下一次預習的時間。因為你先有了預習, 上課的時間就變成你的複習時段, 而且在複習 (上課) 的過程中把所有心中的疑問都解除了, 於是複習完畢, 如此你在下次上課前就可以啟動新的預習。

我在大學的時候, 微積分和線性代數的前兩節課都是空堂, 所以我會用那個時間拿起教科書和自己對話, 我透過預習培養了一些自學的能力。當然不可能每次微積分和線性代數的前兩節課都完全沒有事情讓我好好預習, 因為別的事情擠壓所以有時只有十幾分鐘的時間預習, 這時當然沒辦法把預習做到位, 但我還是把握時間趕緊拿起書本把等一下上課會提到的定義還有定理至少敘述先看過一次, 確認自己對於定義還有定理中的數學符號還有語句都很清楚, 其實這樣的預習效益就非常大。

總而言之, 我透過預習的方式使得我的數學能力有十足的成長, 在此分享給大家參考。

0.5 結語

回想我在大一入學前暑假的某一天, 我的直屬學長打電話到我家關心我 (那時手機並不普及, 我大學的時候也沒有手機), 那時我問他一個問題:「線性代數是要學些什麼?」我印象中他講了十幾分鐘在介紹線性代數, 當時的我聽不太懂學長在說什麼, 但我很確定的是線性代數絕對不是像高中那樣算一算矩陣就結束的事。

現在回想起來, 雖然我當時不懂學長介紹的數學內容, 但是那十幾分鐘告訴我很多事情, 不論是我對課程的想像需要調整, 對課程的難度也不容忽視, 對於大學的生活要怎麼重新調適, 如何改變高中時期的學習心態要即早準備。所以數學不是聽過一次就馬上學會, 而且數學內容只是學習的一個面向, 如何從學習的過程中體會到其它的事情, 甚至得到更高層次的心靈成長, 這些都是學習的附加價值。

透過第零章的說明, 希望大家對於線性代數還有大學數學有一個初步的認識, 我相信這些內容有相當大的部分是各位不曾思考過的。對我來說, 藉著第一次開設線性代數這門課之前的暑假, 除了準備數學教材外, 也花了好長一段時間回顧自身的學習經驗, 把對數學、讀書的各種體會記錄下來並分享給各位。

開學在即, 給自己設定一個目標迎接開學, 面對接下來的挑戰。祝大家求學順利。