5

數系的建構

回想我們從小開始學習數學的過程, 首先從認識數字開始, 從正整數認識起, 然後學習加法與乘法的運算規則, 當我們開始討論減法的時候, 就會發現到正整數不夠用, 於是產生整數的想法; 在討論除法的時候, 就會意識到整數不夠用了, 這時候就引出分數 (有理數) 的概念。

早在畢達哥拉斯的年代就已經知道有些概念無法用兩個整數之比表達, 於是產生無理數; 然而, 從有理數與無理數組成實數的過程中面臨到極大的困難, 無理數集到底是什麼需要透過極限 (或是與極限等價的概念) 才有辦法說清楚, 關於實數的完備性要到十九世紀戴德金 (R. Dedekind, 1831–1916) 的時候才得以建構清楚。當我們在討論二次方程式的求解時, 很快就意識到實數是不夠用的, 由此複數隨即產生。

上面是我們對於數系 — 自然數、整數、有理數、實數、複數 — 的基本認識, 而在求學的過程中, 這些認識都是數學老師告訴你有這些結果, 直接把它當成規定或規則而要求每個人都必須遵循它。而現在我們要退回到根本的問題, 想要針對每一個數系去問什麼是構成數系最基本的要件 (公理), 而哪些是可以被推論出來的結果, 這就是數學家們花了相當大的心力與工夫去探索, 很幸運地, 前人對於數系理論所種的樹已經完整地建立, 我們得以乘涼去享受這些建立好的果實。

這一章的主要目的是想從公理化的角度重新介紹數系。單元 5.1 要介紹的是自然數系, 我們從皮亞諾 (Giuseppe Peano, 1858–1932) 當時對於自然數的五大公理作為出發點說明自然數集合的主要結構, 它是一種有源頭且無止盡的單一直線連繫前後元素的結構; 此外, 我們從馮諾曼 (John von Neumann, 1903–1957) 試圖把皮亞諾所提之自然數集 (natural number set) 從公理化集合論的角度去看每個自然數與集合之間的對應關係, 由此引進加法還有乘法的運算。

自然數集合中有一個種要的公理稱為數學歸納法原理, 由此我們可以驗證自然數集配合加法而言具有結合律與交換律, 還有自然數集配合加法與乘法而言有分配律, 以及自然數集配合乘法而言具有交換律與結合律。最後, 從自然數的後繼關係引進不等式, 並驗證自然數集配合不等式的關係而得偏序集與全序集。

至於整數系的由來, 我們可以透過自然數系配合等價類的原理而得, 這會是單元 5.2 所要討論的內容。更進一步地, 由整數系出發再做一次等價類的過程可以得到有理數系, 這個建構過程會在單元 5.3 提及。從有理數過渡至實數的過程則是想從戴德金切割原理的角度去建構它, 這裡只會在單元 5.4 簡單說明, 詳細的論證過程則是在高等微積分課程的一開始仔細介紹。至於複數的結構還有相關的理論像是代數基本定理則會放在單元 5.5 討論。

5.1 自然數系

人類從很早以前就已經會用一些符號或方法進行計數, 若以現在的眼光去看那些古文或古書的記載也能推知那些符號代表著計數這件事; 另一方面, 每個國家有各自的語言, 當阿拉伯數字寫著 $1, 2, 3$, 中文字是用一、二、三表示, 而羅馬數字是用 i, ii, iii 註記, 那我們要怎麼知道每個人所想的是同一件事? 關於這個問題將牽涉到我們要如何界定自然數集 (natural number set) 以及自然數系 (natural number system)。在討論這個問題之前, 至少很清楚的一件事情是: 我們不能用符號長得一樣或不一樣來認定每個人所感受到的自然數是否一致。

關於自然數集的模型, 現為人所推崇的是皮亞諾 (Giuseppe Peano, 1858–1932) 對於自然數的五大公理作為出發點:

公理一 0 是自然數。

公理二 每個自然數 n 都有其後繼元素 (successor) n^*。

公理三 0 不是任何一個自然數的後繼元素。

公理四 不同的自然數有不同的後繼數; 若自然數 m, n 與它們的後繼元素滿足 $m^* = n^*$, 則 $m = n$。

公理五 (數學歸納法原理, Principle of Mathematical Induction) 假設 E 是一個自然數集的子集合, 並且滿足 (A) $0 \in E$ (B) 若自然數 $n \in E$, 則有 $n^* \in E$, 則集合 E 包含所有的自然數。

注意到在皮亞諾所設立的自然數集合中, 0 被視為自然數, 而由 **公理三** 知道: 0 是自然數的初始元素。至於自然數是以 0 為初始元素還是 1 為初始元素, 其實彼此是等價的, 這是因為我們現在看待兩個東西是否等價, 並不是用符號去判讀它們的異同, 而是從整體的結構去認定它; 也就是說, 皮亞諾系統中把初始元素稱為 0, 由此都可以得到後繼元素還有相應的規範; 而各位在小學的時候學到以 1 為初始元素的系統中, 系統的結構現在所要描述的是一模一樣的。

這裡再次觀察皮亞諾怎麼給出關於自然數集合的概念。首先, **公理一** 告知自然數集不是空集合。再則, 若只有 **公理一** 與 **公理二** 仍無法完全刻畫自然數集, 例如: 我可以指定 0 的後繼數是 0, 只有 0 一個元素所成的集合並非心中所想的自然數集。若是再增加 **公理三** 的話, 雖然可以排除上述只有 0 一個元素所成的集合的例子, 但無法排除跳過 0 而之後的數字籍由後繼數形成迴圈的形式, 例如: 考慮 $\{0, 1, 2, 3\}$, 指定後繼數的關係為 $0^* = 1, 1^* = 2, 2^* = 3, 3^* = 1$, 這也不是我們要的自然數結構。我們可以用圖形的方式描述上述的想法, 如圖 5.1, 以黑點代表自然數的元素, 以箭頭表示該元素與其後繼元素的關係, 則這兩個圖形中關於元素與後繼元素的關係都不是自然數集的結構。

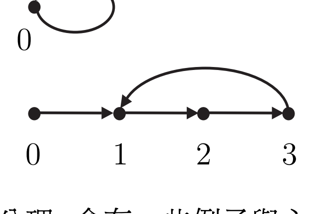

圖 5.1: 若只有前兩個或前三個公理, 會有一些例子與心中所認為的自然數結構不一致。

當我們再補上 **公理四** 之後, 除了可以排除像是圖 5.1 有迴圈之情況, 更仔細地說, **公理四** 確保一個元素只會存在唯一後繼元素, 所以圖形不會在任何地方分岔; 而且由後繼元素的相同可以回推原來的元素相同, 這將告知圖形不會有兩線併成一線的情形。

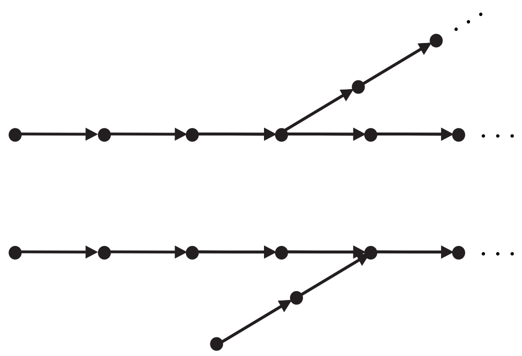

圖 5.2: 增加公理四可以把分岔成兩線 (上圖) 或兩線併成一線 (下圖) 的情況排除。

至此, 前四個公理似乎足以說明自然數集的結構。然而, 只有前四個公理仍然無法排除主線外多了另外獨立於主線的元素, 如圖 5.3, 考慮 $\{0,1,2,3,4,5\ldots\}\cup\{\alpha\}$, 則這個集合不會滿足 **公理五**。

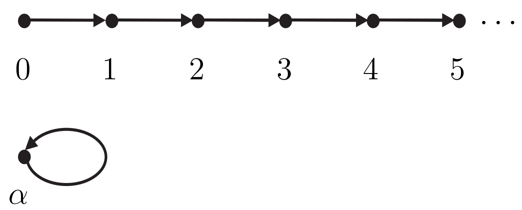

圖 5.3: 透過公理五將上述的情況排除。

綜合上述討論, 我們對於自然數集在結構上的想像是一種有源頭且無止盡的單一直線 (無分岔無匯聚且只有一條) 的形狀。

到了公理化集合論逐漸成形且完整之時, 馮諾曼 (John von Neumann, 1903–1957) 試圖把皮亞諾所提之自然數集 (natural number set) 透過集合的方式重新表述, 甚至進一步地對於自然數集合探討加法 $+$ 還有乘法 $\cdot$ 的運算, 最終而得到自然數系 $(\mathbb{N},+,\cdot)$ (natural number system)。

以下將介紹如何從集合論的觀點看待自然數並且驗證加法與乘法運算規則的所有性質。定義

- $0 \overset{\text{定義}}{=\!=} \emptyset$, 將空集合記為 0。
- $1 \overset{\text{定義}}{=\!=} \{0\}=\{\emptyset\}$, 將空集合所成的集合記為 1。
- $2 \overset{\text{定義}}{=\!=} \{0,1\}=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$。
- $3 \overset{\text{定義}}{=\!=} \{0,1,2\}=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$。

由此與皮亞諾公理相較, 我們得到一個自然數的 n 的後繼元素與集合的表示關係會是 $n^* \overset{\text{記}}{=} n\cup\{n\}$。現將自然數所成的集合記為 $\mathbb{N}$。

現在要討論自然數集合對於加法的結構與性質。對於 $m, n \in \mathbb{N}$, 定義

- $n + 0 = n$。
- $n + m^* = (n + m)^*$。

定義加法運算後, 我們就可以證明 $1 + 1 = 2$ 這件事了。

定理 1. 在 $(\mathbb{N}, +)$ 中, 證明*:* $1 + 1 = 2$。

證明: $1 + 1 = 1 + 0^* = (1 + 0)^* = 1^* = 2$。 □

以下要討論的是自然數集對於加法運算的性質, 先證明結合律, 再證明交換律。

定理 2. 在 $(\mathbb{N}, +)$ 中, 加法運算具有結合律 (associative law of addition)*;* 也就是說, 對所有 $l, m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $(l + m) + n = l + (m + n)$。

證明: 考慮集合 $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{對所有 } l, m \in \mathbb{N} \text{ 滿足 } (l + m) + n = l + (m + n)\}$, 進行以下討論:

(A) 因為 $(l + m) + 0 = l + m$, 而 $l + (m + 0) = l + m$, 所以 $0 \in E$。

(B) 若 $n \in E$, 即對所有 $l, m \in \mathbb{N}$ 等式 $(l + m) + n = l + (m + n)$ 成立, 現計算

$$(l + m) + n^* = ((l + m) + n)^* = (l + (m + n))^* = l + (m + n)^* = l + (m + n^*),$$

得到 $n^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $l, m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $(l + m) + n = l + (m + n)$。 □

定理 3. 在 $(\mathbb{N}, +)$ 中, 加法運算具有交換律 (commutative law of addition)*;* 也就是說, 對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $m + n = n + m$。

證明: 首先證明: 對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $m + 0 = 0 + m$。考慮集合 $E = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m + 0 = 0 + m\}$, 進行以下討論:

(A) 因為在 0 的情況下左式為 $0 + 0 = 0$, 右式為 $0 + 0 = 0$, 等式成立, 故 $0 \in E$。

(B) 若 $m \in E$, 即 $m + 0 = 0 + m$ 成立, 現計算 $m^* + 0 = m^*$, 以及

$$0 + m^* = (0 + m)^* = (m + 0)^* = m^*,$$

得到 $m^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m \in \mathbb{N}$, 都有 $m + 0 = 0 + m$。

再證明: 對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $m+1=1+m$。考慮集合 $E=\{m \in \mathbb{N} \,|\, m+1=1+m\}$, 進行以下討論:

(A) 因為在 0 的情況下左式為 $0+1=0+0^*=(0+0)^*=0^*=1$, 右式為 $1+0=1$, 等式成立, 故 $0 \in E$。

(B) 若 $m \in E$, 即 $m+1=1+m$ 成立, 現計算 $m^*+1=m^*+0^*=(m^*+0)^*=(m^*)^*$; 此外,

$$1+m^*=(1+m)^*=(m+1)^*=(m^*)^*,$$

得到 $m^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E=\mathbb{N}$, 故對所有 $m \in \mathbb{N}$, 都有 $m+1=1+m$。

以下要證明加法交換律。考慮集合 $E=\{n \in \mathbb{N} \,|\,$ 對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $m+n=n+m\}$, 進行以下討論:

(A) 前面已經證明對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $m+0=0+m$ 以及 $m+1=1+m$, 故 $0 \in E$ 及 $1 \in E$。

(B) 若 $n \in E$, 即 $m+n=n+m$ 成立, 現計算

$$\begin{aligned} m+n^* &= m+(n+1)=(m+n)+1=1+(m+n)=1+(n+m) \\ &= (1+n)+m=(n+1)+m=n^*+m, \end{aligned}$$

得到 $n^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E=\mathbb{N}$, 故對所有 $m \in \mathbb{N}$, 都有 $m+n=n+m$。 □

在探討完自然數集合上的加法運算規則後, 接下來要討論的是自然數集合上的乘法及其運算規則。對於 $m,n \in \mathbb{N}$, 定義

- $m \cdot 0 = 0$。
- $m \cdot n^* = m + m \cdot n$。

由此定義, 我們知道: 對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有

$$m \cdot 1 = m \cdot 0^* = m + (m \cdot 0) = m + 0 = m,$$

所以 1 稱為乘法的單位元素 (multiplication identity)。

為了要完整說明自然數對於乘法運算的所有性質, 我們需要一些鋪陳, 然後會從乘法對於加法的分配律 (又分為左分配與右分配兩種) 開始證起, 然後證明乘法交換律, 最後再證乘法結合律。

定理 4. 對所有 $m \in \mathbb{N}$, 都有 $0 \cdot m = 0$。

證明: 定義集合 $E = \{m \in \mathbb{N} \,|\, 0 \cdot m = 0\}$, 進行以下討論:

(A) 因為 $0 \cdot 0 = 0$, 所以 $0 \in E$。

(B) 若 $m \in E$, 即 $0 \cdot m = 0$ 成立, 現計算 $0 \cdot m^* = 0 + 0 \cdot m = 0 + 0 = 0$, 所以 $m^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m \in \mathbb{N}$, 都有 $0 \cdot m = 0$。 □

定理 5. 對於 $m, n \in \mathbb{N}$, 則 $n^* \cdot m = m + n \cdot m$。

證明: 考慮集合 $E = \{m \in \mathbb{N} \,|\, \text{對所有 } n \in \mathbb{N} \text{ 都有 } n^* \cdot m = m + n \cdot m\}$, 進行以下討論:

(A) 因為 $n^* \cdot 0 = 0$, 而且 $0 + n \cdot 0 = 0 + 0 = 0$, 故等式成立, 於是 $0 \in E$。

(B) 若 $m \in E$, 即對所有 $n \in \mathbb{N}$, $n^* \cdot m = m + n \cdot m$ 成立, 現計算

$$\begin{aligned} n^* \cdot m^* &= n^* + n^* \cdot m = n^* + m + n \cdot m = n + 1 + m + n \cdot m \\ &= 1 + n + m + n \cdot m = 1 + m + n + n \cdot m = m + 1 + n + n \cdot m \\ &= m + 1 + n \cdot m^* = m^* + n \cdot m^*, \end{aligned}$$

所以 $m^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $n^* \cdot m = m + n \cdot m$。 □

定理 6. 在 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 中, 乘法對加法具有分配律 (distribution law)*; 也就是說, 對所有* $l, m, n \in \mathbb{N}$, 都有

$$\begin{aligned} l \cdot (m + n) &= l \cdot m + l \cdot n \\ \text{以及 } (m + n) \cdot l &= m \cdot l + n \cdot l\text{。} \end{aligned}$$

證明: 先證明左分配律。考慮集合 $E = \{l \in \mathbb{N} \,|\, \text{對所有} m, n \in \mathbb{N} \text{ 都有 } l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n\}$,

(A) 因為 $0 \cdot (m + n) = 0$, 而且 $0 \cdot m + 0 \cdot n = 0 + 0 = 0$, 等式成立, 所以 $0 \in E$。

(B) 若 $l \in E$, 即對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, $l \cdot (m + n) = l \cdot m + k \cdot n$ 成立, 現計算

$$\begin{aligned} l^* \cdot (m + n) &= (m + n) + l \cdot (m + n) = m + n + l \cdot m + l \cdot n \\ &= m + l \cdot m + n + l \cdot n = l^* \cdot m + l^* \cdot n, \end{aligned}$$

則 $l^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $l \cdot (m + n) = l \cdot m + l \cdot n$。

再證右乘法分配律。考慮集合 $E = \{l \in \mathbb{N} \,|\, 對所有 m, n \in \mathbb{N} 都有 (m+n)\cdot l = m\cdot l + n\cdot l\}$, 進行以下討論:

(A) 因為 $(m+n)\cdot 0 = 0$, 而且 $m\cdot 0 + n\cdot 0 = 0+0 = 0$, 等式成立, 故 $0 \in E$。

(B) 若 $l \in E$, 即對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, $(m+n)\cdot l = m\cdot l + n\cdot l$ 成立, 現計算

$$\begin{aligned}(m+n)\cdot l^* &= (m+n) + (m+n)\cdot l = m+n+m\cdot l+n\cdot l\\ &= m+m\cdot l+n+n\cdot l = m\cdot l^* + n\cdot l^*,\end{aligned}$$

則 $l^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $(m+n)\cdot l = m\cdot l + n\cdot l$。 □

定理 7. 在 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 中具有乘法交換律 (commutative law);也就是說, 對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $m\cdot n = n\cdot m$。

證明: 考慮集合 $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 對所有\ m \in \mathbb{N},\ 都有\ m\cdot n = n\cdot m\}$, 進行以下討論:

(A) 因為 $m\cdot 0 = 0$ 而且 $0\cdot m = 0$, 等式成立, 故 $0 \in E$。

(B) 若對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $m\cdot n = n\cdot m$, 現計算

$$m\cdot n^* = m + m\cdot n = m + n\cdot m = n^*\cdot m,$$

則 $n^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $m\cdot n = n\cdot m$。 □

定理 8. 在 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ 中, 證明乘法結合律; 也就是說, 對所有自然數 l, m, n, 都有 $(l\cdot m)\cdot n = l\cdot(m\cdot n)$。

證明: 考慮集合 $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 對所有\ l, m \in \mathbb{N}\ 都有\ (l\cdot m)\cdot n = l\cdot(m\cdot n)\}$, 現進行以下討論:

(A) 因為 $(l\cdot m)\cdot 0 = 0$ 而且 $l\cdot(m\cdot 0) = l\cdot 0 = 0$, 等式成立, 故 $0 \in E$。

(B) 若 $n \in E$, 即對所有 $l, m \in \mathbb{N}$ 都有 $(l\cdot m)\cdot n = l\cdot(m\cdot n)$, 現計算

$$(l\cdot m)\cdot n^* = (l\cdot m) + (l\cdot m)\cdot n = l\cdot m + l\cdot(m\cdot n) = l\cdot(m + m\cdot n) = l\cdot(m\cdot n^*),$$

則 $n^* \in E$。

由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $l, m, n \in \mathbb{N}$, 都有 $(l\cdot m)\cdot n = l\cdot(m\cdot n)$。 □

在自然數系中還有一個比大小的關係, 我們也可以用加法運算的方式來描述它。對於 $m, n \in \mathbb{N}$, 若存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $m + l = n$, 則定義 $m \leq n$。

定理 9. $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一個全序集 (totally ordered set)。

證明: 首先證明: $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一個偏序集 (partially ordered set)。

- 自反性: 對任何 $m \in \mathbb{N}$, 因為 $m + 0 = m$, 所以 $m \leq m$。故 $\leq$ 具有自反性。
- 反對稱性: 對任何 $m, n \in \mathbb{N}$, 若 $m \leq n$, 則存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $m + k = n$, 若 $n \leq m$, 則存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $n + l = m$, 於是 $n + l + k = n$。若 $l + k \neq 0$, 則 $n + (k + l) = n$ 不成立, 於是 $l + k = 0$。若 $l \neq 0$ 或 $k \neq 0$, 則 $l + k = 0$ 不成立, 於是 $l = 0$ 且 $k = 0$, 因此 $m = n$。故 $\leq$ 具有反對稱性。
- 遞移性: 對任何 $l, m, n \in \mathbb{N}$, 若 $l \leq m$, 則存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $l + j = m$; 若 $m \leq n$, 則存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $m + k = n$; 得到 $l + j + k = m + k = n$, 即, 存在 $j + k \in \mathbb{N}$ 使得 $l + (j + k) = n$, 因此 $l \leq n$。故 $\leq$ 具有遞移性。

以下再進一步證明 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一個全序集 (totally ordered set)。

- 可比較性: 考慮集合 $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \text{對所有 } m \in \mathbb{N}, n \leq m \text{ 或 } m \leq n \text{ 成立}\}$, 進行以下討論:

  (A) 因為對所有 $m \in \mathbb{N}$, 取 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $0 + m = m$, 所以 $0 \leq m$ 成立, 故 $0 \in E$。

  (B) 若 $n \in E$, 即對所有 $m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ 或 $m \leq n$ 成立; 也就是說, 存在 $k = k(m) \in \mathbb{N}$ 使得 $n + k = m$ 或存在 $l = l(m) \in \mathbb{N}$ 使得 $m + l = n$ 成立。現分三種情形討論:

    - 若 $n + k = m$ 成立且 k 不是 0, 令 $\bar{k} \in \mathbb{N}$ 使得 $(\bar{k})^* = k$, 則

    $$n^* + \bar{k} = \bar{k} + n^* = (\bar{k} + n)^* = (n + \bar{k})^* = n + (\bar{k})^* = n + k = m,$$

      得到 $n^* \leq m$。
    - 若 $n + k = m$ 且 $k = 0$, 則 $n = m$, 得到 $n^* = m^*$ 或是說 $m^* = n^*$; 也就是說, $m + 1 = n^*$, 於是 $m \leq n^*$。
    - 若存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $m + l = n$ 成立, 則 $m + l + 1 = n + 1$, 即 $m + l^* = n^*$, 其中 $l^* \in \mathbb{N}$, 故 $m \leq n^*$。

    綜合上述討論, 得到 $n^* \in E$。

  由數學歸納法原理 (Principle of Mathematical Induction) 得知 $E = \mathbb{N}$, 故對所有 $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ 或 $m \leq n$ 成立。

由上討論得到 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一個鏈, 因此 $(\mathbb{N}, \leq)$ 是一個全序集。 □