4

映射與關係

從第 2 章我們知道: 現今的數學理論是從公理化的集合論為出發點, 由此, 下一步要做的事情則是要建立集合之間的關係, 我們需要透過一些規則述說清楚兩個集合的關聯, 解釋它們的相同或相異之處, 進而認識想要研究的數學主體。

單元 4.1 會先從映射的概念著手進行討論, 相較於各位在中學時期就學過且經常使用的函數, 映射是把函數這個概念做一般性的延伸, 因為數學上集合的設定未必是數系 (實數集 $\mathbb{R}$ 或複數集 $\mathbb{C}$), 可以是一些數學對象 (函數、空間、曲面...... 等), 在映射這個想法提出之後, 就可以借助這些術語將兩類不同的數學對象之間建立一些關聯。這個單元除了給出映射的術語外, 另外想探討逆映射與反函數的存在性, 我們必須對於原映射增加限制才能確保逆映射的存在, 而反三角函數會是一個對於逆映射或反函數的經典例子。

單元 4.2 到單元 4.4 將聚焦在實數函數的討論。單元 4.2 會先提出奇函數與偶函數的概念, 它是對於函數空間來說最初步的分解, 由於奇函數與偶函數有各自的特色, 而且任何實數函數都可以唯一分解成奇函數與偶函數的和, 所以它提供了一種認識實數函數的方法, 近代數學像是傅立葉級數理論就是從這種奇、偶函數的分解原理去認識一般的函數。而單調函數 (遞增或遞減函數) 也是一類特別的函數, 只要確定函數在某個區間上是嚴格單調的, 就可以確定反函數存在, 而且反函數的單調性與原函數的單調性一致, 由此也可以觀察函數與反函數的圖形之對稱性。至於這個單元的最後會介紹幾個反函數明確表達的方法, 關於反函數的明確形式偶爾會需要用到, 但這是可欲而不可求的事, 在大部分的情況我們並不會強求要確實找出反函數的表達, 而會思考怎麼樣在只知存在性的情形下繼續討論主要的問題。

過往學數學可能都是在單一函數上進行了解, 實際上函數與函數之間可以進行一些連結, 單元 4.3 提出的函數圖形平移與伸縮理論就是一種最初步的方式將兩個函數聯繫, 透過代數上的變換以及圖形上的效應有一個淸楚的對應, 未來在面對複雜的函數時, 就可以從標準模型出發很快地了解它。而這一部分需要關注的是變換的先後順序與最終結果的差異。而單元 4.4 將綜整幾類常見的函數, 提出初等函數的概念, 並給出在數學上利用初等函數做區隔的幾個理論。

關於函數與映射, 可以再把這些觀念再次抽象化而給出兩集合之間的關係 (relation)。從關係的角度, 不僅可以重新解釋函數與映射的意義, 還可以繼續提出兩集合之間的其它性質像是等價關係、偏序關係、全序關係...... 等, 而單元 4.5 會帶大家認識關係這個概念, 進而簡單說明它在日後在各種數學領域上的進展。

4.1 映射與函數

數學上為了要研究兩個集合之間的關聯, 在歷史的進程中, 最終提出映射與函數的概念, 之後便以此為依據進行各種理論的建立。以下直接給出現今數學上公認的映射與函數的概念。

定義 **1.** 給定兩個集合 X 與 Y, 若有一個規則 f, 它是指定: 對任何 $x \in X$ 都必須對應唯一的元素 $y \in Y$, 我們稱 $f : X \to Y$ 是 *由 X 映至 Y 的一個映射* (f is a mapping from X to Y; f maps X into Y)。此時, 我們記 $y = f(x)$ 表示這個對應關係。集合 X 稱為映射 f 的 *定義域* (domain), 而集合 Y 稱為映射 f 的 *對應域* (codomain)。

注意到上述定義我們使用映射 (mapping) 一詞, 這是一般的用詞, 我們可以對任何抽象的集合 X, Y 討論兩者之間的對應關係, 例如線性代數中會經常討論兩個向量空間 V 與 W 之間的線性變換 $T : V \to W$, 代數上會研究兩個群 G, H 之間的同態或同構 $\varphi : G \to H$, 又如在幾何上會對每個二維的封閉曲面定義歐拉示性數 $\chi : X \to \mathbb{Z}$, 其中 X 是所有二維封閉曲面所成的集合, 這些概念都可以從映射的方式去理解它。

各位或許比較常看到的是 *函數* (function), 而函數通常用來專指對應域是實數集 $\mathbb{R}$ 或是複數集 $\mathbb{C}$ 的情況, 所以微積分課程中主要是在介紹實數值函數 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的理論, 在複變函數論的課程中是在探討複數值函數 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的理論; 然而, 函數這個詞有時是被混用的; 也就是說, 各位可能會在某些場合中看到對應域不是 $\mathbb{R}$ 也不是 $\mathbb{C}$ 的映射仍被稱做函數, 不過由於前後文總是可以確定 f 的概念, 在不引起極大誤會的情況下, 或許不用太過介意這個用詞的使用方式。

給出映射的定義後, 我們要先約定清楚兩個映射相等的意義。

定義 **2.** 給定 f, g 為映射, 我們說 $f = g$ 是指 f 和 g 滿足以下兩個條件:

(A) 映射 f 和映射 g 具有相同的定義域 X。

(B) 對任何 $x \in X$, 都有 $f(x) = g(x)$。

我們看到對於兩映射相等的定義並沒有在對應域上進行限制; 也就是說, 我們在對應域的部分可以給出較為寬鬆的設定, 比方說正弦函數 $y = f(x) = \sin x$, 它的定義域是 $\mathbb{R}$, 對應域也可以設定為 $\mathbb{R}$, 而我們也知道正弦函數 $y = \sin x$ 的值始終介於 $[-1, 1]$ 之間, 所以在 $y > 1$ 還有 $y < -1$ 的區域是不會被正弦函數對應到。有的時候, 我們需要完全確定映射所對應到的實際範圍, 於是這裡提出映像或值域的概念。

定義 **3.** 給定 $f : X \to Y$ 是一個映射, 集合 $R = \{f(x) | x \in X\}$ 稱為映射 f 的 *映像* (image); 若 f 是函數, 我們會把映像稱為 *值域* (range)。

從映射 $f : X \to Y$ 的定義來看, 對應域 Y 中的元素可能不會被 f 映到, 例如剛才所舉正弦函數的例子, 若選取 $Y = \mathbb{R}$ 的話, 對於 $2 \in Y = \mathbb{R}$, 不存在元素 $x \in X = \mathbb{R}$ 使得 $\sin x = 2$。當我們將映射 $f : X \to Y$ 的對應域 Y 修改為值域 R 的時候; 也就是說, 考慮 $f : X \to R$, 由 *定義* **2** 得知, 它和原來的映射是一樣的。

現在想要問: 給定映射 $f : X \to R$, 其中 $y = f(x)$, 我們有沒有辦法從 f 的對應關係建立出 $g : R \to X$, 其中 $g(y) = x$ 使得 g 是一個映射? 首先, 把 $f : X \to Y$ 修改成 $f : X \to R$ 就變得有意義, 因為那些不被 f 映到的元素 y 無法指定回 X 中的元素, 所以那些元素就不能落在 g 的定義域; 於是在 $f : X \to R$ 的概念下, 對於每個 $y \in R$, 至少有一個元素 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。

再則, 若 g 要滿足映射的條件, 對於 $y \in R$, 在 f 來說, 必須要有唯一的元素 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 這樣一來才能確定 $g(y) = x$ 是一個映射。現做一個觀察: 考慮 $f(x) = x^2$, 其中 $x \in \mathbb{R}$, 我們知道 $x^2 \geq 0$, 故設定 $f : \mathbb{R} \to R$, 其中 $R = \{y \,|\, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$。給定 $y_0 \in R$, 我們可以從解方程式 $x^2 = y_0$ 中得到 $x = \pm\sqrt{y_0}$, 所以依照 f 的規定, 對於 y_0 來說, 這個 g 是要把 y_0 對應到 $\sqrt{y_0}$ 還是 $-\sqrt{y_0}$ 也不明。

綜上討論, 我們知道並非任何映射 $f : X \to Y$ 都可以照著 f 的規定就可以確定 $g : R \to X$ 也是一個映射, 現在想要問: 什麼時候才可以確定 $g : Y \to X$ 也是一個映射? 我們必須對於映射 $f : X \to Y$ 加以一些限制條件。

定義 **4.** 給定映射 $f : X \to Y$,

(A) 如果對任何 $x_1 \neq x_2$ 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 我們說映射 f 是 *一對一* (one-to-one, injective)。

(B) 如果對任何 $y \in Y$, 都存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 我們說映射 f 是 *映成* (onto, surjective)。

這裡先觀察映成的特性: 當一個映射 $f : X \to Y$ 是映成, 那麼 $Y = R$; 也就是說, 映成的對應域就是值域。現對此進行簡單的討論: 對任何 $y \in Y$, 因為 f 是映成, 所以存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 於是 $y \in R$, 得到 $Y \subset R$。又 $R \subset Y$, 因此 $Y = R$。

再看映射是一對一的特性: 從邏輯的命題「若 P 則 Q」與「非 Q 則非 P」等價這件事來看, 若 $f : X \to R$ 是一對一映射, 它代表著「如果有 $x_1, x_2 \in X$ 滿足 $f(x_1) = f(x_2)$, 則 $x_1 = x_2$」。

總結來說, 當映射 $f : X \to Y$ 是一對一且映成, 那麼我們就可以建立一個對應關係 $g : Y \to X$, 其中 $g(y) = x$ 的指定方式是它滿足 $f(x) = y$。因為 f 是映成, 所以任何 $y \in Y$ 都可以對應到至少一個 $x \in X$, 因為 f 是一對一, 所以任何 $y \in Y$ 都可以對應到至多一個 $x \in X$, 因此若 f 是映成且一對一, 對任何 $y \in Y$ 都可以唯一給出 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 故 $g : Y \to X$ 是一個映射。

定義 **5.** 若映射 $f : X \to Y, f(x) = y$ 是一對一且映成, 則 $g : Y \to X, g(y) = x$ 是一個映射, 我們稱 g 是 f 的 *逆映射* (inverse mapping)。我們會將 f 的逆映射用 $f^{-1} : Y \to X$ 表示。

在某些場合, 例如單變數函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的情況, 其中 $y = f(x)$, 若 f 是一對一且映成, 則它的反函數 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 $f^{-1}(y) = x$ 的關係。然而, 我們習慣上會將變數 x 視為定義域的變數 (自由的變數), 而 y 視為對應域的變數 (被決定的量), 所以在這個意義下, 當我們知道反函數 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的對應關係下, 又會把 $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的變數修改, 寫成 $y = f^{-1}(x)$ 的樣貌。

當一個映射或函數 f, 如果定義域設定得太大, 那麼 f 愈不容易形成一對一的關係, 這時, 我們會透過對於定義域的限制, 確保 f 在某個較小的範圍下是一對一, 由此得到映像或值域, 再得逆映射或反函數。於是我們給出限制映射或限制函數的定義。

定義 **6.** 給定一個映射 $f : X \to Y$, 而 $A \subset X$, 我們將映射 f 的定義域縮限至集合 A 所成的映射稱為 *f 在 A 上的限制* (restriction f to A), 並以 $f|_A : A \to Y$ 為記號。

反三角函數是一個最經典的例子, 現以反三角函數為例具體呈現上述的討論。

例 **7** (反三角函數).

(A) 考慮正弦函數 (sine function) $f(x) = \sin x$ 在 $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的限制

$$f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R},$$

則 $f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ 是一對一的函數, 其中 $f|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ 的值域是 $R = [-1, 1]$。記

$$\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

為 $f|_A : A \to R$ 的反函數, 稱為 反正弦函數 (inverse sine function, arcsine function)。

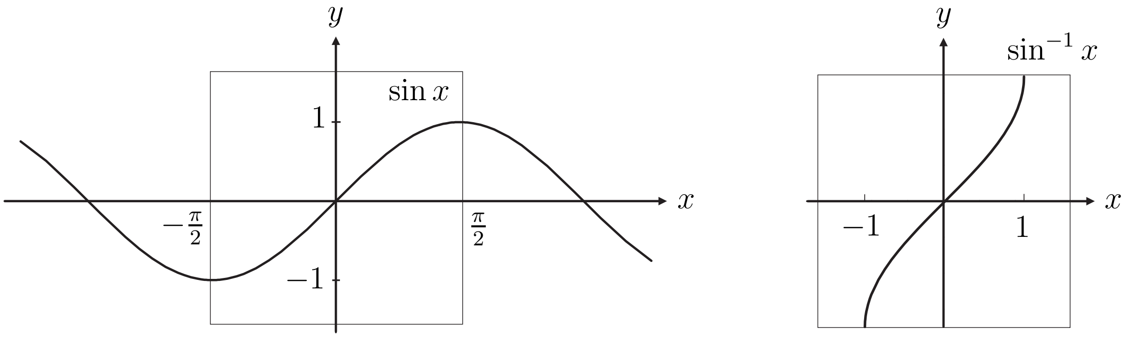


圖 4.1: 先將 $\sin x$ 限制於 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 如左圖方框內的圖形, 再得反函數 $\sin^{-1} x$。

(B) 考慮餘弦函數 (cosine function) $f(x) = \cos x$ 在 $A = [0, \pi]$ 上的限制

$$f|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \to \mathbb{R},$$

則 $f|_{[0,\pi]}$ 是一對一的函數, 其中 $f|_{[0,\pi]}$ 的值域是 $R = [-1, 1]$。記

$$\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

為 $f|_A : A \to R$ 的反函數, 稱為 反餘弦函數 (inverse cosine function, arccosine function)。

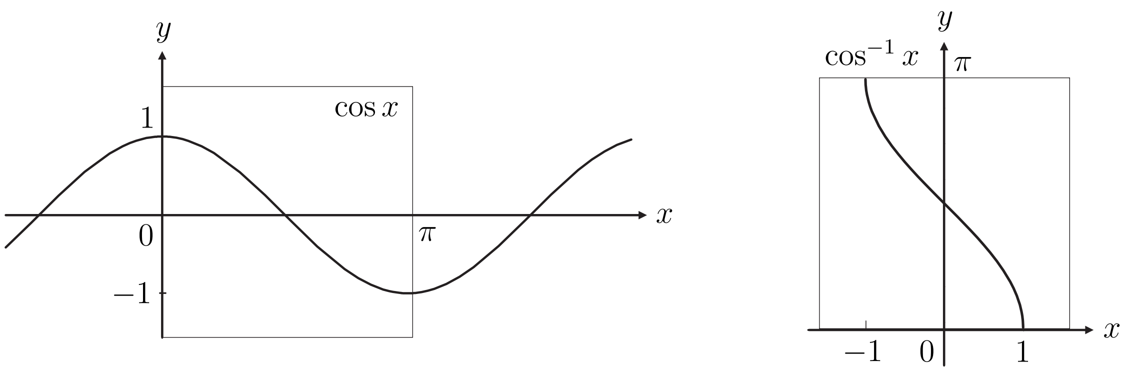


圖 4.2: 先將 $\cos x$ 限制於 $x \in [0, \pi]$, 如左圖方框內的圖形, 再得反函數 $\cos^{-1} x$。

(C) 考慮正切函數 (tangent function) $f(x)=\tan x$ 在 $A=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上的限制

$$f|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},$$

則 $f|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ 是一對一的函數, 其中 $f|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ 的值域是 $R=\mathbb{R}$, 記

$$\tan^{-1}x:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

為 $f|_A: A\to R$ 的反函數, 稱為 反正切函數 (inverse tangent function, arctangent function)。

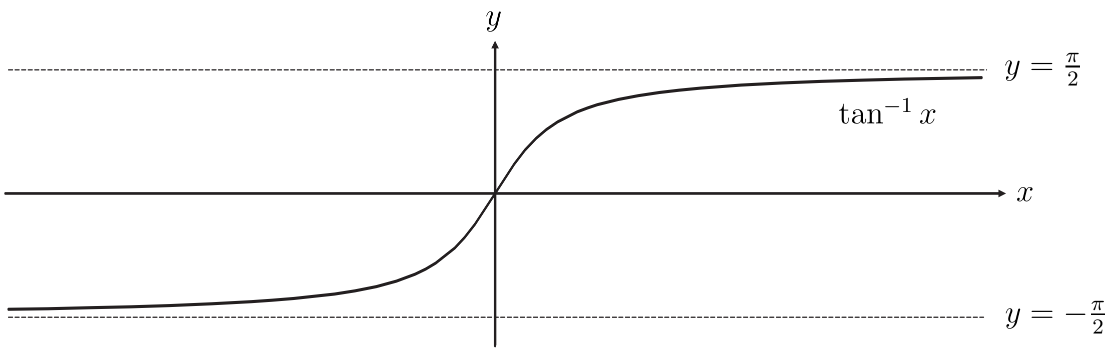


圖 4.3: 將 $\tan x$ 限制於 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 再得反函數 $\tan^{-1}x$。

因為三角函數還有餘切函數 $\cot x$、正割函數 $\sec x$、餘割函數 $\csc x$, 以下繼續探討由它們所定義出的反函數:

- 將餘切函數 $\cot x$ 限制於 $(0,\pi)$ 之後定義反餘切函數 (inverse cotangent function, arccotangent function)

$$\cot^{-1}x:\mathbb{R}\to(0,\pi)。$$

- 將正割函數 $\sec x$ 限制於 $[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi)$ 之後定義反正割函數 (inverse secant function, arcsecant function)

$$\sec^{-1}x:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3}{2}\pi\right)。$$

- 將餘割函數 $\csc x$ 限制於 $(0,\frac{\pi}{2}]\cup(\pi,\frac{3}{2}\pi]$ 之後定義反餘割函數 (inverse cosecant function, arccosecant function)

$$\csc^{-1}x:(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right]。$$

關於 $\sec^{-1}x$ 與 $\csc^{-1}x$, 上述只是一種定義方式, 有的文獻是對於 $\sec x$ 與 $\csc x$ 做不同的區域限制後再定義它們的反函數; 也就是說, $\sec^{-1}x$ 與 $\csc^{-1}x$ 的值域至今並沒有統一的限制範圍, 所以各位在使用這兩個函數的時候, 要先界定清楚選用的範圍。

4.2 函數的性質

這個單元將綜整出幾個實數函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的基本性質, 包括奇函數、偶函數及其對稱性, 還有反函數的性質與對稱性。

定義 1. 考慮 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

(A) 若 f 滿足: 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(-x)=-f(x)$, 我們說函數 f 是 奇函數 (odd function)。

(B) 若 f 滿足: 對所有 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(-x)=f(x)$, 我們說函數 f 是 偶函數 (even function)。

會將滿足這樣性質的函數稱為奇函數與偶函數, 出發點來自於多項式, 考慮 $f(x)=x^n$, 若 n 是奇數, 因為 $f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函數; 若 n 是偶數, 因為 $f(-x)=(-x)^n=x^n=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函數。

例 2. 考慮 狄立克萊函數 (Dirichlet function)

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{若 } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{若 } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\end{cases}$$

若 $x\in\mathbb{Q}$, 則 $-x\in\mathbb{Q}$, 此時 $D(-x)=1=D(x)$; 若 $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, 則 $-x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, 此時 $D(-x)=0=D(x)$。因此 $D(x)$ 是偶函數。

若我們觀察函數 f 的圖形 (graph of f), 即觀察 $(x,f(x))\subset\mathbb{R}^2$, 則可以看到奇函數與偶函數的圖形具有對稱性。

- 因為奇函數滿足 $f(x)=-f(x)$, 若 $P(x,f(x))$ 在圖形上, 則 $Q(-x,f(-x))=(-x,-f(x))$ 也會在圖形上, 所以奇函數 f 的圖形會對稱於坐標原點 O (symmetric about the origin)。
- 因為偶函數滿足 $f(x)=-f(x)$, 若 $P(x,f(x))$ 在圖形上, 則 $Q(-x,f(-x))=(-x,f(x))$ 也會在圖形上, 所以偶函數 f 的圖形會對稱於 y-軸 (symmetric about the y-axis)。

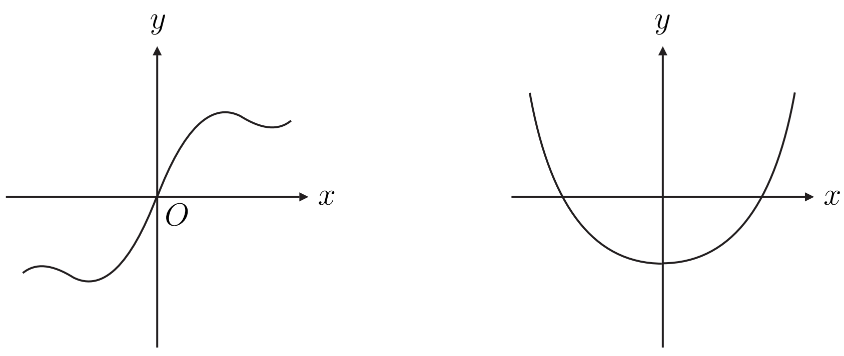


圖 4.1: 左圖: 奇函數圖形對稱於坐標原點 O; 右圖: 偶函數圖形對稱於 y-軸。

有很多函數並不是奇函數也不是偶函數, 例如指數函數 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 但下面要介紹的定理說明了這些函數與奇函數及偶函數的關係。

定理 **3.** 任何函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都可以唯一表示成奇函數與偶函數的和。

證明: 給定 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 定義 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 與 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\qquad h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

- 驗證: g 是奇函數。對所有 $x\in\mathbb{R}$,

$$g(-x)=\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\left(\frac{f(x)-f(-x)}{2}\right)=-g(x),$$

  所以 g 是奇函數。

- 驗證: h 是偶函數。對所有 $x\in\mathbb{R}$,

$$h(-x)=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=h(x),$$

  所以 h 是偶函數。

- 驗證: $f=g+h$。對所有 $x\in\mathbb{R}$, 則

$$\begin{aligned}g(x)+h(x)&=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{f(x)-f(-x)+f(x)+f(-x)}{2}\\&=\frac{2f(x)}{2}=f(x),\end{aligned}$$

  所以 $f=g+h$。

- 首先證明: 若 F 是奇函數又是偶函數, 則 $F\equiv 0$, 即對所有 $x\in\mathbb{R}$, $F(x)=0$。這是因為對所有 $x\in\mathbb{R}$, 則 $F(-x)=-F(x)=F(x)$, 所以 $2F(x)=0$, 於是 $F(x)=0$, 因此 $F\equiv 0$。

  以下驗證: $f=g+h$ 表示法唯一。假設對所有 $x\in\mathbb{R}$ 都有 $f(x)=g_1(x)+h_1(x)=g_2(x)+h_2(x)$, 其中 g_1,g_2 是奇函數, h_1,h_2 是偶函數, 得到 $g_1(x)-g_2(x)=h_2(x)-h_1(x)\overset{記}{=}F(x)$, 因為對所有 $x\in\mathbb{R}$, 都有

$$\begin{aligned}F(-x)&=g_1(-x)-g_2(-x)=-g_1(x)-(-g_2(x))=-g_1(x)+g_2(x)\\&=-(g_1(x)-g_2(x))=-F(x),\end{aligned}$$

  所以 F 是奇函數; 因為對所有 $x\in\mathbb{R}$, 都有

$$F(-x)=h_1(-x)-h_2(-x)=h_1(x)-h_2(x)=F(x),$$

  所以 F 是偶函數。於是 $F\equiv 0$; 也就是說, 對所有 $x\in\mathbb{R}$, $g_1(x)-g_2(x)=h_2(x)-h_1(x)=0$, 得到對所有 $x\in\mathbb{R}$, $g_1(x)=g_2(x)$ 且 $h_1(x)=h_2(x)$, 於是 $g_1=g_2$ 且 $h_1=h_2$。因此 $f=g+h$ 表示法唯一。

□

各位在看完 定理 **3** 之後, 可以和線性代數的理論結合起來, 這件事其實是在描述所有 $\mathbb{R}$ 映到 $\mathbb{R}$ 的函數所成的集合 V 是一個向量空間, 而奇函數所成的集合是函數空間的子空間 (記為 $W_{\mathtt{O}}$), 偶函數所成的集合是函數空間的子空間 (記為 $W_{\mathtt{E}}$); 奇函數子空間與偶函數子空間的交集是處處為零的函數 (向量空間中的零向量) 所成的集合; 此外, 任何函數都可以表示為奇函數與偶函數之和, 於是 $V = W_{\mathtt{O}} \oplus W_{\mathtt{E}}$。

我們經常使用函數與反函數討論數學問題, 所以這個單元將給出幾個基本反函數的討論。

定義 **4.** 記 $I \subset \mathbb{R}$ 為一個區間,

(A) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 為遞增函數 (increasing function)。

(B) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 為嚴格遞增函數 (strictly increasing function)。

(C) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 為遞減函數 (decreasing function)。

(D) 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 滿足對任何 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 則稱函數 $f(x)$ 為嚴格遞減函數 (strictly decreasing function)。

(E) 遞增函數或是遞減函數統稱為 單調函數 (monotonic function)。

定理 **5.** 若函數 $f : I \to \mathbb{R}$ 嚴格遞增, 記 R 為函數 f 的值域, 則反函數 $f^{-1} : R \to I$ 存在, 並且反函數 $f^{-1} : R \to I$ 也是嚴格遞增。

證明:

- 若函數 $y = f(x)$ 在 I 上嚴格遞增, 則對任意 $x_1, x_2 \in I$ 滿足 $x_1 < x_2$, 必有 $f(x_1) < f(x_2)$, 這意味著對所有 $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 所以 f 是一對一。記 R 為函數 f 在 I 上的值域, 則集合 R 裡的每一個 y, 在 I 中存在唯一的 x 使得 $y = f(x)$, 於是反函數 $x = f^{-1}(y)$ 存在, 其中反函數 f^{-1} 的定義域為 R, 值域為 I。

- 若 $y_1, y_2 \in R$ 滿足 $y_1 < y_2$, 記 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$, 如果 $x_1 \geq x_2$ 則 $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ 矛盾, 所以 $x_1 < x_2$, 即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 因此反函數 f^{-1} 在 R 中嚴格遞增。

□

現在要討論函數與反函數在圖形上的關係: 假設 $(a, b) = (x, y = f(x))$ 是函數 f 圖形上的一點, 因為反函數是指 $f^{-1}(y) = x$, 所以 $(x, f^{-1}(x))$ 的 x 是當初函數關係 $y = f(x)$ 中的 y, 而 $f^{-1}(x)$ 是當初函數關係 $y = f(x)$ 中的 x, 當這兩個函數圖形畫在同一個坐標系的時候, 則為 $(x, f^{-1}(x)) = (b, a)$, 由此可見, 函數與其反函數的圖形會對稱於 $y = x$ 這條斜直線。

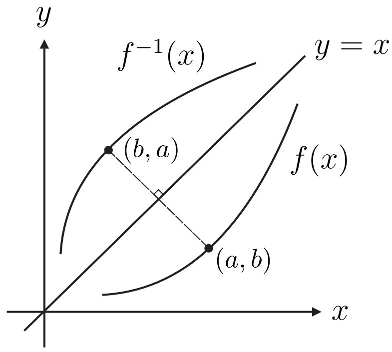


圖 4.2: 函數 $f(x)$ 與其反函數 $f^{-1}(x)$ 的圖形對稱於 $y=x$。

有一些函數可以將它的反函數表達式具體寫出來, 以下例子即為這個問題的討論。

例 **6.**

(A) 試求 $f(x)=x^2-x$ 在 $x\geq 1$ 的反函數 $f^{-1}(x)$ 之明確表示。

(B) 試求雙曲正弦函數 (hyperbolic sine function) $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函數 $\sinh^{-1}x$ 之明確表示。

(C) 試求 $\tan(\sin^{-1}(x))$。

解.

(A) 記 $y=f(x)=x^2-x$, 欲求 $f(x)$ 在 $x\geq 1$ 的反函數, 那麼就是希望寫出 x 用 y 表達的方式, 所以考慮對於方程式 $x^2-x-y=0$ 求解, 得到 $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4y}}{2}$。因為我們想要的是在 $x\geq 1$ 的部分, 所以 $x=\frac{1+\sqrt{1+4y}}{2}$, 於是 $f(x)$ 在 $x\geq 1$ 的反函數為 $f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}$。

(B) 記 $y=f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 欲求 $f(x)$ 的反函數, 那麼就是希望寫出 x 用 y 表達的方式, 所以考慮對於方程式 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 求解。令 $z=e^x$, 先解

$$y=\frac{z-\frac{1}{z}}{2}=\frac{z^2-1}{2z}\Rightarrow z^2-2yz-1=0\Rightarrow z=\frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1},$$

因為 $z=e^x>0$, 所以 $z=y+\sqrt{y^2+1}$, 於是 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$, 得到 $x=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$。因此 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函數為

$$\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)。$$

(C) 令 $\theta=\sin^{-1}(x)$, 則 $\sin\theta=x$, 其中 $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, 所以 $\tan(\sin^{-1}(x))=\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

各位可以看到, 若要得到反函數的明確表達式, 這將仰賴方程式求解的能力; 然而, 求解這件事是可欲而不可求的, 我們無法每次都能很順利地解方程式, 所以我們不能期待著每次都要先寫出反函數的明確表達式之下才能繼續分析問題。一般來說會設法在不曉得反函數的明確表達之下, 透過其它的方式繼續探索問題。

4.3 函數圖形的平移與伸縮

用數學處理問題的一個特色是以簡馭繁, 常常一個複雜的問題, 我們會設法把問題抽絲剝繭, 最終只要好好研究最簡化的情況。又或者反過來說, 我們認識數學會先了解最簡單或基本的模型, 將它弄得一清二楚, 然後由此去研究怎麼樣做變化而得到一般或是複雜的情況。

函數圖形的平移與伸縮是一個經典的例子, 這裡想要探討一個函數在代數上做一些變換與函數圖形在幾何上的效應, 若這個部分想得愈深入, 將會對數學的全面認識有所進步, 因為代數講求的是嚴謹性, 幾何的特色是直觀而快速的判別, 兩者可以互面溝通且相輔相成。

給定函數 $f(x)$, 我們可以考慮新的函數 $af(bx+c)+d$, 其中 $a,b,c,d,\in\mathbb{R}$, 若把函數 $f(x)$ 與 $af(bx+c)+d$ 的圖形進行比較, 以下想要觀察的是這四個參數對於函數圖形的效應。

這裡我們觀察單一參數的改變對於函數圖形的效應。首先, 參數 d 是最容易理解的參數, 比較 $f(x)$ 與 $F(x)\overset{\text{記}}{=}f(x)+d$, 給定 x, 則 $F(x)=f(x)+d$ 這個函數值就是把 $f(x)$ 這個函數值增加 d 單位, 所以兩個函數的圖形呈現的是上、下平移的效果, 若 $d>0$, 則 $F(x)=f(x)+d$ 的圖形是把 $f(x)$ 的圖形向上平移 d 單位, 若 $d<0$ 是往下平移 $|d|$ 單位。

再來我們研究參數 a 的效應, 比較 $f(x)$ 與 $F(x)\overset{\text{記}}{=}af(x)$, 給定 x, 則 $F(x)=af(x)$ 這個函數值就是把 $f(x)$ 這個函數值放大 a 倍, 所以兩個函數的圖形具有上、下伸縮的效果; 也就是說, 若 $a>0$, 則 $F(x)=af(x)$ 的圖形是以 x-軸為基準, 將 $f(x)$ 的圖形上下伸縮 a 倍, 若 $a<0$, 則 $F(x)=af(x)$ 的圖形則是先將 $f(x)$ 的圖形對於 x-軸做對稱, 再將它上下伸縮 $|a|$ 倍。

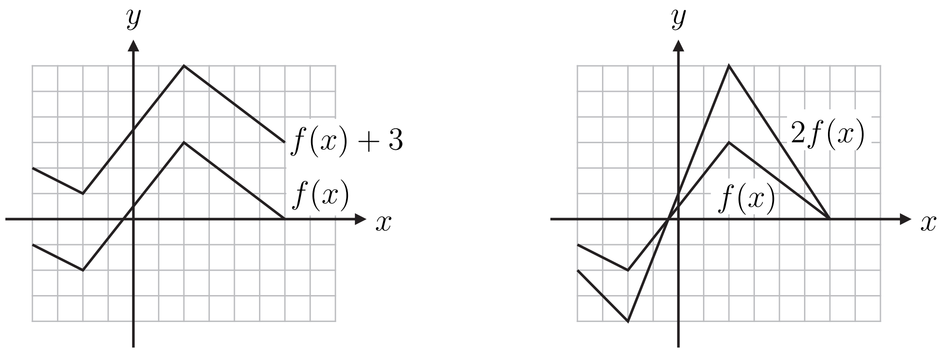
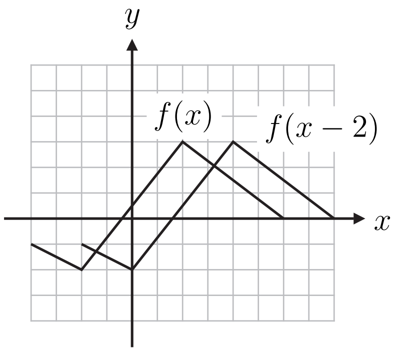


圖 4.1: 比較 $f(x)$ 與 $af(bx+c)+d$ 的圖形關係。左圖: $(a,b,c,d)=(1,1,0,3)$; 右圖: $(a,b,c,d)=(2,1,0,0)$。

再來要觀察參數 c 的效應。給定 x, 得到函數值 $f(x)$, 對於函數 $F(x)\overset{\text{記}}{=}f(x+c)$ 來說, 當 F 代入 $x-c$ 的時候, 則 $F(x-c)=f((x-c)+c)=f(x)$, 得到 F 在 $x-c$ 的地方與 f 在 x 的地方具有相同的函數值, 所以 c 的效應是左右平移, 若 $c>0$, 則 $F(x)=f(x+c)$ 的圖形是將 $f(x)$ 的圖形向左移動 c 單位。若 $c<0$, 則 $F(x)=f(x+c)$ 的圖形是將 $f(x)$ 的圖形向右移動 $|c|$ 單位。

最後要看的是參數 b 的效應。給定 x, 得到函數值 $f(x)$, 對於函數 $F(x)\overset{\text{記}}{=}f(bx)$ 來說, 當 F 代入 $\frac{1}{b}x$ 的時候, 則 $F(\frac{1}{b}x)=f(b\cdot\frac{1}{b}x)=f(x)$, 得到 F 在 $\frac{1}{b}x$ 的地方與 f 在 x 的地方具有相同的函數值, 所以 b 的效應是左右伸縮, 若 $b>0$, 則 $F(x)=f(bx)$ 的圖形是以 y-軸為基準, 將 $f(x)$ 的圖形水平伸縮 $\frac{1}{b}$ 倍。若 $b<0$, 則 $F(x)=f(bx)$ 的圖形是先將 $f(x)$ 的圖對於 y-軸做對稱, 再將它水平伸縮 $\frac{1}{b}$ 倍。



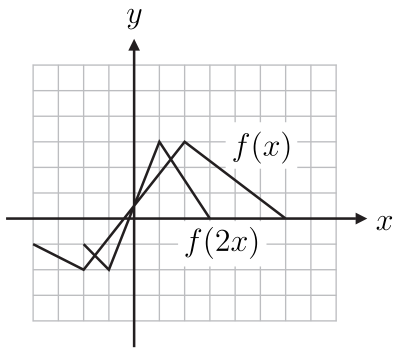


圖 4.2: 比較 $f(x)$ 與 $af(bx+c)+d$ 的圖形關係。左圖: $(a,b,c,d)=(1,1,0,-2)$; 右圖: $(a,b,c,d)=(1,2,0,0)$。

在介紹完單一參數的變化對於函數圖形的伸縮平移效應後, 以下想要比較先伸縮再平移與先平移再伸縮的差異。這時是透過函數的合成以呈現操作的先後順序。

例 **1.**

(A) 先將函數 $f(x)$ 上下伸縮再上下平移之後的函數表達是什麼?

(B) 先將函數 $f(x)$ 上下平移再上下伸縮之後的函數表達是什麼?

解.

(A) 給定 $f(x)$, 考慮 $F_1(x)=af(x)$, 再考慮 $F_2(x)=F_1(x)+d=af(x)+d$。

(B) 給定 $f(x)$, 考慮 $G_1(x)=f(x)+d$, 再考慮 $G_2(x)=aG_1(x)=a(f(x)+d)=af(x)+ad$。

由上討論可知: 給定函數 $f(x)$, 若要得到 $af(x)+d$, 則是將 $f(x)$ 先上下伸縮 a 再上下平移 d, 這種方法可以直接從數字 a 和 d 解讀, 不需要調整。

例 **2.**

(A) 先將函數 $f(x)$ 左右伸縮再左右平移之後的函數表達是什麼?

(B) 先將函數 $f(x)$ 左右平移再左右伸縮之後的函數表達是什麼?

解.

(A) 給定 $f(x)$, 考慮 $F_1(x)=f(bx)$, 再考慮 $F_2(x)=F_1(x+c)=f(b(x+c))=f(bx+bc)$。

(B) 給定 $f(x)$, 考慮 $G_1(x)=f(x+c)$, 再考慮 $G_2(x)=G_1(bx)=f(bx+c)$。

由上討論可知: 給定函數 $f(x)$, 若要得到 $f(bx+c)$, 則是要將 $f(x)$ 先左右平移再左右伸縮, 這種方法可以直接從數字 c 和 b 解讀, 不需要調整。

下一個例子要討論左右平移伸縮和上下平移伸縮兩類型操作的先後順序與最終的結果之差異。

例 **3.**

(A) 將函數 $f(x)$ 做上下伸縮、上下平移、左右平移、左右伸縮的過程, 最後的函數表達是什麼?

(B) 將函數 $f(x)$ 做左右平移、左右伸縮、上下伸縮、上下平移的過程, 最後的函數表達是什麼?

解.

(A) 給定 $f(x)$, 經過上下伸縮再上下平移後得到的函數是 $F_1(x) = af(x) + d$; 將 $F_1(x)$ 左右平移再左右伸縮之後得到 $F_2(x) = F_1(bx + c) = af(bx + c) + d$。

(B) 給定 $f(x)$, 經過左右平移再左右伸縮後得到的函數是 $G_1(x) = f(bx + c)$; 將 $G_1(x)$ 上下伸縮再上下平移後得到 $G_2(x) = aF_1(x) + d = af(bx + c) + d$。

由上討論可知: 給定函數 $f(x)$, 先上下變換再左右變換與先左右變換再上下變換兩者結果一致。

不曉得各位是否會覺得 b, c 與 a, d 這兩組效應來說有一種說不出的不協調性, 就以 a, d 的效應來說, $a > 0$ 或 $d > 0$ 是往 y 的正向去伸縮或平移, 但是對於 b, c 來說則是有一種反向的效應 (c 為負則往右, $0 < b < 1$ 的時候是放大)。會有這樣的現象產生, 我們要回頭研究 a, d 與 b, c 的本質, 實際上, 這兩類的參數是在不同的地方進行變換: 關於 b, c 的效應是在函數的定義域上進行變換, 關於 a, d 的效應則是在函數的對應域上進行變換。

以下再舉一例我想各位便能體會這件事: 我們在高中階段曾經學過橢圓的標準式以及它經過平移之後的圖形及其表達式。而橢圓其實是將圓進行兩個方向的形變, 考慮 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 是單位圓的方程式, 其中圓心與坐標中心一致, 若考慮 $G_1(x, y) \overset{記}{=} F(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - 1 = 0$, 則是將單位圓橫向放大 a 倍、縱向放大 b 倍而得兩個半軸的長度是 a 與 b 的橢圓。注意到時的參數調整是對於定義域的變數改變, 相當於前面討論 $f(x)$ 平移伸縮效應中的參數 b。由此再考慮

$$\begin{aligned} G_2(x, y) \overset{記}{=} G_1(x - h, y - k) = F\left(\frac{x - h}{a}, \frac{y - k}{b}\right) &= \left(\frac{x - h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - k}{b}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} - 1 = 0, \end{aligned}$$

則新的曲線是再將剛才得到的橢圓向右移動 h 單位, 再向上移動 k 單位。

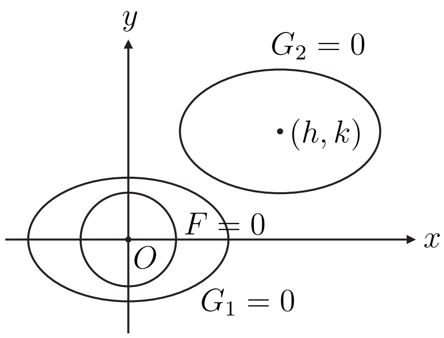


圖 4.3: 先將圓上下與左右縮放, 再上下與左右平移後得到中心為 (h, k) 的橢圓。

4.4 基數

生活中我們經常會把一些事情進行量化並且比較大小, 一個最初步並且轉化成數學的問題是想要知道並且比較集合的「大小」。數學上要定義集合的大小有很多種方法, 比方說線性代數 (linear algebra) 的理論中會對於向量空間給予維度 (dimension) 的概念就是一個描述集合大小的方式, 各位日後若有機會學到測度論 (measure theory) 的話就會學到測度也是一種描述集合大小的方法。

這裡我們想討論的是比維度與測度還要根本而自然的問題, 那就是想要計算集合中的元素個數。比方說現有集合 $A = \{9, \sqrt{2}, -1\}$ 與集合 $B = \{\pi, \mathrm{e}\}$, 以各位目前的認知會立刻說: 因為集合 A 有 3 個元素, 而集合 B 有 2 個元素, 因此集合 A 的個數比集合 B 的個數來得多。當集合是相當單純的情況我們直接透過「眼睛看」還有「下意識反射」的方式給出判斷與結論, 甚至可能會對剛剛那個問題有一種嗤之以鼻的態度, 覺得問這種問題有一種侮辱智商的感覺。

以下要問一個類似但是將挑戰各位智商的問題:

(1) 正整數的個數與正偶數的個數哪個比較多?

(2) 有理數的個數與實數的個數哪個比較多?

(3) $[0, 1]$ 區間中的實數與 $[0, 2]$ 區間中的實數哪個比較多?

有些人會覺得這三個問題都很簡單, 所以會有以下的「迷思」, 這裡特別注意, 我故意把迷思二字加上引號, 代表著若是根據之後所給出的數學定義進行判斷, 那麼以下的三個解釋有的結論錯誤, 有的結論雖然正確但是推論有誤。

(A) 因為正整數比正偶數來說多了正奇數, 所以正整數個數比正偶數多。

(B) 因為實數比有理數來說多了無理數 (比方說 $\sqrt{2}$ 還有 π 等), 所以實數個數比有理數多。

(C) 因為 $[0, 2]$ 區間比 $[0, 1]$ 區間多了 $(1, 2]$ 這一段, 所以 $[0, 2]$ 中的實數個數比 $[0, 1]$ 中的實數多。

如果仔細思考上面三個論述, 就會知道這三個論述的觀點都是利用兩個集合之間的包含 $\subset$ 關係看待事情。透過集合的包含關係在某些情況的確可以描述元素個數多寡的關係, 但也不難發現在更多的情況下兩個集合不見得會有包含的關係, 就如這個單元最一開始考慮的集合 $A = \{9, \sqrt{2}, -1\}$ 與集合 $B = \{\pi, \mathrm{e}\}$, 縱使 $A \cap B = \emptyset$, 但我們仍然可以對於集合個數的多寡而給出結論, 可見得利用集合的包含關係推論集合的個數的判斷並不恰當。

為了要確實回答這三個問題, 我們必須把當前各位的認知用數學的語言精確地表達。首先, 從集合 $A = \{9, \sqrt{2}, -1\}$ 來看, 為何可以立刻說出集合 A 的個數有 3 個的原因在於: 我們將集合 A 中的元素與正整數 $\mathbb{N}$ 中的子集合 $N_A = \{1, 2, 3\}$ 建立了一對一且映成的映射關係; 更仔細地說, 當我們從 A 中抓了一個元素 (比方說 9), 然後嘴巴說出「一個」的時候, 就建立了 9 和 1 的對應; 然後, 我們再從 A 中抓了另一個元素 (比方說 $\sqrt{2}$), 然後嘴巴順勢說出「兩個」的時候, 就建立了 $\sqrt{2}$ 和 2 的對

應; 接著再從 A 中抓了元素 (例如 -1) 並且說出「三個」的概念代表著建立了 -1 與 3 的對應。這麼一來, 就形成了以下映射:

$$\begin{aligned} F : A &\to N_A = \{1, 2, 3\} \\ 9 &\mapsto 1 \\ \sqrt{2} &\mapsto 2 \\ -1 &\mapsto 3, \end{aligned}$$

而我們說集合 A 的個數有 3 個, 這個 3 就是去看集合 N_A 中最大的那個數字。

同理, 對於集合 B 來說, 考慮

$$\begin{aligned} G : B &\to N_B = \{1, 2\} \\ \pi &\mapsto 1 \\ \mathrm{e} &\mapsto 2, \end{aligned}$$

則 G 也是一對一且映成的映射, 於是我們說集合 B 的個數有 2 個。

至此, 我們先給出基數 (也就是我們心中想要說的集合的「個數」) 還有有限集的定義。

定義 1. 如果兩個非空集合 X 和 Y 之間存在一對一且映成的映射, 則稱集合 X 和 Y *有相同的基數* (have the same cardinality)。

定義 2. 給定一個集合 S,

(A) 若 S 是空集合 (empty set), 或是存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 S 與集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 有相同的基數, 則稱集合 S 是 *有限集* (finite set)。

(B) 若 S 不是有限集, 則稱集合 S 是 *無限集* (infinite set)。

(C) 我們用符號 $\#S$ 或是 $|S|$ 代表集合 S 的基數。若 S 是空集合, 則 $\#S = 0$; 若 S 與集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 有相同的基數, 則 $\#S = n$; 若 S 是有限集, 則會寫 $\#S < \infty$; 若 S 是無限集, 則會寫 $\#S = \infty$。

如果可以從 X 到 Y 建立一個映射, 因為映射只是要求 X 中每一個的元素都必須指定 Y 裡面其中一個元素, 它並沒有給出這種指定有什麼額外的要求, 所以一個映射有可能產生在 X 中的兩個不同的元素都指定到 Y 當中的同一個元素。而這樣的映射對於目前想了解兩集合元素多寡的問題並沒有幫助, 因為這種映射會把 X 中的「兩個」元素對應到 Y 中的「一個」元素, 就會產生在個數上無法對等的現象。

另一方面, 若我們只是建立了 $f : X \to Y$ 是一對一的映射之下, 得到的會是定義域中的元素都可以逐一對應到對應域中的元素; 也就是說, 我們完成了定義域 X 與其值域 $f(X) = R$ 之間的完全對應, 然而這時有可能 $R \subsetneq Y$, 透過 f 是映成的性質, 才可以把 Y 中的每個元素都與 X 中的元素建立對應關係。

當兩個集合有相同的基數時, 則可以驗證這是一種 等價關係 (equivalence relation), 此時會用記號 $X \sim Y$ 表示。所謂等價關係, 指的是滿足以下三個條件的關係:

(A) 對任何集合 X 都有 $X \sim X$。

(B) 給定 X 與 Y 為兩集合, 若 $X \sim Y$, 則 $Y \sim X$。

(C) 給定 X, Y, Z 為三個集合, 若 $X \sim Y$ 且 $Y \sim Z$, 則 $X \sim Z$。

現在花一點時間討論為什麼「兩個集合有相同的基數」這件事是一種等價關係。

(A) 考慮 $f : X \to X$, 其中 $f(x) = x$。若 $x_1 \neq x_2$, 則 $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$, 所以 f 是一對一。對所有 $x \in X$, 取 $x \in X$, 則 $f(x) = x$, 所以 f 是映成的。因此, $X \sim X$。

(B) 若 $X \sim Y$, 即存在一對一且映成的映射 $f : X \to Y$, 因為 f 是映成的, 所以對任何 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。因為 f 是一對一的, 如果 $f(x_1) = y$ 又 $f(x_2) = y$ 的話, 因為 $f(x_1) = y = f(x_2)$, 所以 $x_1 = x_2$。由上討論得知: 對任何 $y \in Y$, 存在唯一 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。於是我們可以建立一個映射 $g : Y \to X$, 其中 $g(y) = x$, 而 x 和 y 之間的關係是由 $f(x) = y$ 確定。

若 $y_1 \neq y_2$, 因為分別存在 x_1, x_2 使得 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$, 則 $g(y_1) = x_1, g(y_2) = x_2$, 如果 $x_1 = x_2$, 則 $f(x_1) = f(x_2)$, 得到 $y_1 = y_2$ 矛盾, 故 $x_1 \neq x_2$。因此映射 g 是一對一。

因為對任意 $x \in X$ 都有 $f(x) = y$, 所以就有 $g(y) = x$, 於是 g 是映成的。

由上討論得知: 若 $X \sim Y$, 則 $Y \sim X$。

(C) 因為 $X \sim Y$, 所以存在一對一且映成的映射 $f : X \to Y$, 因為 $Y \sim Z$, 所以存在一對一且映成的映射 $g : Y \to Z$。考慮映射 $h = g \circ f : X \to Z$。

若 $x_1 \neq x_2$, 則 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 得到 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, 於是 $h(x_1) \neq h(x_2)$, 因此 h 是一對一。

對任意 $z \in Z$, 存在 $y \in Y$ 使得 $g(y) = z$, 對於 $y \in Y$, 存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$, 所以 $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, 因此 h 是映成的。

由上討論得知: 若 $X \sim Y$ 且 $Y \sim Z$, 則 $X \sim Z$。

定義 3. 給定一個集合 S,

(A) 若 S 與正整數集 $\mathbb{N}$ 有相同的基數, 則稱集合 S 是 可數集 (countable set)。

(B) 若 S 不是有限集也不是可數集, 則稱集合 S 是 不可數集 (uncountable set)。

注意到這份講義的定義, 我們並不把有限集歸類成可數集; 也就是說,「可數集」這個詞在此專指與正整數集有相同基數的集合, 所以有時候會特別強調它是一個 *無窮可數集* (infinite countable set)。然而有些書籍或文獻會把有限集也視為可數集 (因為有限集明明就可以計數)。在數學上有時會出現定義上的落差, 面對這樣的現象, 只要確定前後文能夠自成一個系統不互相混用即可, 不需要對於定義這件事有過多的爭辯。

探討一個集合是可數集或是不可數集其實已經發展出一套十分深刻的理論, 但是這裡並不打算完整介紹那個理論, 這個單元的重點只是要用簡要的方式回答前面三個問題, 讓各位從中了解自然數集 $\mathbb{N}$、整數集 $\mathbb{Z}$、有理數集 $\mathbb{Q}$ 與實數集 $\mathbb{R}$ 在可數與不可數的意義下之關係。

根據上面集合基數的定義, 現在想要回答第一個問題: 正整數集與正偶數集的基數比較。

例 **4.** 正整數集 $\mathbb{N}$ 與正偶數集 $2\mathbb{N}$ 有相同的基數。

證明: 建立映射 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ 為 $f(n) = 2n$。

(A) 對於 $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$, 則 $f(m) = 2m \neq 2n = f(n)$, 所以 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ 是一對一映射。

(B) 對於 $y \in 2\mathbb{N}$, 則 $y = 2m$, 其中 $m \in \mathbb{N}$, 則 $f(m) = 2m = y$, 得到 $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ 是映成的。

由上討論得知 $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$。 □

至於第二個問題的答案則需要慢慢建構。這裡先下結論, 我們要證明: 有理數集是可數集, 而實數集是不可數集。所以實數集的元素個數比有理數集的元素個數還要多很多。

引理 **5.** *假設集合 A 是可數集, 而集合 $E \subset A$。若 E 不是有限集, 則 E 是可數集。*

證明: 因為 A 是可數集, 所以存在 $f : \mathbb{N} \to A$ 是一對一且映成的映射; 換言之, 我們可以將 A 中的元素給予編號 $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \ldots, f(n) = a_n, \ldots$, 於是對集合 A 裡面的元素來說, 我們可以給出一個排序的關係: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$。

若 $E \subset A$ 且 E 不是有限集, 現在從 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ 依序詢問該元素是否也在集合 E 裡面, 將第一個落在 E 裡面的元素重新標記成 a_{n_1}, 再從 a_{n_1} 之後找到下一個落在 E 中的元素, 將它記為 a_{n_2}, 由此得到 a_{n_k} 是在 $a_{n_{k-1}}$ 之後尋找下一個落在 E 中的元素。如此建立了映射 $F : \mathbb{N} \to E$, 其中 $F(k) = a_{n_k}$。這裡注意到: 在集合 E 當中的元素編號與集合 A 當中的元素編號形成一對一的映射 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 其中 $g(k) = n_k$。

以下將證明 $\mathbb{N}$ 與 E 有相同的基數。

(A) F 是一對一映射: 對任何 $k', k'' \in \mathbb{N}$ 且 $k' \neq k''$, 則 $F(k') = a_{n_{k'}}, F(k'') = a_{n_{k''}}$, 因為由 k' 與 k'' 對應到 A 中的元素編號不同, 即 $g(k') \neq g(k'')$, 或是說 $n_{k'} \neq n_{k''}$, 而 $f : \mathbb{N} \to A$ 是一對一映射, 所以 $a_{n_{k'}} \neq a_{n_{k''}}$, 即 $F(k') \neq F(k'')$, 因此 F 是一對一。

(B) F 是映成的映射: 對任何 $a \in E \subset A$, 因為 $f : \mathbb{N} \to A$ 是映成的, 所以存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $f(n) = a$, 按照記號的約定, 則有 $a = a_n$。對於 F 來說, 現在依序從 $F(1), F(2), \ldots, F(n)$ 開始找起, 一定會在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 當中找到某個數 k 使得 $F(k) = a_n = a$, 所以 F 是映成的。

□

例 **6.** 證明: $(0,1)$ 中的有理數所成的集合 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 是可數集。

證明: 按照以下方式將 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 的元素排列:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\dots,$$

也就是說, $(0,1)$ 中的有理數可表示成 $\frac{p}{q}$, 其中 $p,q\in\mathbb{N},p<q,(p,q)=1$, 而上述排列的方式是先按照分母 q 由小到大排列, 若 q 相同時, 再按照分子 p 由小到大排列。

注意到上述的有理數排列必須把 p,q 不互質的情況刪除。現在我們把這個有理數排列補回當初不互質的元素:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\dots,\frac{1}{k},\frac{2}{k},\dots,\frac{k-1}{k},\frac{1}{k+1},\frac{2}{k+1},\dots,\frac{k}{k+1},\dots,$$

補完之後, 我們不要把這些元素想成是兩數的除法, 純粹以指標 $a_{pq}=\frac{p}{q}$ 的眼光看待之, 其中 $p,q\in\mathbb{N},p<q,q\geq 2$。若將這些元素寫成表格的話, 則 a_{pq} 在表格中是位在上三角的地方。

記 $A=\{a_{pq}\}$, 此時建立映射 $f:A\to\mathbb{N}$ 為 $f(a_{pq})=(0+1+2+\cdots+(q-2))+p$。

(A) $\underline{f:A\to\mathbb{N}\text{ 是一對一映射}}$: 若 $a_{pq}\neq a_{p'q'}$, 則 $p\neq p'$ 或 $q\neq q'$。

- 若 $q\neq q'$, 比方說 $q<q'$, 則 $q'\geq q+1$ 得到 $q'-2\geq q-1$, 所以

$$\begin{aligned}f(a_{pq})&=(0+1+2+\cdots+(q-2))+p\leq 0+1+2+\cdots+(q-2)+(q-1)\\&\leq 0+1+2+\cdots+(q'-2)<0+1+2+\cdots+(q'-2)+p'=f(a_{p'q'})。\end{aligned}$$

- 若 $q=q',p\neq p'$, 比方說 $p<p'$, 則

$$\begin{aligned}f(a_{pq})&=(0+1+2+\cdots+(q-2))+p=(0+1+2+\cdots+(q'-2))+p\\&<(0+1+2+\cdots+(q'-2))+p'=f(a_{p'q'})。\end{aligned}$$

(B) $\underline{f:A\to\mathbb{N}\text{ 是映成的映射}}$: 給定 $n\in\mathbb{N}$, 存在一數 $q'\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ 使得 $0+1+2+\cdots+q'<n$ 但是 $0+1+2+\cdots+q'+(q'+1)\geq n$, 令 $q=q'+2$, 記 $p=n-(0+1+2+\cdots+q')$, 則 $f(a_{pq})=n$。

由上討論可知 A 是可數集; 最後再用 引理 **5** 的結果得知 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 是可數集。 □

這裡我們回顧 例 **6** 的建構方式, 因為在 $(0,1)$ 內的有理數比較不好直接寫出它與正整數 $\mathbb{N}$ 之間的對應關係, 所以將那些分子、分母不互質的表達法全部補回去, 甚至把它們理解為不同的元素時, 因為這樣子可以很清楚寫下規律, 也就是給定分母是 $q\in\mathbb{N},q\geq 2$ 之下, 分子就從 $1,2,\dots,q-1$ 依序排列, 這麼一來就也可以用定義的方式證明這個映射具有一對一且映成的性質。而 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 在集合的意義下是包含於上述所討論的集合, 而且它又不是有限集, 於是由 引理 **5** 得知 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 是可數集。

下一個例題是要驗證: 比 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 再多 0 還有 1 這兩個元素所成的集合仍然是可數集。以下呈現論述的方式, 在數學上與希爾伯特旅館悖論 (Hilbert's Paradox of the Grand Hotel) 有關。

例 **7.** $[0,1]$ 中的有理數集 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 是可數集。

解. 已知: 存在一對一且映成的映射 $f:\mathbb{N}\to(0,1)\cap\mathbb{Q}$。現建立映射 $F:\mathbb{N}\to[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 如下:

$$F(1)=0,\quad F(2)=1,\quad F(n)=f(n-2),\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 3。$$

(A) $\underline{F:\mathbb{N}\to[0,1]\cap\mathbb{Q}\text{ 是一對一映射}}$: 對於 $m\neq n$, 若 $m,n\geq 3$, 因為 f 是一對一得知 F 是一對一; 若 $m=1,n\neq 1$, 則 $F(1)=0,F(n)>0$ 得知 $F(1)\neq F(n)$; 若 $m=2,n\neq 2$, 則 $F(2)=1,F(n)<1$ 得知 $F(2)\neq F(n)$。因此 F 是一對一。

(B) $\underline{F:\mathbb{N}\to[0,1]\cap\mathbb{Q}\text{ 是映成的}}$: 給定 $a\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$, 若 $a=0$, 則取 $n=1$ 使得 $F(n)=a$; 若 $a=1$, 則取 $n=2$ 使得 $F(2)=1$, 若 $a\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$, 因為 f 映成, 則存在 k 使得 $f(k)=a$, 於是取 $n=k+2$ 則得 $F(n)=F(k+2)=f(k)=a$。因此 F 是映成的。

由上討論得知: $[0,1]$ 中的有理數集 $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ 是可數集。

例 **8.** 若 $A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$ 是可數集, 則 $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可數集。

證明: 因為對所有 $n\in\mathbb{N}$, A_n 是可數集, 所以將每個集合的元素用以下方式列出來:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_{11},a_{12},a_{13},\ldots,a_{1n},\ldots\}\\
A_2 &= \{a_{21},a_{22},a_{23},\ldots,a_{2n},\ldots\}\\
A_3 &= \{a_{31},a_{32},a_{33},\ldots,a_{3n},\ldots\}\\
&\vdots\\
A_n &= \{a_{n1},a_{n2},a_{n3},\ldots,a_{nn},\ldots\}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

注意到 a_{ij} 的第一個指標代表 a_{ij} 屬於集合 A_i, 第二個指標代表 a_{ij} 在 A_i 中與正整數之間的對應。

現在要將這些元素進行以下的重排 (這種排列方法稱為斜線排列法):

$$\begin{aligned}
f:\sqcup_{n=1}^{\infty}A_n &\longrightarrow \qquad \mathbb{N}\\
a_{ij} &\longmapsto (0+1+2+\cdots+(i+j-2))+i,
\end{aligned}$$

注意到定義域中我們寫 $\sqcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 表示不自交的聯集 (disjoint union); 也就是說, 我們把所有元素都視為不一樣。仿照 例 **6** 的討論可證明 f 是一對一且映成的映射。又因為 $\cup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\sqcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 而且 $\sqcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可數集, 所以由 例 **5** 的結果得知 $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可數集。 □

將上述結果綜合起來就可以證明有理數集是可數集。

例 **9.** 有理數集是可數集。

證明: 因為對所有 $k\in\mathbb{Z}$, $[k,k+1]\cap\mathbb{Q}$ 是可數集, 所以由 例 **8** 知有理數集可表示成

$$\cup_{k=1}^{\infty}\left(([k-1,k]\cap\mathbb{Q})\cup([-k,-k+1]\cap\mathbb{Q})\right),$$

所以有理數集是可數集。 □

現在要討論的是實數集的基數。首先我們花一點時間解釋實數的小數表示法。現以 $(0,1)$ 為例, 給定 $(0,1)$ 中的實數 a, 記 $N=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 現在想要將 a 改用小數點的方式註記, 方法如下:

(1) 將 $(0,1)$ 分成十等分, 由三一律 (trichotomy law) 告知 $\frac{a_1}{10}\leq a<\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}$, 其中 $a_1\in N$, 則 a_1 是 a 的小數點第一位。

(2) 將 $[\frac{a_1}{10},\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10})$ 再分成十等分, 則三一律 (trichotomy law) 告知 $\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}\leq a<\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{1}{10^2}$, 其中 $a_2\in N$, 則 a_2 是 a 的小數點第二位。

(3) 依上述原則, 將 $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k},\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^n}\right)$ 再分成十等分, 由三一律告知
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}\leq a<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k}+\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{1}{10^{n+1}},$$
其中 $a_{n+1}\in N$, 則 a_{n+1} 是 a 的小數點第 $n+1$ 位。

(4) 由此可將 $a\in(0,1)$ 對應到一個小數表示法: $0.a_1\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n\,a_{n+1}\ldots$。

對於微積分課學得還不錯的同學, 可能會突然想到一件事: 印象中有好像有多個小數表示法代表同一個實數, 比方說從 $0.\bar{9}=1$ 的經驗可推知 $0.4\bar{9}=0.5$。但是上述將實數指定至一種小數表示法與這件事無關。此外, 一個實數會有多種小數表示法的情形是出現在那個小數的某一位之後全部都是 9 的情況才會發生, 所以等一下的討論我們會避免使用 9 這個數字。

例 **10.** 證明: $(0,1)$ 中的實數集是不可數集。

證明: 利用反證法。假設 $(0,1)$ 中的實數集是可數集, 也就是存在一對一且映成的映射 $f:\mathbb{N}\to(0,1)$, 我們把這個對應關係寫出來:

$$\begin{aligned}
f(1)&=0.\,a_{11}\,a_{12}\,a_{13}\ldots a_{1n}\ldots\\
f(2)&=0.\,a_{21}\,a_{22}\,a_{23}\ldots a_{2n}\ldots\\
f(3)&=0.\,a_{31}\,a_{32}\,a_{33}\ldots a_{3n}\ldots\\
&\ \ \vdots\\
f(n)&=0.\,a_{n1}\,a_{n2}\,a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

其中 $a_{ij}\in N=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

考慮以下小數: $r=0.\,r_1\,r_2\,r_3\ldots r_n\ldots$, 其中
$$r_i=\begin{cases}4 & \text{如果 } a_{ii}\neq 4\\ 7 & \text{如果 } a_{ii}=4,\end{cases}$$
則 r 為 $(0,1)$ 中的一個實數。由上述規定得知: 對所有 $i\in\mathbb{N}$, $f(i)\neq r$, 得到 f 並非映成, 矛盾。所以 $(0,1)$ 中的實數集是不可數集。 □

這個單元的最後要回答 $[0,1]$ 區間與 $[0,2]$ 區間的基數比較。

例 **11.** 證明: $[0,1]$ 中的實數與 $[0,2]$ 中的實數有相同的基數。

證明: 考慮映射 $f:[0,1]\to[0,2]$ 為 $f(x)=2-2x$。

(A) 若 $x_1,x_2\in[0,1]$ 且 $x_1\neq x_2$, 則 $f(x_1)-f(x_2)=(2-2x_1)-(2-2x_2)=-2(x_1-x_2)\neq 0$, 得到 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 所以 f 是一對一映射。

(B) 對所有 $y\in[0,2]$, 考慮 $x=\frac{2-y}{2}\in\mathbb{R}$, 則 $0\leq\frac{2-y}{2}\leq 1$, 而且

$$f(x)=f\left(\frac{2-y}{2}\right)=2-2\left(\frac{2-y}{2}\right)=2-(2-y)=2-2+y=y,$$

所以 f 是映成的。

由上討論得知: $[0,1]\sim[0,2]$。 □

這裡我們總結這個單元一開始所提的三個問題之結果:

(1) 所有正整數而成的集合與所有正偶數所成的集合具有相同的基數, 它們都是可數集。

(2) 有理數所成的集合與實數集基數不同; 實數集是不可數集, 有理數集是可數集。

(3) $[0,1]$ 與 $[0,2]$ 具有相同的基數, 它們都是不可數集。

關於無限集 S, 至此我們只是用 $\#S=\infty$ 註記, 而由上面的討論, 我們知道無限集仍有層次上的差異, 由於實數集的基數大於自然數集的基數, 這就引發出另一個更深刻的問題: 有沒有一個集合的基數是比自然數大, 但又比實數的基數小? 這個問題是由康托 (Georg Cantor, 1845–1918) 提出, 後來德國數學家大衛 · 希爾伯特 (David Hilbert, 1862–1943) 於 1900 年在巴黎舉行的第二屆國際數學家大會上提出 23 個最重要的數學問題中, 這個問題被列為第一題, 稱為 連續統假設 (Continuum hypothesis):

不存在一個基數絕對大於可數集而絕對小於實數集的集合。

換言之, 連續統假設 (康托的直覺認為應該是這樣, 但他那個時候無法證明之, 於探提出了假設) 是說: 在無限集中, 比自然數集基數大的集合中, 基數最小的集合是實數集。

關於這個問題, 數學家用符號 $\aleph_0$ 表示自然數集的基數, 以 $\aleph_1$ 表示實數集的基數。由實數是不可數集的討論中我們知道實數集的基數是 $2^{\aleph_0}$, 於是連續統假設若以這些符號重新表達的話, 則是說: 不存在一個集合 S 使得 $\aleph_0<\#S<2^{\aleph_0}$。

關於連續統假設的議題, 這裡簡記數學家後續得到的結果如下: 庫爾特 · 哥德爾 (Kurt Friedrich Gödel, 1906–1978) 證明了連續統假設與 ZFC 的相對協調性 (無法以 ZFC 證明為誤), 而保羅 · 柯恩 (Paul Cohen, 1934–2007) 在 1963 年證明了連續統假設不能由 ZFC 推導。這麼一來將說明連續統假設是獨立於 ZFC 的一個假設。

4.5 關係

數學上有很多概念都可以透過關係 (relation) 來描述, 這個單元將介紹幾個經典而重要的關係, 透過這些例子熟悉關係這個想法, 未來各位可能會遇到不同類型的關係, 到時便能自行建立相應的結果。

在建立關係的定義前, 我們需要引進有序對的概念。有序對這件事或許各位早就習以為常地使用它, 而這裡想要補充說明的是有序對該如何從公理化集合論的角度去建構, 其結果如下:

定義 1 (第 104 頁)**.** 令 X 是一個集合, 而 $a, b \in X$, 我們定義集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ 是 a, b 的 *有序對* (ordered pair), 並將它記為 (a, b), 其中 a 稱為 (a, b) 的 *第一項* (first term), 而 b 稱為 (a, b) 的 *第二項* (second term)。

定義 2. 假設 X 與 Y 是兩個集合。如果 R 是乘積集合 $X \times Y$ 的一個子集合, 即 $R \subset X \times Y$, 我們說 R 是 X, Y 之間的一個 *關係* (relation)。此時, 我們將所有 R 中有序對的第一項所形成的集合稱為 R 的 *定義域* (domain), 記為 dom R; 所有 R 中有序對的第二項所形成的集合稱為 R 的 *值域* (range), 記為 ran R。如果 dom $R = X$, 我們說 R 是一個由 X 到 Y 的關係。特別地, 如果 R 是乘積集合 $X \times X$ 的一個子集合, 即 $R \subset X \times X$, 我們說 R 是 X 上的一個關係。

若 $x, y \in X$ 且 x 與 y 有 R 這個關係時, 我們有時會用記號 xRy 表示 $(x, y) \in R$。

若是從集合的眼光來看, 上述定義似乎什麼話也沒說, 只要是乘積空間的子集合都可以形成一種, 但我們從另一個方式思考, 當我們在進行條件的設定使得把符合該項條件的元素收集而成子集合的這個過程中, 這樣的條件就會對應到一個關係。

在探討一些實際的關係時, 我們會需要建立三個集合之間的關係, 這裡先給出相應的定義。

定義 3. 假設 X, Y, Z 是三個集合, $S \subset X \times Y$ 與 $R \subset Y \times Z$ 分別為 X, Y 之間與 Y, Z 之間的關係。定義

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z | \text{ 如果存在 } y \in Y \text{ 使得 } (x, y) \in S \text{ 且 } (y, z) \in R\}$$

是 X, Z 之間的一個關係。我們稱 $R \circ S$ 是 R 與 S *合成的關係* (composite relation)。

就如前面所述, 數學上可以建立各式各樣的關係, 而這裡我們只提出幾個常見的關係。

定義 4. 令 X 是一個非空集合, 而 R 是 X 上的一個關係。

(A1) 若對每個 $x \in X$ 都有 $(x, x) \in R$, 則稱關係 R 在 X 上是 *自反的* (reflexive)。

(A2) 若對每個 $x \in X$ 都有 $(x, x) \notin R$, 則稱關係 R 在 X 上是 *反自反的* (irreflexive)。

(B1) 若對每個 $(x, y) \in R$ 都有 $(y, x) \in R$, 則稱關係 R 是 *對稱的* (symmetric)。

(B1) 若對每個 $(x, y) \in R$ 都有 $(y, x) \notin R$, 則稱關係 R 是 *不對稱的* (asymmetric)。

(B3) 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$, 則 $x = y$, 則稱關係 R 是 *反對稱的* (antisymmetric)。

(C) 若對每個 $(x, y) \in R, (y, z) \in R$, 都有 $(x, z) \in R$, 則稱關係是 *遞移的* (transitive)。

定義 5. 若 R 是集合 X 上的一個關係, 且具有自反性、對稱性與遞移性, 則稱 R 是一種 等價關係 (equivalence relation)。等價關係有時候會用符號 $\simeq$ 表示。

會把具有反身性、對稱性與遞移性的關係稱為等價關係, 這是因為這三個性質將充分展現「相等」這個概念, 故將此抽象出來進行更一般的討論。

例 6. 考慮 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 = y^2\}$, 證明: R 是實數 $\mathbb{R}$ 上的一個等價關係。

證明:

- 對任何 $x \in \mathbb{R}$, 因為 $x^2 = x^2$, 所以 $(x, x) \in R$。因此 R 具有自反性。
- 對於 $x, y \in \mathbb{R}$, 若 $(x, y) \in R$, 則 $x^2 = y^2$, 得到 $y^2 = x^2$, 所以 $(y, x) \in R$。因此 R 具有對稱性。
- 對於 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 則 $x^2 = y^2$ 且 $y^2 = z^2$, 得到 $x^2 = y^2 = z^2$, 於是 $(x, z) \in R$, 因此 R 具有遞移性。

由上述討論得知: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 = y^2\}$ 是實數 $\mathbb{R}$ 上的一個等價關係。 □

例 7. 考慮 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x - y \in \mathbb{Q}\}$, 證明: R 是實數 $\mathbb{R}$ 上的一個等價關係。

證明:

- 對任何 $x \in \mathbb{R}$, 因為 $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, 所以 $(x, x) \in R$。因此 R 具有自反性。
- 對於 $x, y \in \mathbb{R}$, 若 $(x, y) \in R$, 則 $x - y \in \mathbb{Q}$, 得到 $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$, 所以 $(y, x) \in R$。因此 R 具有對稱性。
- 對於 $x, y, z \in \mathbb{R}$, 若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 則 $x - y \in \mathbb{Q}$ 且 $y - z \in \mathbb{Q}$, 得到 $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$, 得到 $(x, z) \in \mathbb{Q}$。因此 R 具有遞移性。

由上述討論得知: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x - y \in \mathbb{Q}\}$ 是實數 $\mathbb{R}$ 上的一個等價關係。 □

以下想要呈現等價關係的一個重要結果, 它將描述等價關係對於一個集合而言有很完整的結構。該結果對各位未來日後接觸到各式各樣的等價關係時都會經常地使用。

定義 8. 若 R 是集合 X 的一個等價關係, 定義集合

$$[x] = \{y \in X | (y, x) \in R\} = \{y \in X | yRx\}$$

稱為 x 的 等價類 (equivalence class of x)。

定義 9. 假設 X 是非空集合, 考慮由 X 的非空子集合所成的集合族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha | A_\alpha \subset X, A_\alpha \neq \emptyset\}$, 其中 $\alpha \in \Lambda$, 而 Λ 是指標集。若對 $\alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta$ 都有 $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, 而且 $\cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = X$, 我們稱 $\mathcal{A}$ 是 X 的一種 分割 (partition)。

定理 10 (等價關係基本定理, Fundamental Theorem of Equivalence Relations).

(A) 若 $R \overset{記}{=} \simeq$ 是非空集合 X 上的一個等價關係, 令 $X/\simeq$ 為 X 上所有等價類而形成的集合族, 則 $X/\simeq$ 是 X 的一種分割。

(B) 對於 X 上的任何一種分割 $\mathcal{A}$, 存在一種 X 上的等價關係 $\simeq$ 使得 $\mathcal{A} = X/\simeq$。

證明:

(A) 我們逐一驗證以下結果:

- 對任何 $x \in X$, $[x] = \{y \in X | (y, x) \in R\}$, 因為 R 是等價關係, 即 $(x, x) \in R$ 成立, 所以 $x \in [x]$, 因此 $[x] \neq \emptyset$。

- <u>這裡先證: 若 $[x] \neq [y]$, 則對任何 $x' \in [x], y' \in [y]$, 都有 $(x', y') \notin R$。</u> 假設存在 $x' \in [x]$, $y' \in [y]$ 使得 $(x', y') \in R$, 對任何 $x'' \in [x]$, 因為 $(x'', x) \in R, (x', x) \in R$, 得到 $(x, x') \in R$, 由遞移性得知 $(x'', x') \in R$; 又 $(x', y') \in R$, 遞移性得知 $(x'', y') \in R$, 再由 $(y', y) \in R$ 與遞移性得知 $(x'', y) \in R$, 所以 $x'' \in [y]$, 因此 $[x] \subset [y]$。同理, 對任何 $y'' \in [y]$, 因為 $(y'', y) \in R, (y', y) \in R$, 得到 $(y, y') \in R$, 由遞移性得知 $(y'', y') \in R$; 又 $(y', x') \in R$, 遞移性得知 $(y'', x') \in R$, 再由 $(x', x) \in R$ 與遞移性得知 $(y'', x) \in R$, 所以 $y'' \in [x]$, 因此 $[y] \subset [x]$。綜合上述討, 我們得到 $[x] = [y]$, 但這與 $[x] \neq [y]$ 矛盾。所以命題成立。

  <u>現在要證: 如果 $[x] \neq [y]$, 則 $[x] \cap [y] = \emptyset$。</u> 假設 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, 則存在 $z \in X$ 使得 $z \in [x] \cap [y]$, 而 $(z, z) \in R$, 這與前面的命題矛盾, 因此 $[x] \cap [y] = \emptyset$。

- 對任何 $x \in X$, 因為 $[x] \subset X$, 所以 $\cup_{x \in X}[x] \subset X$。另一方面, 對任何 $x \in X$, 都有 $x \in [x]$, 所以 $x \in \cup_{x \in X}[x]$, 於是 $X \subset \cup_{x \in X}[x]$。因此 $X = \cup_{x \in X}[x]$。

由上述討論得知: $X/\simeq$ 是 X 的一種分割。

(B) 給定 X 上的一種分割 $\mathcal{A}$, 對於 $x, y \in X$, 定義關係 xRy 為: 存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $x, y \in A_\alpha$。以下先驗證: R 是一個等價關係。

- 對於 $x \in X = \cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, 存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $x \in A_\alpha$, 則 xRx 成立, 所以 R 具有自反性。

- 對於 $x, y \in X$, 若 xRy 成立, 即存在 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $x, y \in A_\alpha$, 此時 yRx 亦成立, 所以 R 具有對稱性。

- 對於 $x, y, z \in X$, 若 xRy 與 yRz 成立, 即存在 $\alpha, \beta \in \Lambda$ 使得 $x, y \in A_\alpha$ 且 $y, z \in A_\beta$, 因為 $y \in A_\alpha \cap A_\beta$, 得到 $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, 所以 $\alpha = \beta$, 於是 $x, z \in A_\alpha$, 即 xRz 成立。因此 R 具有遞移性。

對於 $x \in X$, 因為存在唯一 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $x \in A_\alpha$, 由上定義可得 $[x] = A_\alpha$。因此 $\mathcal{A} = X/\simeq$。

□

除了等價關係外, 偏序與全序關係是另一類常見而重要的關係, 故在此一併介紹。

定義 **11.** 若 R 是集合 X 上的一個關係,

(A) 若 R 具有自反性、反對稱性及遞移性, 我們說 R 是一種 *偏序關係* (partial order relation)。此時, (X, R) 稱為 *偏序集* (partially ordered set)。

(B) 若 R 具有反自反性、不對稱性及遞移性, 我們說 R 是一種 *嚴格偏序關係* (strict partial order relation)。此時, (X, R) 稱為 *嚴格偏序集* (strict partially ordered set)。

例 **12.** 給定非空集合 X,

(A) 考慮冪集合 $\mathcal{P}(X)$ 以及包含 $\subset$ 的關係, 則 $(\mathcal{P}(X), \subset)$ 形成一個偏序集。

(B) 考慮冪集合 $\mathcal{P}(X)$ 以及嚴格包含 $\subsetneq$ 的關係, 則 $(\mathcal{P}(X), \subsetneq)$ 形成一個嚴格偏序集。

證明:

(A) 以下驗證偏序的三個性質:

- 對所有 $X \in \mathcal{P}(X)$ 都有 $X \subset X$, 所以 $\subset$ 具有自反性。
- 若 $X, Y \in \mathcal{P}(X)$ 滿足 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X$, 則 $X = Y$, 所以 $\subset$ 具有反對稱性。
- 若 $X, Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ 滿足 $X \subset Y$ 且 $Y \subset Z$, 則 $X \subset Z$, 所以 $\subset$ 具有遞移性。

由上述討論得知: $(\mathcal{P}(X), \subset)$ 形成一個偏序集。

(B) 以下驗證嚴格偏序的三個性質:

- 對所有 $X \in \mathcal{P}(X)$ 都有 $X \subsetneq X$ 不成立, 所以 $\subsetneq$ 具有反自反性。
- 若 $X, Y \in \mathcal{P}(X)$ 滿足 $X \subsetneq Y$, 那麼 $Y \subsetneq X$ 不成立, $\subsetneq$ 具有不對稱性。
- 若 $X, Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ 滿足 $X \subsetneq Y$ 且 $Y \subsetneq Z$, 則 $X \subsetneq Z$, 所以 $\subsetneq$ 具有遞移性。

由上述討論得知: $(\mathcal{P}(X), \subsetneq)$ 形成一個嚴格偏序集。

$\square$

偏序關係有時候會用符號 $\preccurlyeq$ 表示, 以下用符號繼續討論並定義全序關係。

定義 **13.** 令 $(X, \preccurlyeq)$ 是一個偏序集, 若 $x, y \in X$ 滿足 $x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$, 我們說 x 和 y 是 *可比較的* (comparable)。若 $C \subset X$ 滿足: C 中的任兩個元素都是可比較的, 則稱 C 是一個 *鏈* (chain)。若 X 本身是一個鏈, 則稱 $\preccurlyeq$ 是一個 *全序關係* (total order relation, linear order relation), 此時 $(X, \preccurlyeq)$ 稱為 *全序集* (totally ordered set, linearly ordered set)。

定義 **14.** 假設 $(X, \preccurlyeq)$ 是一個偏序集。若有一元素 $a \in X$ 滿足: 對任何 $x \in X$ 都有 $a \preccurlyeq x$, 我們說 a 是 X 中的 *最小元素* (least element)。

定義 **15.** 假設 $(X, \preccurlyeq)$ 是一個偏序集, 若對於每個非空子集合都有最小元素, 我們說 $\preccurlyeq$ 是一種 *良序關係* (well order), 此時 $(X, \preccurlyeq)$ 稱為 *良序集* (well-ordered set)。

定義 **16.** 假設 $(X, \preccurlyeq)$ 是一個偏序集, Y 是 X 的一個子集合。我們若有 $x \in X$ 滿足: 對所有 $y \in Y$ 都有 $y \preccurlyeq x$, 我們說 x 是集合 Y 的一個 上界 (upper bound)。

定義 **17.** 假設 $(X, \preccurlyeq)$ 是一個偏序集, 若有 $m \in X$ 滿足: 當 $a \in A$ 且 $m \leq a$ 時, 則 $a = m$, 則稱 m 是 X 的 極大元素 (maximal element)。

介紹這些術語的用意, 一方面是為了下一章在建構數系的時候可以直接討論數系上結構; 另一方面, 這裡面要介紹集合論的大定理。

定理 **18.** 以下敘述彼此等價*:*

- 選擇公理 (Axiom of Choice)*:* 假設 $\{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ 是一個由指標集 Λ 所定義出的集合族, 其中對任意 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $A_\alpha \neq \emptyset$, 以及對任意 $\alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta$, 都有 $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$, 則存在一個集合 X, 它的元素是由每一個 A_α 中各取唯一的一個元素所組成。

- 豪斯多夫極大原理 (Hausdorff maximal principle)*:* 任意非空的偏序集合 X 上都存在一個極大的全序子集合。

- 佐恩引理 (Zorn's Lemma)*:* 假設 X 為一個非空的偏序集合, 若 X 的每個全序子集合都有一個上界, 則 X 有一個極大元素。

- 策梅洛良序原則 (Well-ordering principle)*:* 任意非空集合 X 上都存在一個良序 $\preccurlyeq$ 使得 $(X, \preccurlyeq)$ 形成一個良序集。