3

數學論證與數學寫作

數學分成很多領域, 每個領域都是一個理論, 一個完整的數學理論都會給出嚴格的數學論證。對於數學系的學生而言, 在大學的求學階段除了逐一認識主要數學領域的知識外, 在這個求知的過程中能夠培養出數理論證的能力也是非常重要的。中學以前的數學幾乎都以算術為主, 數字或是運算的操作為大宗, 鮮少談論邏輯推演與論證模式以致各位在養成數理論證的能力起步算是晚的。起步得晚也許已是既定的事實, 從此時此刻起開始學習並持續精進仍然可以培養出數學論證的能力與素養。

對於一個命題或定理, 何謂證明? 該如何證明? 何謂完整地證明? 這一章的內容基本上是圍繞在這個幾個主題討論。單元 3.1 會先用一些篇幅和各位澄清進行數學證明的默契, 首先我們要體認到剛才那三個問題的答案都會隨著時間與環境而變, 所以在當下你必須先體認到要如何完成階段性任務, 這是本文所謂的默契。單元 3.2 是要給出幾個標準的證明方法, 例如直接證明法、否逆命題法、反證法, 而這幾個方法都是依循著若 P 則 Q 或是它的等價敘述進行推演。注意到這裡只是提出幾個可能性, 對於同一個命題或定理, 證明的手法不見得只有一種, 只要說得通, 邏輯上沒有任何瑕疵, 都算是一個證明。單元中的幾個例題是在讓大家看清楚證明過程與邏輯之間的關係。

至於單元 3.3 是要介紹數學上一個重要的論證手法: 數學歸納法。對於可以和正整數有逐一對應的一系列命題, 數學歸納法提供一種可能的方式以完全確定這一系列的命題為真, 它的論述方式是: 先確定初始的命題為真, 再證從一個命題為真可推得下一個命題為真。數學歸納法有幾個變型的版本像是推廣版本的數學歸汭法以及第二數學歸納法, 這些內容都會在單元中提及。

單元 3.4 是要帶大家從幾個定理的敘述中認識數學上的幾個關鍵字, 存在性、唯一性、任意性的討論在高等數學中都是重要的一環, 甚至這些字放在命題中的不同位置都會產生不一樣的效應。單元 3.5 也想要幾個例子說明在證明類似的命題時, 論證的手法上的區別, 從賞析的過程中日後各位就可以思考如何運用在其它的情境。

對於學習數學的初學者來說, 或許最關心的會是數學寫作的問題, 因為最讓人感到困擾的會是好像不論怎麼寫在別人的眼裡都覺得論述都有問題或是寫得不好, 所以在單元 3.6 想要綜整出幾個架構讓初學者有一個依循。數學寫作其實是一種特別的作文, 不講究華麗的修飾, 但力求淸晰且正確為首要目標, 而我們會在單元 3.7 繼續提點幾項在數學寫作時應該要注意的事項。

當我們認識一個定理, 不光只是字面上的意義, 透過邏輯, 我們可以得到這個定理的背後其實包含了更多的內容, 所以單元 3.8 想要從一些例子說跟各位分析在認識一個定理之後還可以做哪些事, 從中繼續探索的過程中也會增進個人的數學能力。

3.1 數學論證的默契

對於一個數學命題或定理, 我們必須對它加以解釋其正確性或是成立的原因, 而這個解釋的過程即為數學論證, 它是數學當中一個重要的環節; 另一方面, 當我們看到一個數學命題後認為該命題為假, 這時也必須加以說明為什麼這個命題不對。

在進行數學論證之前, 我們必須先想清楚怎麼樣才是在進行數學論證, 有些人以為舉個例子就說這是一個關於定理的「證明」; 還有一種情況是: 你覺得你已經「證明」出一個偉大的定理, 但沒有意識到在你所提出的論述過程中其實是基於一個很強的假設下才有這麼厲害的結果。前面所舉的兩個例子問題是在於討論事情的完整性不足, 數學定理的一個最大的特色在於定理敘述具有一般性, 所以舉例只告知某個情況成立, 但無法確保其它的例子也完全正確; 在論述中若做了一個很強的假設之下可得到定理成立, 那麼在沒有這個假設的時候定理是否成立也不得而知。所以要進行數學論證本身就是一件不容易的事, 若要對一些基礎而常見的數學結果能夠寫出一個相對清楚的數學論證, 這件事是需要長時間經驗的累積才會愈來愈成熟。

至於進行數學論證的方法有很多, 只要每一步的推演皆正確而且完成論述即可, 同一個命題或定理可能會有很多種證明的方法, 所以通常不必侷限於一些特殊手法 (除非在一些學科與課堂上的學習, 希望你學會某一個招式, 那麼就會限定你使用的手法)。我們無法羅列所有的證明手法, 有些證明真的是神來一筆, 突然想到從構造某個東西然後藉此就能討論出結果, 若你遇到這類的證明, 在看過那些意想不到的手法而為此感到讚嘆時, 你會覺得創意與巧思真的是一個非常重要的資產。

接下來的幾個單元將會提供幾個標準的證明手法與原則, 當你看到一個數學定理必須證明的時候, 這些方法可以當作是一個最初步的嘗試, 不致於完全沒有頭緒。在這些嘗試中, 你可能會從中發現隊面的數學結構, 這將有助於對整個事情的認識。然而, 關於數學論證, 其實有幾件事情要先澄清。第一, 數學論證的學習重點固然是要學會完整呈現數學證明, 而且是以邏輯正確的方式清楚表達其想法。而這件事將引出一個初學者的最大困擾: 我要怎麼寫才算完整? 怎麼樣的證明才是清楚地表達? 這個評判的依據到底是什麼? 在課堂中, 以一個數學論述來說, 為什麼老師認為我這次寫得過於簡略, 必須加以補充說明, 可是下一次寫幾乎一樣的東西時又覺得我寫得太囉嗦, 很多事情都可以省略? 就算是同一個命題來說, 在這門課的時候這樣寫很完整, 可是到了另一門課同樣的寫法又不行?

你要體認到上述所說的事情是會發生的, 而會有這樣的現象其實原因很簡單, 因為我們每個階段學習的重點不盡相同, 數學的學習過程是一次將一個區塊完整建立, 而要完成這個區塊的討論, 其實是基於「假設某些情況是成立的時候」然後建立區塊中的論述。

舉例來說, 微積分課與高等微積分課的重點是在探討實數系 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ 中如果添加了極限 (limit) 的操作後, 各種可能的理論與結構是否仍然成立, 而函數求導 (derivative) 與積分 (integration) 是兩個很特別的由極限定義出的產物, 所以當我們把它們當成是一個理論討論的重點時, 就不會去問「為什麼 $1+1=2$」這件事; 在數學導論的課程中, 當我們在認識何謂「自然數系 $(\mathbb{N},+)$」, 特別是若要從集合的語言來建立自然數的概念時, 這時候就要追問「為什麼 $1+1=2$」, 而且要從公理出發確實證明這件事是對的。

簡單說來, 我們所學的每一個學科或是每一門課程都有一個「默契」所在, 而這個「默契」, 並不要想成考試會不會得滿分或是扣分的依據, 而是學到後來會有一種不言而喻的感覺, 若你很欠缺這樣的感覺, 或許可以在課後多加交流就會明瞭。

3.2 數學論證的方法: 直接證明法、否逆命題法、反證法

在數學上, 幾乎所有的定理都是以「P 邏輯上地蘊涵 Q」($P \Rightarrow Q$) 的方式呈現。由第 1 章的討論, 若要處理 P 邏輯上地蘊涵 Q 為真, 這代表著我們要證明如言命題 $P \to Q$ 是一句恆真式, 注意到在這三個情況 (P 真 Q 真、P 假 Q 真、P 假 Q 假) 當中, 因為如果 P 為假, Q 不論真或假, $P \to Q$ 皆為真, 所以這兩個情況是不需要討論的。因此, 我們只要對於「若 P 為真, 則 Q 為真」這件事進行論述即可; 也就是說, 在 P 為真的前提下, 我們必須給出說明為什麼 Q 為真。

於是, 以下三種思維可以達成目的:

- 直接證明法: 假設命題 P 為真, 經由論證, 推得命題 Q 為真。
- 否逆命題法: 假設命題 $\sim Q$ 為真, 經由論證, 推得命題 $\sim P$ 為真。
- 矛盾法: 假設命題 P 與命題 $\sim Q$ 為真, 經由論證, 得到矛盾式 $R \wedge \sim R$。

各位可以了解到這三種方法其實核心精神是一樣的, 只是在實作層面上稍做變形而引出不同的方法。以下用一些實例分別說明如何使用這三種方法以完成數學論述。

直接證明法就是根據當下具有的資訊繼續討論而得到結果。以下舉一個直接證明法的例子。

例 **1** (第 25 頁)**.** 若 n 為奇數, 則 n^2 亦為奇數。

證明: 假設 n 是奇數, 則 $n = 2k + 1$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$, 於是

$$n^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2 \cdot (2k) \cdot 1 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

因為 $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, 所以 n^2 為奇數。 □

這裡雖然主要是在介紹論述的方式, 而關於這個命題也有幾個可以繼續延伸的討論:

- 首先注意到「若 n 為奇數, 則 n^2 亦為奇數。」已經證明為真之後, 其實連帶也得到它的否逆命題「若 n^2 是偶數, 則 n 是偶數」也是成立的。
- 看完這個例子之後, 應該要試著自己引出其它的問題像是: 如果 n 是偶數的情況又如何? 可以建立出「若 n 為偶數, 則 n^2 亦為偶數。」這樣的定理嗎? 甚至, 因為平方是指自乘的意思, 不同數字的相乘和奇偶數的關係又是什麼呢? 從這些較為單純的命題出發, 多對自己提問並解答, 若一時想不出答案也是和同學或老師互動的好時機以澄清疑問。

  關於上面的問題, 可以自行仿照上面的方式再推論一次, 可以得到奇、偶數關於乘法的關係, 製表的如下:

$\times$	奇數	偶數
奇數	奇數	偶數
偶數	偶數	偶數

因為我們已經證明過「若 P 則 Q」與「若 $\sim Q$ 則 $\sim P$」這兩個命題等價, 所以否逆命題法是把 $\sim Q$ 為真當作前提, 目標是要證明 $\sim P$ 為真。下面的例子是用否逆命題法證明其結果。

例 **2** (第 25 頁)**.** 考慮實數函數 $f(x) = mx + b, m \neq 0$, 證明: 如果 $x_1 \neq x_2$, 則 $f(x_1) \neq f(x_2)$。

證明: 假設 $f(x_1) = f(x_2)$, 即 $mx_1 + b = mx_2 + b$, 得到

$$mx_1 + b - (mx_2 + b) = mx_1 - mx_2 = m(x_1 - x_2) = 0,$$

因為 $m \neq 0$, 所以 $x_1 - x_2 = 0$, 因此 $x_1 = x_2$。 □

看完這個例子之後, 可以思考的幾個問題如下:

- 這個命題為什麼會使用否逆命題法而不會用直接證明法呢? 一個解釋如下: 因為我們在數學的系統中所給的規則都是等號, 比較少有不等號的表達, 所以用否逆命題法會比較容易透過數學系統的規則完成論述。

- 這個命題若用數學的語言來看, 是在說明函數 $f(x) = mx + b, m \neq 0$ 是一對一 (one-to-one)。函數的理論會在之後的章節才會仔細介紹, 討論函數是否一對一的用意在於是否可以從這個函數建立它的反函數 (inverse function)。微積分理論也可以從導數以及均值定理 (Mean Value Theorem) 的觀點判斷函數是否一對一。

矛盾法是假設命題 P 與 $\sim Q$ 皆為真, 然後試圖尋找一個新的命題 R 使得 R 為真而且 $\sim R$ 為真, 由於 $R \wedge \sim R$ 是矛盾式, 所以這個衝突來自於「命題 P 與 $\sim Q$ 皆為真」為假; 換言之, 我們得知「P 為假或是 $\sim Q$ 為假」, 而「若 P 則 Q」的語句是 P 為真這件事情不去挑戰它, 所以就得到 $\sim Q$ 為假, 因此 Q 為真。

例 **3.** 證明: $\sqrt{2}$ 不是有理數。

證明: 假設 $\sqrt{2}$ 是有理數, 即存在 $p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1$ 使得 $(\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, 得到 $p^2 = 2q^2$。由此得知 p^2 為偶數, 所以 p 為偶數。記 $p = 2m$, 其中 $m \in \mathbb{N}$, 再代回式子 $p^2 = 2q^2$ 得到 $(2m)^2 = 2q^2$, 即 $q^2 = 2m^2$, 由此得知 q^2 為偶數, 所以 q 為偶數。

因為 p, q 皆為偶數, 所以 p, q 為非互質, 這與 $(p, q) = 1$ 矛盾。故 $\sqrt{2}$ 不是有理數。 □

- 關於命題「$\sqrt{2}$ 不是有理數。」初看之下你可能會覺得有一點突兀, 它似乎不像是「若 P 則 Q」的語句。實際上這句話是一句較為口語的表達, 它省略了一些前提。當我們把省略的部分補回去並且用數學與邏輯的語言串接的話就變成「若 x 滿足 $x^2 = 2$ 且 $x > 0$, 則 x 不是有理數」。數學上的一些陳述會試著用比較口語的方式呈現, 好處是平易近人, 也比較貼切, 若是你看到兩個補回省略部分的命題時, 語句變得冷冰冰而無感。

- 各位可以思考「$\sqrt{2}$ 不是有理數。」和「$\sqrt{2}$ 是無理數。」這兩句話有些許的差異, 上述的論證只是得到 $\sqrt{2}$ 不是有理數, 至於為什麼 $\sqrt{2}$ 是實數? 至少在上面的證明中並沒有很明顯地顯示這件事。當我們確定 $\sqrt{2}$ 是實數, 而且 $\sqrt{2}$ 不是有理數, 才能得知 $\sqrt{2}$ 是無理數。

例 **4.** 試證: 不存在 a, b, c 皆為質數使得 $a^3 + b^3 = c^3$。

證明: 假設存在質數 a, b, c 滿足 $a^3 + b^3 = c^3$, 現對於 a, b, c 的奇偶性分情況討論:

- 如果 a, b 為奇數, 則 a^3, b^3 為奇數, 所以 $a^3 + b^3$ 為偶數, 於是 c^3 為偶數, 得到 c 必須是偶數。但是, 唯一的質數又是偶數是 2, 所以我們有 $a^3 + b^3 = 2^3 = 8$。另一方面, 因為 a, b 是奇的質數, 所以 $a \geq 3$ 且 $b \geq 3$, 得到 $a^3 + b^3 \geq 18$, 這與 $a^3 + b^3 = 2^3 = 8$ 矛盾。

- 如果 a, b 其中一個為偶數, 不失一般性, 假設 $a = 2$, 則 $c^3 - b^3 = (c-b)(c^2+cb+b^2) = a^3 = 8$。因為 $c \geq 2$ 且 $b \geq 2$, 所以 $c^2 + cb + b^2 \geq 12$, 於是 $c^3 - b^3 \geq 12$, 這與 $c^3 - b^3 = 8$ 矛盾。

- 綜合上面討論, 我們得知: 不存在 a, b, c 皆為質數使得 $a^3 + b^3 = c^3$。

□

例 **5.** 試證: 不存在正整數 m, n 使得 $\frac{8}{17} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$。

證明: 因為 $\frac{8}{17} < \frac{1}{2}$, 所以 $m \geq 3, n \geq 3$, 因為 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} < \frac{8}{17}$, 所以 m 與 n 當中必須有一個數字是 3 或 4。

- 如果 $m = 3$, 則 $\frac{1}{n} = \frac{8}{17} - \frac{1}{3} = \frac{7}{51}$ 得到 $n = \frac{51}{7}$ 並非正整數;

- 如果 $m = 4$, 則 $\frac{1}{n} = \frac{8}{17} - \frac{1}{4} = \frac{15}{68}$ 得到 $n = \frac{68}{15}$ 並非正整數。

綜合上述討論, 我們得知: 不存在正整數 m, n 使得 $\frac{8}{17} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$。 □

這一個單元的最後, 我們舉一個無窮級數理論常用的結果。

定理 **6.** *若一個無窮級數* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *收斂, 則* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

證明: 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 記級數和為 $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 於是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S - S = 0。$$

□

上述定理是在說明: 收斂的級數的必要條件是一般項趨近於零, 證明的方式是直接從定義就可得到結果。而這個定理經過「若 P 則 Q」與「非 Q 則非 P」的等價轉換後, 就變成了級數理論中很常用的 發散判別法 (Test of Divergence):

定理 **7** (發散判別法, Test of Divergence)**.** *若有一個數列* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *發散, 或是* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, *則無窮級數* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *發散。*

特別注意到: 將「$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$」進行否定, 除了「$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$」之外, 也有可能數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是發散的 (極限不存在)。

3.3 數學論證的方法: 數學歸納法

在數學上, 我們有時會遇到一系列命題, 這一系列的命題是以自然數為變數, 所以我們將這些命題記為 $P(n)$, 其中 $n \in \mathbb{N}$; 也就是說, 任給 $n_0 \in \mathbb{N}$, $P(n_0)$ 是一個命題。我們會想要問: 命題 $P(n)$ 是否對任意自然數都為真? 因為自然數有無限多個元素, 所以我們不可能一個一個去檢查 $P(n)$ 是真或是假。但是, 當你發現到這些命題之間可能有一些關聯的時候, 那麼就可能可以建立一個有系統的論證方法, 以下要介紹的 *數學歸納法原理* (Principle of Mathematical Induction) 或是簡稱 *數學歸納法* (Mathematical Induction) 就是處理這類型命題的一種重要論證方法。

這裡我們先看一個標準的數學歸納法, 證明的步驟如下:

- 當 $n = 1$ 時, 證明命題 $P(1)$ 成立。
- 假設 $n = k, k \in \mathbb{N}$ 時命題 $P(k)$ 成立, 由此推得當 $n = k + 1$ 時命題 $P(k + 1)$也成立。
- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 命題 $P(n)$ 成立。

例 **1.** 證明: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$。

證明:

- 當 $n = 1$ 時, 左式為 1, 右式為 $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$, 所以當 $n = 1$ 時命題成立。
- 假設 $n = k, k \in \mathbb{N}$ 時命題成立; 也就是說, 假設 $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ 成立。

  當 $n = k + 1$ 時, 計算

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) &= \frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = (k + 1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) \\ &= (k + 1) \cdot \frac{k + 2}{2} = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}, \end{aligned}$$

  得到命題在 $n = k + 1$ 時亦成立。
- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 成立。

□

注意到: 數學歸納法只是提供一種可能的工具完成論述, 它不並是唯一的方法證明該命題。所以像上述的例子, 我們也可以用下面的方式證明即可:

證明: 記

$$\begin{aligned} S &= 1 + \quad 2 \quad + \cdots + (n - 1) + n \\ S &= n + (n - 1) + \cdots + \quad 2 \quad + 1 \end{aligned}$$

兩式相加後得到 $2S = n(n + 1)$, 所以 $S = \frac{n(n+1)}{2}$。 □

例 **2.** 證明: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ 可以被 6 整除。

證明:

- 當 $n = 1$ 時, 因為 $n^3 - n = 1^3 - 1 = 0$, 0 可以被 6 整除, 所以當 $n = 1$ 時命題成立。
- 假設 $n = k, k \in \mathbb{N}$ 時命題成立; 也就是說, 假設 $k^3 - k$ 可以被 6 整除。

  當 $n = k + 1$ 時, 計算

  $$(k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = k(k+1)(k+2),$$

  注意到對任何 $k \in \mathbb{N}$, k 與 $k+1$ 中必有一數為偶數, 而且 $k, k+1, k+2$ 中必有一數為 3 的倍數, 所以 $(k+1)^3 - (k+1)$ 可以被 6 整除, 得到命題在 $n = k + 1$ 時亦成立。
- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 成立。

□

同樣地, 我們也可以用直接證明法處理這個命題。

證明: 因為 $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n+1)n(n-1)$ 為連續三個非負整數的相乘, 這三個數字中, 必有 3 的因數, 也必存在偶數, 所以也有 2 的因數, 因此 $n^3 - n = (n+1)n(n-1)$ 必有 6 的因數, 故 $n^3 - n$ 可以被 6 整除。 □

數學歸納法不見得只能用在等式, 我們也可以用不等式的討論。

例 **3** (伯努力不等式, Bernoulli's Inequality)**.** 對任意 $x \geq -1$ 與任何自然數 $n \in \mathbb{N}$, 都有

$$(1+x)^n \geq 1 + nx。$$

證明: 利用數學歸納法完成論述:

- 當 $n = 1$ 時, 則 $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \cdot x$ 不等式成立。
- 假設 $n = k, k \in \mathbb{N}$ 時, 不等式 $(1+x)^k \geq 1 + k \cdot x$ 成立。

  當 $n = k + 1$ 時, 則

  $$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) \overset{(x \geq -1)}{\geq} (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x。\end{aligned}$$
- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: 對任意滿足 $x \geq -1$ 的實數與任何自然數 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $(1+x)^n \geq 1 + nx$。

□

以下還想再介紹一個重要的不等式: 算幾不等式 (Arithmetic and Geometric Mean Inequality), 不僅這個不等式重要, 各位也可以看到使用數學歸納法的時候並不是很死板地討論, 可是可以靈活地運用。

定理 4 (算幾不等式, Arithmetic and Geometric Mean Inequality). 若 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 為正數, 則

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}, \tag{1}$$

等號成立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

證明: 以下先對於 $n = 2^m, m \in \mathbb{N}$ 的 m 用數學歸納法證明算幾不等式。

- 當 $m = 1$ 時, 因為 $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, 即 $a_1 - 2\sqrt{a_1 \cdot a_2} + a_2 \geq 0$, 得到 $\frac{a_1+a_2}{2} \geq (a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}}$ 不等式成立。

- 假設 $m = k, k \in \mathbb{N}$ 時, 不等式 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}}$ 成立。

  當 $m = k+1$ 時, 則

$$\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} &= \frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \\
&\geq \left(\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left((a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2^k})^{\frac{1}{2^k}} (a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \cdots \cdot a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^k}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{2^k} \cdot a_{2^k+1} \cdot a_{2^k+2} \cdot \cdots \cdot a_{2^{k+1}})^{\frac{1}{2^{k+1}}}
\end{aligned}$$

- 由數學歸納法 (Mathematical Induction) 得知: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$ 對於 $n = 2^m, m \in \mathbb{N}$ 時成立。

對於一般的 $n \in \mathbb{N}$, 現取一數 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $n < 2^m$, 令 $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 為這 n 個數的算術平均數, 記 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2^m} = A$, 利用前面所得的算幾不等式, 得到

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^m-n)A}{2^m} \geq \left(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot A^{2^m-n}\right)^{\frac{1}{2^m}},$$

這個不等式整理之後得到

$$A \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{2^m}} A^{1-\frac{n}{2^m}} \Rightarrow A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq (a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}}。$$

至於等號成立的情況討論如下: 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \overset{記}{=} A$, 則左式為

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{A+A+\cdots+A}{n} = A,$$

右式為

$$(a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n)^{\frac{1}{n}} = (A \cdot A \cdot \cdots \cdot A)^{\frac{1}{n}} = A,$$

故 (1) 的等式成立。

另一方面, 如果有 n 個數不全相等, 令 $A = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, 不失一般性, 假設 $a_1 > A$ 以及 $a_2 < A$。現取 $\varepsilon > 0$ 使得 $a_1 - \varepsilon > A$ 且 $a_2 + \varepsilon < A$。考慮以下 n 個數:

$$b_1 = a_1 - \varepsilon, \quad b_2 = a_1 + \varepsilon, \quad b_k = a_k \text{ 其中 } k = 3, \ldots, n。$$

因為 $a_1 - \varepsilon > A > a_2 + \varepsilon$, 得到 $a_1 - a_2 - \varepsilon > \varepsilon > 0$, 由 (1) 式得到

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n &= \left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right)^n \geq b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n \\
&= (a_1-\varepsilon)(a_2+\varepsilon)a_3 \cdot \cdots \cdot a_n \\
&= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n + \varepsilon(a_1 - a_2 - \varepsilon)a_3 \cdot \cdots \cdot a_n \\
&> a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n。
\end{aligned}$$

綜合上述討論, 我們知道 (1) 式等號等立若且唯若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。 □

數學上有許多帶有自然數為變數的命題 $P(n)$ 不見得對所有正整數都成立, 若是想要證明對所有 $n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, 命題 $P(n)$ 成立, 我們可以對於數學歸納法稍加修飾即可, 我們稱為推廣的數學歸納法 (the Extended Principle of Mathematical Induction):

- 當 $n = n_0$ 時, 證明命題 $P(n_0)$ 成立。
- 假設 $n = k$, 其中 $k \in \mathbb{N}, k \geq n_0$ 時命題 $P(k)$ 成立, 由此推得當 $n = k+1$ 時命題 $P(k+1)$ 也成立。
- 由推廣的數學歸納法 (the Extended Principle of Mathematical Induction) 知: 對所有 $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, 命題 $P(n)$ 成立。

例 **5** (第 76 頁). 證明: 對所有 $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, 不等式 $n^2 < 2^n$ 成立。

證明:

- 當 $n = 5$, 左式為 $n^2 = 5^2 = 25$, 右式為 $2^n = 2^5 = 32$, 故不等式 $n^2 < 2^n$ 成立。
- 假設 $n = k, k \in \mathbb{N}, k \geq 5$ 時不等式成立; 也就是說, 假設不等式 $k^2 < 2^k$ 在 $k \in \mathbb{N}, k \geq 5$ 的時候成立。

  當 $n = k+1$ 時, 欲證明 $(k+1)^2 < 2^{k+1}$, 此不等式等價於 $k^2 + 2k + 1 < 2 \cdot 2^k$。如果我們能夠證明 $2k + 1 < k^2$ 的話, 那麼根據遞移律, 則有 $k^2 + 2k + 1 < k^2 + k^2 = 2k^2 < 2 \cdot 2^k$, 即證明了 $(k+1)^2 < 2^{k+1}$ 不等式成立。

  注意到: 因為 $k \in \mathbb{N}, k \geq 5$, 所以 $k(k-2) > 1 \Leftrightarrow k^2 - 2k > 1 \Leftrightarrow k^2 > 2k + 1$。
- 由推廣的數學歸納法 (the Extended Principle of Mathematical Induction) 知: 對所有 $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$, 不等式 $n^2 < 2^n$ 成立。

□

除了上述標準的數學歸納法之外, 接下來要介紹與此相關的變型: 假設有一系列的命題 $P(n)$, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 第二數學歸納法 (Second Principle of Mathematical Induction) 提供了一種可能的工具以確定所有的 $P(n)$ 皆為真:

- 證明命題 $P(1)$ 為真。
- 對於 $k \in \mathbb{N}$, 若命題 $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ 為真, 則命題 $P(k+1)$ 為真。
- 由第二數學歸納法 (Second Principle of Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}$, 命題 $P(n)$ 為真。

注意到第二數學歸納法的特色是: 在證明 $P(k+1)$ 為真的過程中, 不僅依賴於 $P(k)$ 這個命題為真, 還需要用到 $P(1), P(2), \ldots, P(k-1)$ 這些命題為真。

同樣地, 我們可以對於第二數學歸納法稍做推廣, 成為推廣的第二數學歸納法 (the Extended Second Principle of Mathematical Induction): 若是想要證明對所有 $n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}$, 命題 $P(n)$ 成立, 推廣的第二數學歸納法提供了一種可能的工具以確定所有的 $P(n)$ 皆為真:

- 證明命題 $P(n_0)$ 為真。
- 對於 $n = k \in \mathbb{N}, k \geq n_0$, 若命題 $P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(k)$ 為真, 則命題 $P(k+1)$ 為真。
- 由推廣的第二數學歸納法 (the Extended Second Principle of Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, 命題 $P(n)$ 為真。

在看過第二數學歸納法的大致架構之後, 以下用一個例子說明如何使用第二數學歸納法得到數學上的結果。

例 **6.** 任何大於 1 的正整數為質數或為質數之積, 兩者之一必成立。

證明:

- 當 $n = 2$, 因為 2 為質數, 所以命題成立。
- 對於 $n = k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, 假設命題 $P(2), P(3), \ldots, P(k)$ 為真; 也就是說, 對於 $2, 3, \ldots, k$ 來說, 假設這些數字是質數, 或是它可以表示為質數的乘積, 兩者之一必成立。

  當 $n = k+1$ 時, 若它是質數, 則命題成立。若它不是質數, 則存在 $a \neq 1, b \neq 1$ 使得 $n+1 = ab$, 因為 a, b 兩數都小於 $k+1$, 所以它們是 $2, 3, \ldots, k$ 中的數, 故 a, b 為質數, 或是它們可以表示為質數的乘積, 兩者之一必成立。因此 $k+1$ 為質數的乘積。

- 由推廣的第二數學歸納法 (the Extended Second Principle of Mathematical Induction) 得知: 對所有 $n \in \mathbb{N}, n > 1$, n 為質數或為質數之積, 兩者之一必成立。

$\square$

3.4 剖析定理敘述

若要在數學寫作上有所精進, 對於定理的正確認識是必須的; 也就是說, 當我們看到一個定理的敘述, 必須清楚知道這個定理的意義, 這裡的意義不只是字面上每個數學符號的意義或是形容詞的描述, 而是關係到目前所要討論的數學情境設定、哪些部分是視為前提使得在論述中是當成可以用的條件、最後要證明的是什麼, 這些東西都必須確定清楚之後再去理解證明的過程或是學會數學論述, 避免所寫下的內容完全不符合情境或是不到位。

這個單元將舉一些例子說明如何剖析定理敘述。首先, 數學上一個想要討論的數學物件之「存在」與「唯一」算是數一數二重要的結果, 但是這兩個詞放在定理當中的位置不同會造成不一樣的效應。這裡我們把函數極限唯一性的定理與一階微分方程初始值問題解的存在唯一性定理兩個並列在一起, 觀察一下兩個定理的差異。

定理 1. 若函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 處極限存在, 則極限值唯一。

定理 2. 考慮以下一階微分方程式初始值問題

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y), \quad y(0) = 0,$$

若 $F(x, y)$ 與 $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ 在矩形區域 $R = [-a, a] \times [-b, b]$ 上連續, 則存在區間 $[-h, h] \subset [-a, a]$ 使得微分方程式在 $x \in [-h, h]$ 中存在唯一解 $y = \phi(x)$。

關於 定理 1 的句型是「若存在則唯一」的樣子; 也就是說, 在「函數在一個點的極限存在」這個命題為真的情況下, 可以得知「極限值是唯一的」這個命題為真。所以這個定理是把「極限存在當成已知」以及「極限值唯一」之間建立一道橋樑。對於一個實際問題, 你要先花時間並且用其它方法確定函數在一點的極限存在, 比方說可以透過極限的精確定義 (precise definition of limit, ε-δ language)、實數的完備性 (completeness of real number system)、夾擠定理 (Squeeze Theorem) ...... 等定理或公理知極限存在, 然後這個定理隨即得知極限值就只有一個。於是函數極限若存在則唯一這個結果隱含著一個函數在一點的極限最多只有一個 (可能沒有, 有的話就只有一個)。

至於 定理 2 則是微分方程理論的一個重要結果, 他的句型是「若初始值問題滿足一些條件的話, 則方程式的解存在且唯一。」特別注意存在與唯一都是定理的結果, 所以關於這個定理, 存在性與唯一性都是要被證明的。

在分析完定理敘述之後, 下面想以極限四則運算的定理為例強調一些使用定理時必須注意的事情。

定理 3 (極限的四則運算)**.** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在, 則

(A) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

(B) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, 則 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$。

關於極限的四則運算這個結果, 多數人都只看重「極限可以進行四則運算」, 卻時常忽略這個定理是有前提的 (有條件的); 也就是說,「若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在」這個命題必須為真的情況下, 才會有後面的結果。當「$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 與 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在」這個命題不是真的時候, 就無法使用定理, 我們無法從這個定理推論出極限四則運算的結果是否成立。

舉例來說, 考慮以下極限:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)\overset{(\star)}{=\!=}\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}2=2+2=4。$$

第一個極限式是無法直接使用極限的四則運算, 雖然分子有兩項, 分母也有兩項, 各自取極限之後都存在, 但是分母 $x-2$ 整體來看, $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}2=2-2=0$, 極限值是 0, 這將導致極限的四則運算的定理的前提不成立。

因為 $\lim\limits_{x\to 2}$ 是在觀察 $x\neq 2$ 的地方, 所以當 $x\neq 2$ 的時候, $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2$ 這三個函數表達式是一模一樣的, 故它們的極限結果一致 (極限值不存在, 或者是極限存在且相同)。至於 $(\star)$ 式的成立就是用到極限四則運算的結果。

這裡為什麼要一直強調存在性很重要? 這是因為一個想要研究的數學物件必須先說明它存在, 之後探討它的相關性質時才具有意義, 否則的話會給出不合理的結果。

這裡再舉兩個例子以突顯這個概念的重要性。

例 **4** (想清楚下面的論述怪在哪裡)**.** 證明: 1 是最大正整數。

證明: 假設 x 是最大正整數。因為 x 是正整數, 所以 x^2 也是正整數, 因為 x 是最大正整數, 所以 $x^2\le x$, 於是 $x^2-x\le 0$, 得到 $x(x-1)\le 0$, 解得 $0\le x\le 1$。因為 x 是正整數, 所以 $x=1$ 是唯一的答案。 □

上面論述產生謬誤的原因就是在於我們一開始寫「假設 x 是最大正整數」。實際上最大正整數是不存在的, 理由如下: 對任何正整數 n_0, 因為 $n_0<n_0+1$, 所以 n_0 不是最大正整數, 於是所有的正整數都不會在正整數集合中滿足「最大」這個性質。

例 **5** (想清楚下面的論述哪裡怪)**.** 試求: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$。

解**.** 考慮

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots\\ \frac{1}{2}\cdot S &= \qquad\ \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\cdots \end{aligned}$$

兩式相減則得

$$\frac{1}{2}\cdot S=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

所以 $S=2$。

在國中或高中的你若是寫出上面的論述, 大家都會覺得你很厲害、好棒棒, 你也可能就是一直這樣被吹捧的情況下就誤入歧途地進到數學系。小時候你這樣寫會拿滿分, 但是若是修瑋哥的任何課程還是這樣寫的話, 可能一分都拿不到。

實際上這段論述的問題很多, 這裡只提當中最大的問題點: 為什麼你可以把這個式子令成 S? 這裡也是牽涉到存在性的問題, 那些無限多個數字相加之後為什麼仍然是個實數呢? 你可能會想:「我不都已經算出答案了嗎? 結果都寫出來了不就是代表那個級數和是實數嗎?」

若你覺得「S 的存在性這件事要先講清楚」不重要的話, 或是你覺得算出答案就好了的話, 那我仿照你的思維再寫一個例子給你看: 考慮

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + \cdots \\ 2 \cdot S &= \phantom{1 + {}} 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n + \cdots \end{aligned}$$

兩式相減之後得到 $-S = 1$, 於是 $S = -1$。

你可以接受全部為正的數加起來變成負的值嗎?

最近在改作業的時候, 還是會有同學想當省話一哥或是省話一姊。我認為你被形塑成省話一哥或一姊的現象是來自於國、高中學數學所延續下來的遺毒, 因為國、高中的數學向來都只在乎解題、有沒有速算法、算得正不正確, 卻忽略推理的嚴謹與完整性, 所以過往的你只在乎找到答案, 如何快速通關。當你通篇都只有算式, 沒有利用一些詞句進行串接, 甚至沒有解釋前因後果, 對閱讀者來說不僅無法順利看懂你要表達的意思, 當欠缺這些完整地說明, 整個論述很有可能都有問題。所以我有必要在數學系的課程並且對於修我課程的學生不斷提醒並強調重視自己的數學寫作這件事; 換句話說, 在大學數學的課程中, 把事情解釋得一清二楚的重要性會比快速算出答案來說還要來得重要。

現在回到數學的討論, 數學上有時你會看到「以下敘述彼此等價」(The followings are equivalent) 的定理, 這裡我們拿高等微積分的一個結果為例, 說明要怎麼看待這個定理。

定理 6. *在實數系 (real number system) $(\mathbb{R}, +, \cdot, (\mathtt{D}))$ 上, 關於完備性 (D) 的部分有以下幾個等價敘述:*

- (D) *戴德金切割原理:* 對於實數集 $\mathbb{R}$ 的任何一個切割 R 之最小上界存在。
- (S) *確界原理:* 若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界, 則有最小上界; 若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有下界, 則有最大下界。
- (M) *單調有界定理:* 遞增有上界的數列必收斂; 遞減有下界的數列必收斂。
- (I) *區間套定理:* 若有閉區間列 $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足後一個閉區間包含於前一個閉區間以及閉區間長度的極限為零這兩個條件時, 則存在唯一實數 $\xi \in \cap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$。
- (F) *有限覆蓋定理:* 有界閉區間的任何一個開覆蓋, 必存在有限個數的子覆蓋。
- (W) *數列緊緻性定理:* 有界數列必有收斂的子數列。
- (C) *柯西收斂準則:* 無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充分必要條件是無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。

各位日後在看到像這樣彼此敘述等價的定理時, 可以多花時間好好體會當中的奧秘, 這些敘述表面上看起來不同, 陳述某件事用到的概念不同, 甚至有的看起來像是比較強的條件, 有的是比較弱的條件, 可是這些條件放在我們要討論的數學架構 (在此是指實數 $\mathbb{R}$ 系統) 當中的時候卻又可以互相推得, 這是一件蠻美妙的事情。

現在就以 定理 **6** 簡單解釋定理的內容。首先, 定理的主架構是「在某個數學情境下, 以下敘述彼此等價」; 也就是說, 設定好某個數學架構之下, 並且指定當中的一個敘述為真, 就可以推得另一個敘述為真。在實數完備性的議題中, 任取兩個敘述都可以彼此互相證明。

這裡拿 (S) 與 (C) 彼此等價為例, 把當中的邏輯再述說清楚。

- (S) $\Rightarrow$ (C) 是指: 把「若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界, 則有最小上界。」這件事情當成已知, 然後要說明兩件事: (1) 如果無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂的 (這件事也當成已知的前提), 那麼就可以推得無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。(2) 如果無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列 (這件事也當成已知的前提), 那麼就可以得知無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂的。

★ 這裡或許再做一個小小的補充, 在你真正探索實數完備性的問題時, 會發現到: 在實數系統中,「如果無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 則無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。」這件事情是必定會成立; 也就是說, 在證 (1) 的時候, 不需要用到 (S) 這個條件。於是, 在 (S) $\Rightarrow$ (C) 的過程中, 在證明 (2) 的階段才需要用到 (S) 這個條件。

- (C) $\Rightarrow$ (S) 是指: 把「無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂的充分必要條件是無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列。」這件事情當成已知, 然後要證明: 如果一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界 (這件事也當成已知的前提), 那麼可以推得這個集合的最小上界是存在的。

★ 若各位有體悟到前段打星號的敘述的話, 將可意會到在證 (C) $\Rightarrow$ (S) 的過程中, 關鍵點是在於你必須利用「若無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是柯西數列, 則無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收斂的。」這個方向的敘述才能推得。

上述解釋這麼多的用意是要讓各位知道未來在進行數學論證時, 介定清楚哪些東西是當成已知, 哪個部分是需要證明 (加以說明) 的。

在實數完備性的等價敘述中, 有兩個敘述是比較特殊的, 分別是確界原理與單調有界定理。這兩個定理雖然寫成兩句話, 但是那兩句話是彼此互通的; 也就是說, 只要確定「若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有上界, 則有最小上界。」那麼就可以得到「若一個非空的集合 $E \subset \mathbb{R}$ 有下界, 則有最大下界。」反之亦然。此外,「遞增有上界的數列必收斂。」這件事成立就可以得到「遞減有下界的數列必收斂。」我看待這個現象的方法是用對稱性原理或是說視角反向的觀點, 比方說一個減增的數列全部取負號就變成遞增的數列, 套用結果後, 再全部取負號就可以還原成原來的結果。於是, 在證明實數完備性的流程中, 我們只要選取其中一句話當成前提, 或是當成要證的目標即可。

當一個數學情境下敘述可以彼此切換的時候, 這很有可能引發出新的理論產生, 數學家會去思考的下一個問題是: 有沒有可能在另外的數學設定之下, 這些敘述不再彼此等價, 這件事若發生, 那就可以構造出不同的數學模型, 從中探討看看是否可以得到新的理論, 這樣的過程稱為理論的推廣或是理論抽象化。關於實數完備性如何推廣或抽象化, 會在高等微積分的課程中介紹。

3.5 證明的手法

這個單元想要說明一些證明的手法, 而這裡有別於單元 3.2 所提數學論證的方法, 而是針對證明的策略給出討論。同樣地, 這邊想先以一個數學物件的存在性問題進行分析。

建構法

大定理公設的存在性

例 **1.** 證明: $\mathbb{Z}_4$ 不是一個體。

解**.** 直接列表發現有些非零元素並沒有乘法反元素。優點: 直接了當。缺點: 每次遇到一個新的情況, 就要再討論一次。

解**.** 給出一般的討論, 優點在於可適用於一般的情況。

3.6 如何進行數學寫作

數學寫作 (mathematical writing) 泛指要呈現和數學相關的內容並利用文字進行闡述的過程。因為我們需要把心中的想法確實呈現出來, 論證過程透過白紙黑字的詳實記載供人檢視並挑戰, 而這個單元想要講的數學寫作所含蓋的範圍不僅是如何完整呈現定理的證明, 單純數學問題然後將計算過程寫出來也算是數學寫作, 甚至想要在定理前面的一些鋪陳都算是數學寫作的範疇。

就像各位在寫作文一樣, 如果你每次都能夠給出好的數學寫作, 這會讓閱讀者覺得很舒服, 能夠很快速地掌握到你想表達的意思, 不論你的論述正確或是錯誤, 都可以很快地進行溝通; 反之, 如果經常給出不好的數學寫作, 這會讓閱讀者心浮氣躁, 摸不著頭緒, 不會讓人想要繼續看下去, 甚至他也會猶豫著到底要不要幫你驗證你的推論之正確性。更為嚴重的是, 數學寫作隱約之中也代表著一種信任感, 若一直無法寫出一個好的數學寫作, 也可能造成別人覺得你寫的內容多少帶著一些存疑的感覺。

回想我們從小就開始寫作文, 一開始是依樣畫葫蘆, 透過模仿還有大量閱讀, 把別人寫得好的部分學起來, 獨樹一格就像各位從國小開始就學習寫作文一樣,

怎樣是一個好的數學寫作是這一個單元想要呈現的, 除了一些既有的規範必須遵守, 也有一些技巧提升數學寫作

數學寫作不像以平常的作文那樣, 以前寫作文, 你可

然而, 數學寫作主要是立求你的論述的正確與完整, 所以不需要什麼過於花俏的言詞, 以平鋪直敘的方式呈現, 然後用字遣詞精確與得宜反而是數學寫作的重點, 但是這並不代表你要

太過精簡

數學寫作就如

數學寫作的架構

數學證明的架構對於一個定理或命題需要給出相應的證明, 最基本的架構會是如下形式:

- 宣告一些設定, 例如符號、情境或限定的範圍。

  因為一個定理或命題的陳述很有可能是純文字的呈現, 然後數理邏輯的推演都是透過符號與運算進行, 所以我們需要把定理敘述出現的名詞註記成一些符號, 然後再藉助數學的系統推論出結果。

  我們可以在論述一開始就設定好符號的意義, 例如

  > 令 A 是一個非空集合。(Let A be a non-empty set.)

- 透過邏輯推演得到相應的結果。

  因為數學的定理或是命題都是從某個前提出發最後才下結論, 也就是說敘述都是 $P \Rightarrow Q$ 的形式,

  論證的形式有很多種, 比方說可以用直接證明法、反證法、矛盾證明。這三種證明方式都是以 $P \Rightarrow Q$ 為基礎然後做簡易的變形。除此以外, 還有一些特殊的論證模式, 比方說數學歸納法 (Mathematical Induction) 是數學論證中特有的一種證明模式。

  關於數學論證, 我們留到單元 3.2 進行說明。

一個定理可能會牽涉到需要先證明數個命題再將這些命題整合後繼續推論而得最後的結果, 對於複合式的定理, 在數學寫作上有幾種作法:

考量你所寫的論述中, 哪個部分是最重要的, 或是哪個部分是最想要強調或突顯的, 那就放在前面。

的重要性,

3.7 數學寫作需要注意的事情

這個單元想要再綜整一些在進行寫作時需要注意的事情,

- 數學寫作的形式由上到下、由左到右, 不要東一塊西一塊雜亂無章。因為數字論述帶有著邏輯, 而邏輯又特別著重前因後果, 若沒有照著大部分的人的順序寫的時候, 在別人眼中就很容易被誤判成你的論述有倒果為因或是邏輯不通的情況。

  在寫證明的時候, 難免會因為作答空間不夠

- 條列式有助於增加閱讀時的理解力。

(C) 很多符號都有共同的默契, 選用符號的時候盡可能和大眾的第一印象一致, 亂用符號會很容易造成困擾。以英文字母為例: a, b, c, d, e 是一些 i, j, k, l, m, n 是離散型的變數, 也常用做指標, f, g, h 會被用做函數, o, p, q 是點 r, s, t, u, v 一般說來, w, x, y, z 會是用做連續型的變數 (像是實數), 所以實數函數會寫 $y = f(x)$, $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 之間的映射會寫 $F(x, y) = (z(x, y), w(x, y))$。

(K) 數學的論述所使用的人稱幾乎都是以「我們」(以英文來說會是 we 或 us) 的方式貫穿文章。寫出一個數學論述, 不外乎是希望能夠讓別人知道你的想法, 而非自言自語, 若文章的主詞通篇都是以「我」串接, 這種感覺就會顯得很孤獨, 甚至有一種自大的感覺; 若文章的主詞有「你」或「你們」的字眼時, 這種帶有強烈的命令感更讓人生得不舒服。於是, 用「我們」寫文章的時候, 帶了親切感, 也有一種想要讓大家都了解這個定理證明的感覺。

(L) 證明時避免寫下簡記的代號。很多人可能基於有一點偷懶的心態, 就會想要把很多字都用簡記的代號, 但是這些代號對其他人來說是知道的嗎? 學過微積分的人大概會知道 MVT 是均值定理 (Mean Value Theorem) 的縮寫, 這個縮寫的接受度應該是比較高, 可是有寫人會走火入魔地寫出 FTOC, IBP, CCC, 這種可怕的代號, 就算是你已經修過微積分與高等微積分課程, 我不認為你有辦法馬上就意識到這些簡記分別代表的是微積分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus)、分部積分 (Integration by Parts) 以及柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion)。

    在教學的課堂中, 你可能會看到某些簡寫的符號出現, 但同樣地, 這只是簡便起見, 在正式的論述中應避免出現。例如: 不失一般性 (without loss of generality) 會被簡記為 W.L.O.G., 以下敘述彼此等價 (the following are equivalent) 會被簡記為 T.F.A.E, 左式 (left hand side) 會被簡記為 LHS, 而右式 (left hand side) 會被簡記為 RHS, 高階項 (higher order term) 會被簡記為 H.O.T., 使得 (such that) 會被簡記為 s.t.。甚至, 在正式的文章中, 邏輯的符號 $\forall, \exists$ 也不會出現, 都是直接以文字 for all 與 there exists 串起前後文。

    其實相較於簡寫, 和把全名全部拼出來真的也差不了幾秒的時間, 但是多花幾秒鐘好好地呈現, 讓閱讀者一目了然更容易從你的表達了解整個論述過程, 整個文章也是大大地加分。

宣稱的部分畫底線, 並註明「欲證」或是英文「Claim:」

符號的默契

有些符號已經被公認了, 不要亂使用

一個論述證明完畢, 就 clear

因果關係的明確

前提沒有的東西不能亂加

不要都只是符號

連接詞與串接的重要性

第一次出現的符號必須加以說明

計算題不要都只是算式

證明題

盡量避免簡寫 MVT FTOC

正確引用定理, 不是引用編號

正式文件中不會出現邏輯符號

書本編排與紙張書寫的差異

等號

第三人稱

3.8 如何提升數學能力

各位日後看到一個定理敘述會是愈來愈複雜的形式, 不太可能像前面的例子一樣以一行文的方式呈現; 也就是說, 定理也可能是基於很多個假設之下才得到的結果。這裡我們複習在單元 3.2 曾經提過的無窮級數理論進行說明。

例 **1.** 若一個無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

這個例子是無窮級數理論中在很前面就會介紹的定理, 因為它的證明很容易, 透過定義的方式進行直接論述。

證明: 若無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 記級數和為 $S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$, 於是

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S - S = 0。$$

□

而這個例子經過「若 P 則 Q」與「非 Q 則非 P」的等價轉換後, 就變成了級數理論中很常用的發散判別法 (Test of Divergence):

定理 **2** (發散判別法, Test of Divergence)**.** 若有一個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 或是 $\lim_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, 則無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

例 **3.** 考慮一個無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > 0$, 數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 且級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$。

這個命題的結構是「若 P_1, P_2, P_3 為真, 則 Q 為真」, 其中

- 命題 P_1 是「對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n > 0$」。
- 命題 P_2 是「數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減」; 即對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_n \geq a_{n+1}$。
- 命題 P_3 是「級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂」。
- 命題 Q 是「$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0$」。

在這個命題證明為真之後, 隨之而來可以進行很多討論。首先, 記命題 P 表示 $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$, 所以上面的命題可表示為「若 P 則 Q」的形式, 因為它和「非 Q 則非 P」邏輯上等價, 根據迪摩根律 (De Morgan's laws, 詳見第 1 章單元 1.2 的 定理 **6**), $\sim P$ 表示 $\sim(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \Leftrightarrow \sim P_1 \vee \sim P_2 \vee \sim P_3$, 於是

(A)

以下還想再介紹一個微分幾何上的定理, 稱為四頂點定理 (Four-vertex Theorem), 以此搭配邏輯語言而得到一些值得注意的事。為介紹四頂點定理

定義 4. 一條正則平面曲線 $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ 的 *頂點* (vertex) 是指滿足 $\kappa'(t) = 0$ 的點。

定理 5. 簡單封閉曲線至少有四個頂點。