2

公理化的集合論

這一章要介紹的是公理化的集合論。自十九世紀德國數學家康托 (Georg Cantor, 1845–1918) 的一個遠大理想, 認為數學都可以利用集合的語言完全表達它, 當時他的一些原創性想法拓展了我們對於無窮與無限的認識, 看似集合論就要完成偉大的創舉時, 同時期英國哲學家伯特蘭・羅素 (Bertrand Russell, 1872–1970) 提出了一個在集合論中的致命問題 (羅素悖論), 這項衝擊讓那些對集合論有著崇高信仰的數學家感到極為不安, 為此便努力設法彌補其缺失。經過一段時間的努力, 現今我們使用的集合論稱為公理化的集合論, 也就是要基於一些前提下才可以合法使用集合的語言以及運算系統。這部分的歷史故事以及羅素悖論的探討, 包括在此之前會先提另一個較為平易近人的理髮師悖論的討論, 將會在單元 2.1 說明。

公理化集合論至今被稱為 ZFC 公理化集合論 (ZFC axiomatic set theory), 是由恩斯特・策梅洛 (Ernst Zermelo, 1871–1953) 以及亞伯拉罕・弗蘭克爾 (Abraham Fraenkel, 1891–1965) 所設定的十條集合論公理為名, 其中第十個公理稱為選擇公理 (Axiom of Choice), 即 ZFC 中 C 的意思, 它是目前多數人可接受的一項公理, 若不接受選擇公理的集合論會被稱為 ZF 公理化集合論。有關集合論公理的敘述還有相關的討論將在單元 2.2 介紹, 而這個單元的編排是先列出把十條公理, 之後再逐一補充每個公理的特性, 因為每一個公理都用邏輯語句呈現, 故能看得出集合論的公理與數理邏輯之間有著緊密關係。

單元 2.3 將討論集合的運算與性質, 包括集合的聯集、交集、差集、補集等。講義中所列的性質可以說都是基礎的討論, 和各位在過往曾學過集合的討論是一致的, 所以這裡只是綜整出一些常用的結果, 而大家也可藉此複習之。實際上集合的運算還有更多豐富的結果, 在學會這些基礎的集合論證後, 日後各位就可以繼續探索並自行證明之。

單元 2.4 要介紹的是指標族, 這部分的目的是為了是要處理無窮多個集合的運算的問題, 這裡的無窮多個集合我們考慮兩種意義, 一種是可數無窮另一種是不可數無窮, 透過集合與自然數 $\mathbb{N}$ 或是實數集 $\mathbb{R}$ 或是它們的子集合給出想要討論的集合一種標記, 然後就可以探討論一個集合族之間的運算。牽涉到無限多個集合的運算問題, 處理的手法就會依賴量詞進行邏輯上的論述。在一些進階的數學內容中有時會遇到要處理無限多個集合的運算問題, 此處我們會給出幾個基本性質, 並且用一些例子示範如何操作。

這裡或許註記一件事: 各位在公理化集合論的公理中, 特別是無窮公理的部分, 會隱約地看到自然數的結構, 我們會在之後的章節從這個觀點切入自然數系 (natural number system) 的討論。

2.1 從理髮師悖論到羅素悖論

這個單元主要是向各位介紹羅素悖論 (Russell's paradox), 但是在說明這個悖論之前, 這裡想先提一個和它相關而敘述上較為平易近人的版本, 稱為理髮師悖論 (Barber paradox), 從理髮師悖論的故事中我們應該比較能夠感受到悖論帶來的衝擊。

理髮師悖論是伯特蘭・羅素 (Bertrand Russell, 1872–1970) 在 1901 年提出, 故事如下:

> 有一座小鎮, 鎮裡有一位理髮師, 有一天, 這位理髮師在他營業的理髮廳外貼了一個公告:
> 「我要為而且只為這座小鎮裡不為自己刮鬍子的人刮鬍子」。

在理髮師張貼公告後的不久就陷入了一道難題:「我該為自己刮鬍子嗎?」如果他為自己刮鬍子, 那麼照他的公告「我只為這座小鎮裡不為自己刮鬍子的人刮鬍子」, 那麼他就不應該為自己刮鬍子; 如果他不為自己刮鬍子, 那麼照他的公告「我要為這座小鎮裡不為自己刮鬍子的人刮鬍子」, 那麼他必須為自己刮鬍子。

這位理髮師不論刮或不刮, 都完全打臉自己所說的話。在數學上, 對於一個數學論述, 如果先假設它是真的, 經過一連串正確的推理後推出它是假的; 如果假設它是假的, 經過一連串正確的推理後卻又得到它是真的, 這樣的數學論述我們稱為 *悖論* (paradox)。一個數學理論中若有悖論的出現, 這對數學家來說是倍感焦慮的, 因為一個好的數學理論應該要自成系統並且不會自相矛盾, 而悖論則是說明這個數學理論有一些完全矛盾的情節, 也意味著這個數學系統當中存在著一些根本的問題必須加以澄清, 否則日後將會引出更大的麻煩。

現在要開始介紹羅素悖論, 為什麼在這個地方會突然提到羅素悖論呢? 這是因為羅素悖論的出現大大動搖了在那個年代有一群數學家認為數學上的所有事物都可以用集合的語言完全表示的這個想法, 以下內容要說明羅素悖論到底如何帶給集合論這個巨大的衝擊。說到集合論 (set theory), 創立始祖是康托 (Georg Cantor, 1845–1918), 他是一位德國數學家, 他對於集合的一些大膽使用替數學開創了一個新局, 和康托同一時期有另一位數學家叫做戈特洛布・弗雷格 (Gottlob Frege, 1848–1925), 他是幫康托的集合論發揚光大的一個重要推手。

當初康托在構思集合論的時候, 想法非常單純, 就如各位在中學數學時期老師可能會利用以下的「話術」告訴你什麼是集合: 所謂的 *集合* (set) 就是把一些想要研究的數學物件收集起來, 而在集合內的數學物件稱之為 *元素* (element), 我們利用屬於 $\in$ 這個符號以判斷元素是否落在集合內。除此以外, 各位對於下面這句話應該覺得很自然, 沒有什麼爭議之處:

> 對任意的性質 ψ, 存在集合 $X = \{x|\psi(x)\}$; 也就是說, 我們可以考慮把具有想要討論的性質 ψ 的元素收集起來形成集合。 $(\star)$

於是集合論在這樣的說詞底下開始介紹集合的運算規則, 只要操作得順利, 之間好像沒有什麼異狀產生, 相安無事之下, 也就覺得集合論似乎沒什麼了不起。

正當康托還有弗雷格所建立的集合論已經進展到非常發光發熱的階段時, 羅素竟然跳出來重重地打臉他們, 羅素在 1902 年 6 月寫了一封信給弗雷格, 信中提及了以下的悖論, 也就是現今大家所說的羅素悖論:

考慮 ψ 這個性質是「不屬於自己的集合」; 也就是說 $\psi(x) =$ “x 是集合, 而且 $x \notin x$。”

根據 $(\star)$, 我們知道 $R = \{x|\psi(x)\}$ 是一個集合; 也就是說, R 是將所有不屬於自身的集合收集而成的集合。

以下討論就是羅素的經典論證: 因為 R 是一個集合, 現觀察以下兩個情形:

- 如果 R 屬於 R, 那麼根據定義, R 必須滿足 ψ 這個性質, 即 R 不屬於 R。

- 如果 R 不屬於 R, 那麼 R 就不會滿足 ψ 這個性質, 即 R 屬於 R。

無論如何都會產生矛盾。

羅素悖論對於集合論帶來的衝擊是: 我們不能很天真地去說隨便一個滿足某種性質的數學物件收集起來就說它是集合; 也就是說, 在上述的討論中, R 不是一個「集合」。事實上, 集合的定義是需要受到一些規範的。也因為這個原因, 在當時那些支持康托集合論的數學家自羅素悖論的提出之後就開始努力設法幫這個集合論的缺失補起來。

到底怎樣的性質收集起來才能稱為集合? 怎麼樣的收集不能稱為一個集合? 這是一個極度困難的問題, 困難之處在於: 我們必須寫出一個非常一般的敘述以排除掉某些情況, 如果寫出來的條件過於強烈的話, 這將導致集合論變得無用武之而無法展現它的厲害之處。數學家們經過多年的努力, 從最先提出了某些觀點, 在經過討論與辨正, 不斷地修正、替換並添加或刪除一些想法才演變成現在的集合論。現今所使用的集合論我們稱為 公理化集合論 (axiomatic set theory), 與此相對照, 當初康托所建立的集合論我們把它稱為 樸素集合論 (naive set theory)。至於公理化集合論的意義以及它的一些歷史典故, 我們留到下一個單元再仔細說明。

故事說到這裡, 我認為有些讀者會對一些事情感到疑惑: 當講義不說這段故事, 又或者自己如果對數學史不那麼感興趣的話也根本不知道這段故事, 又或者說, 以前老師介紹集合論講得好像很簡單的樣子然後我就全盤接受, 當然自己並沒有像羅素一樣那麼厲害, 壓根也想不到會有這種悖論, 那麼我怎麼知道我以前的某個場合是不是「非法地」使用了集合論呢? 甚至, 難到日後當我要用集合論處理數學問題的時候, 就真的要小心翼翼到不能像以前那樣很自然地操作集合嗎?

針對這個問題, 其實各位不必過於擔心, 若你一直以來都是在面對中學數學問題的話, 那麼基本上不會產生任何問題, 我想這也是中學數學老師當初採用一些「話術」介紹集合論讓你在初學的時候感到安心的一個原因。只是這門課是數學導論, 它是從中學數學進階到高等數學之間的一門銜接課程, 我認為大家在畢業之前有必要知道這一段故事, 甚至透過下一個單元清楚認識公理化集合論的每一個條文, 以強化你對高等數學的認識。

從歷史的角度認識我們現在所學的數學, 藉此體會數學 (不論是古典數學到近代數學, 又或者是初等數學到高等數學) 其實是一門不簡單的學問, 並且知道我們現在的數學是站在非常多巨人的肩膀上看事情, 而且他們已經替數學上曾經遇到的重大困難披荊斬棘, 把大部分的問題都得到了一個合理且完整的解釋。

當然現今數學上還留有許多懸而未解的問題尚待澄清, 隨著時間的演進發展出愈來愈多的理論與新觀點, 這都有助於那些還不清楚的問題有著大大小小的突破, 從樂觀一點的方式去想它, 這都是在幫數學向前進步的好事。

2.2 公理化的集合論

一個數學理論必須建立在一些不需要被證明的命題當作出發點然後才進行數學推演, 這些初始的命題稱為 公理 或 公設 (axiom)。

在數學的發展中, 選取哪些命題成為一個數學理論的公理是需要長時間的思索才會有共識。一般來說, 愈直觀或是愈自然的命題也就愈容易凝聚共識而被列入公理中, 因為公理是不需要被證明的, 所以透過直觀而自然的方式容易使大家都可以接受這個前提。若有人無法接受這樣的公理, 想要用別的命題替換它, 那麼就可能引發出新的理論。

關於公理化的數學, 一個最經典的例子是歐幾里得幾何 (Euclidean Geometry), 當初歐幾里得在他的著作幾何原本 (Elements) 中先設立了五個公設, 由此創立了平面幾何。然而, 關於第五公設 — 平行公設 — 並不像其它四個公設的敘述那麼顯然, 曾經有一時期的數學家努力研究第五公設是否可以被其它四個公設證明, 假如可以的話, 那麼我們就可以將平行公設去除。直到十九世紀, 羅巴切夫斯基 (Nikolai Lobachevsky, 1792–1856) 開始轉變思維, 從不接受第五公設的角度出發, 也就是「經過直線外已知一點至少可以作兩條直線和已知直線不相交」為基礎, 由此開啟了非歐幾何的世界。

我們並不是隨便把想到或是不想證的敘述通通都放進公理, 公理之間有相容性 (compatibility) 的問題必須處理; 也就是說, 公理中的任兩個敘述必須彼此獨立, 誰也不能被其它的敘述推論出來, 如果有這個情況產生, 那麼這個被推出來的敘述就不需要放到公理中。當然公理中的敘述也不能有互相矛盾的情況產生, 否則理論將變得完全沒意義。

這個單元要介紹的公理化集合論, 主要是彌補我們對於集合原本認為它可以包山包海囊括所有事物的天真想法下而得的理論, 因為羅素悖論的出現, 我們不得不規範所要討論的事物, 於是我們必須對集合設立一些公理, 在這樣的基礎下繼續討論數學才不致產生怪異現象。數學家經過長時間的思索, 到底要把那些事情設定成公理經過不斷地斟酌, 至今所使用的公理化集合論我們稱為 ZFC 公理化集合論 (ZFC axiomatic set theory), 其中 Z 是指恩斯特 · 策梅洛 (Ernst Zermelo, 1871–1953) 的姓氏字首, 而 F 是指亞伯拉罕 · 弗蘭克爾 (Abraham Fraenkel, 1891–1965) 的姓氏字首, 至於 C 則是公理化集合論中帶有選擇公理 (Axiom of Choice)。帶有選擇公理的集合論是現今多數人可認同的系統, 然而也有一些人不願接受選擇公理一事, 那麼他們就會先行宣告所使用的系統是 ZF 公理化集合論 (ZF axiomatic set theory)。

以下將給出 ZFC 公理化集合論當中的每一個公理。首先我們把所有的公理敘述列出來, 然後再逐一解釋每個公理的意義。

所謂 ZFC 公理化集合論是由以下十個敘述視為公理而產生出的一門數學理論:

公理 (存在公理, Axiom of existence)**.** 存在一個集合。

$$\exists x(x = x)。$$

公理 (外延公理, Axiom of extensionality)**.** 兩個具有相同元素的集合相等。

$$\forall X\ \forall Y\ \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y。$$

公理 (分離公理, Axiom of schema of separation). 令 $\varphi(u)$ 是一個性質, 對任意集合 X, 存在一個集合 $Y=\{u\in X|\varphi(u)\}$。

$$\forall X\ \exists Y\ \forall u(u\in Y\leftrightarrow u\in X\wedge\varphi(u))。$$

公理 (組對公理, Axiom of pairing). 對任意 a 和 b, 存在一個集合只以 a,b 為元素。

$$\forall a\ \forall b\ \exists c\ \forall x(x\in c\leftrightarrow x=a\vee x=b)。$$

公理 (聯集公理, Axiom of union). 對任意集合 X, 存在集合 Y 滿足: $u\in Y$ 若且唯若存在 $z\in X$ 使得 $u\in z$。

$$\forall X\ \exists Y\ \forall u(u\in Y\leftrightarrow\exists z\ (z\in X\wedge u\in z))。$$

公理 (冪集公理, Axiom of power set). 對任意集合 X, 存在集合 Y 滿足 $u\in Y$ 若且唯若 $u\subset X$。

$$\forall X\ \exists Y\ \forall u(u\in Y\leftrightarrow u\subset X)。$$

公理 (無窮公理, Axiom of infinity). 存在集合 X 使得 $\emptyset\in X$, 並且對任意 $x\in X$, x 的後繼 $S(x)$ 也屬於 X。

$$\exists X[\emptyset\in X\wedge\forall x(x\in X\to S(x)\in X)]。$$

公理 (正則公理, Axiom of regularity). 對任意集合 $x\neq\emptyset$, 存在 $y\in x$ 使得 $y\cap x=\emptyset$。

$$\forall x(x\neq\emptyset\to\exists y(y\in x\wedge x\cap y=\emptyset))。$$

公理 (替換公理, Axiom of replacement). 給定性質 $\psi(x,y)$, 並且對任意 x, 都有唯一的 y 使得 $\psi(x,y)$ 成立。則對任意集合 A, 以下集合存在:

$$B=\{y|\exists x(x\in A\wedge\psi(x,y))\}。$$

若以邏輯符號表示的話則為

$$\forall A\ \forall x\in A\ \exists!y\ \psi(x,y)\to\exists B\ \forall x\in A\ \exists y\in B\ \psi(x,y)。$$

公理 (選擇公理, Axiom of choice). 對任意集合 $X\neq\emptyset$, 如果它滿足

(1) $\emptyset\notin X$,

(2) X 中的元素是兩兩不相交的; 也就是說, 如果 $x,y\in X$ 並且 $x\neq y$, 則 $x\cap y=\emptyset$,

則存在集合 S, 對任意 $x\in X$, 則 $S\cap x=\{a\}$ 是單點集。

$$\forall X[\emptyset\notin X\wedge\forall x\in X\ \forall y\in X(x\cap y=\emptyset)\to\exists S\ \forall x\in X\ \exists!y(S\cap x=\{a\})]。$$

在看過這十個公理之後, 接下來將逐一解釋每一個公理代表的意義與重要性。

(1) 存在公理 (Axiom of existence) 的意義在告訴我們所遵循的數理邏輯必須是言之有物的, 不能是虛無的, 這個系統中至少有一個可以討論的事物。

(2) 外延公理 (Axiom of extensionality) 是要介定清楚集合相等的意思; 也就是說, 外延公理表明集合是由其中的元素決定。

關於外延公理的幾個補充說明如下: (A) 會把這個公理稱為「外延」, 意味著一個集合完全由它所含的元素確定, 與這些元素的由來或是數學對象無關。(B) 外延公理不僅提出兩集合相等這個概念的存在性, 也告知相等集合的唯一性; 也就是說, 當我們確定兩個集合中的元素都一樣的話, 那麼這兩個集合應看成是一樣的集合。(C) 給定兩集合 X, Y, 集合的相等會用 $X = Y$ 表示, 以外延公理來說, $X = Y$ 的意思是: 對所有 $x \in X$ 都有 $x \in Y$, 而且對所有 $x \in Y$ 都有 $x \in X$。(D) 由外延公理可推論出集合相等的遞移性: 若有三個集合 X, Y, Z 滿足 $X = Y$ 且 $Y = Z$, 則 $X = Z$。

(3) 分離公理 (Axiom of schema of separation) 可以將它理解為非常重要的子集合公理, 因為我們可以從一個集合當中, 透過性質 φ 將集合 X 中滿足性質 φ 的元素抽離出來而形成一個集合; 也就是說, 我們可以將一個給定的集合按照某個限制劃出部分的集合。

分離公理的另一個重要性在於: 在公理化的集合論中羅素悖論並不會出現。在進行這個討論之前, 我們要先想清楚分離公理 $Y = \{u \in X|\varphi(u)\}$ 還有羅素悖論中所考慮的 $R = \{x|\psi(x)\}$ 兩者之差異, 注意到兩者最大的差別在於: 分離公理是要先給出集合 X 之後, 然後 $\varphi(u)$ 是對於 X 裡的元素進行特定性質的元素選取, 而羅素悖論中所提及的 R 沒有。於是, 從公理化的集合論來說, $R = \{x|\psi(x)\}$ 是否構成一個「集合」並不清楚, 至少我們無法從分離公理得知這是一個集合。

以下要討論的是: 若我們是在一個指定的集合 X 中重新探討羅素悖論的論述, 則不會產生矛盾 (悖論)。考慮 $R_X = \{x \in X|\psi(x)\}$, 由分離公理得知: R_X 是一個集合。這時, 會有 $R_X \notin R_X$ 或是 $R_X \in R_X$ 兩種情況, 如果 $R_X \in R_X$, 則必有 $R_X \in X$ 且 $R_X \notin R_X$ 矛盾, 所以只有 $R_X \notin R_X$ 成立, 但此時, $R_X \notin R_X$ 不再導致矛盾, 因為它蘊涵著 $R_X \notin X$; 也就是說, 我們不能從 $R_X \notin R_X$ 推論出 $R_X \in R_X$ 這個矛盾。

定義 **1.** 考慮 $\{x|x \neq x\}$, 它是一個集合, 根據外延公理, 它是唯一的, 稱為 *空集合* (empty set), 記為 $\emptyset$。

定義 **2.** 令 $\varphi(u)$ 是一個性質, 則 $\{u|\varphi(u)\}$ 不一定是一個集合, 這樣的對象稱之為 *類* (class)。特別地, 不是集合的類稱為 *真類* (proper class)。

(4) 組對公理 (Axiom of pairing) 欲說明的是: 給定兩個集合, 則它們可視為一個新集合裡的元素; 也就是說, 組對公理是一個約定, 兩個集合放在一起就可以形成一個新的集合。由此, 根據外延公理, 組對公理所產生的集合 c 是唯一的, 我們把它表示為 $\{a, b\}$。此外, 由組對公理也可知 $\{a\} = \{a, a\}$ 是一個集合。

(5) 從分離公理可引出集合的交集與差集, 而聯集的部分則需要聯集公理 (Axiom of union) 陳述。

定義 3. 如果 X 的元素都是 Y 的元素, 則稱 X 是 Y 的 子集 (subset of Y), 記為 $X \subset Y$。如果 $X \subset Y$ 並且 $X \neq Y$, 則稱 X 是 Y 的 眞子集 (proper subset of Y), 記為 $X \subsetneq Y$。

(6) 冪集公理 (Axiom of of power set) 是在說: 我們承認把一個集合的子集合全部收集起來也會形成一個集合。

(7) 這裡我們回顧一下前面所列的公理, 除了存在公理和外延公理外, 其它的公理都是以「如果 X 是集合, 則存在集合 Y......」的形式出現; 也就是說, 由已知的集合構造新的集合。所以這些公理有時也稱為構造性公理。

現觀察以下事情: 由存在公理與外延公理得知 $\emptyset$ 是一個集合, 再由組對公理可知

$$\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\ldots$$

也都是集合。現將這些集合分別用記號 $0,1,2,3,\ldots$ 表示。現在的問題是: $\{0,1,2,3,\ldots\}$ 是不是一個集合呢? 要保證它是一個集合, 我們需要設立新的公理。為此, 我們先給一個定義:

定義 4. 對任意集合 x, 集合 $x\cup\{x\}$ 稱為 x 的 後繼 (successor), 一般記為 $S(x)$ 或者是 x^*。

於是無窮公理 (Axiom of infinity) 則是約定 $\{0,1,2,3,\ldots\}$ 是一個集合。

(8) 之前的公理都是構造性或存在性, 也就是斷定某個集合存在, 或是由已知的集合造新的集合。而正則公理 (Axiom of regularity) 卻是否定性的, 它是說某些類不是集合。

正則公理的一個直接推論是:

定理 5. 任意集合都不屬於自身。

證明: 假設存在集合 $x\in x$, 令 $\mathcal{I}=\{x\}$, 則對 $\mathcal{I}$ 的任意元素, 事實上 $\mathcal{I}$ 只有一個元素 x, 都有 $x\cap\mathcal{I}=x\neq\emptyset$, 這與正則公理相互矛盾。故任意集合都不屬於自身。 □

(9) 首先注意到對每一個公式 ψ, 都有一個相應的替換公理 (Axiom of replacement), 因此替換公理模式代表了無窮多條公理。其次, 公式 $\forall x\in A\ \exists! y\ \psi(x,y)$ 實際上是說 ψ 表示的性質是一個函數; 也就是說, 替換公理的意思是指任何集合在一個函數下的像 (image) 仍然是一個集合。

(10) 選擇公理 (Axiom of choice) 欲說明的是 X 的選擇集 S 是存在的, 但它並不唯一。

這一個單元主要是介紹公理化的集合論, 各位或許對這部分的內容感到非常深奧, 但我覺得各位不必對此過於擔心, 這裡會把公理化集合論列出來是想讓各位知道數學的發展歷史, 數學理論的形式並不是從頭到尾都是很順利地產生, 而是在一些波折中不斷地讓數學理論變得更完善。

另一方面, 其實公理化的集合論中已隱藏著自然數集的系統, 之後的章節我們會對自然數的結構再仔細介紹。

2.3 集合的性質與運算

前一個單元我們知道現今數學上的集合論採用的是 ZFC 公理化集合論, 也就是我們承認透過這些公理可以合法地收集一些數學物件而形成集合, 然後有些太奇怪的性質收集起來不把它稱為集合, 而被稱為真類 (proper class)。

關於集合, 有幾個基本的事實需要先行確認。

定理 1 (第 42, 43 頁)**.**

(A) 令 A 是一個集合, 則 $\emptyset \subset A$ 以及 $A \subset A$。

(B) 任何非空集合必至少有兩個子集合。

(C) 令 A, B, C 是集合, 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$, 則 $A \subset C$。

證明:

(A) 若 $x \in \emptyset$, 則 $x \in A$ 命題為真, 於是 $\emptyset \subset A$。若 $x \in A$, 則 $x \in A$, 所以 $A \subset A$。

(B) 由 (A) 知: 若 $A \neq \emptyset$, 則 A 至少有兩個子集合, 一個是 $\emptyset$, 另一個是 A。

(C) 若 $A = \emptyset$, 由 (A) 知 $A \subset C$ 成立。若 $A \neq \emptyset$, 令 $x \in A$, 因為 $A \subset B$, 所以 $x \in B$, 因為 $B \subset C$, 所以 $x \in C$, 因此 $A \subset C$。

□

當我們確定要討論的內容形成一個集合時, 才可以對它們進行一些操作, 這裡先給出幾個常見的集合操作。

定義 2 (第 46 頁)**.** 給定集合 A 與集合 B,

(A) 集合 A 與集合 B 的 *聯集* (union of A and B) 是將屬於 A 或屬於 B 的所有元素收集而成的集合, 記為 $A \cup B$; 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}。$$

(B) 集合 A 與集合 B 的 *交集* (intersection of A and B) 是將屬於 A 而且屬於 B 的所有元素收集而成的集合, 記為 $A \cap B$; 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}。$$

(C) 集合 A 在集合 B 中的 *差集* (complement of A relative to B) 是指在集合 B 內但不在集合 A 內的元素所成的集合, 記為 $B - A$; 即

$$B - A = \{x | x \in B \text{ 且 } x \notin A\}。$$

(D) 若 U 是宇集合 (universal set), 集合 A 是 U 的一個子集, 集合 A 的 *補集* (complement of A) 是在 U 當中又不在集合 A 裡的元素收集而成的集合, 記為 A^c; 即

$$A^c = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}。$$

文氏圖 (Venn diagram) 是一個幫助我們快速理解集合關係的圖像化表示, 這是由英國數學家約翰·維恩 (John Venn, 1834–1923) 在 1881 年提出此觀點。

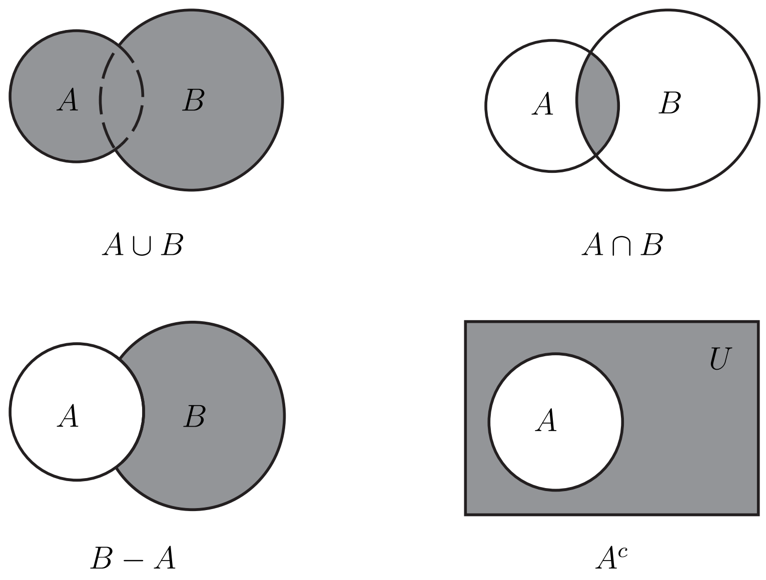

圖 2.1: 以文氏圖的方式理解集合的聯集、交集、差集與補集。

這裡先給出有關集合運算的基本性質:

引理 **3** (第 48 頁)**.** 關於集合的聯集與交集運算有以下基本性質*:*

	聯集	交集
(A)	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
(B)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
(C)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
(D)	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
(E)	$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$	$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$
(F)	若 $A \subset B$, 則 $(A \cup C) \subset (B \cup C)$。	若 $A \subset B$, 則 $(A \cap C) \subset (B \cap C)$。
(G)	$(A \subset C \wedge B \subset C) \Leftrightarrow (A \cup B) \subset C$	$(C \subset A \wedge C \subset B) \Leftrightarrow C \subset (A \cap B)$
(H)	若 $A \subset B$, 則 $A \cup B = B$。	若 $A \subset B$, 則 $A \cap B = A$。

證明:

(A1) 若 $x \in A \cup A$, 則 $x \in A$ 或是 $x \in A$, 這兩種情況都表示 $x \in A$, 所以 $A \cup A \subset A$。若 $x \in A$, 則 $x \in A$ 或 $x \in A$, 得到 $x \in A \cup A$, 所以 $A \subset A \cup A$。由上述討論得知 $A \cup A = A$。

(A2) 若 $x \in A \cap A$, 則 $x \in A$ 且 $x \in A$, 兩者都代表 $x \in A$, 所以 $A \cap A \subset A$。若 $x \in A$, 則 $x \in A$ 且 $x \in A$, 這件事表示 $x \in A \cap A$, 故 $A \subset A \cap A$。由上討論得知 $A \cap A = A$。

(B1) 若 $x \in A \cup B$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B$, 這也表示 $x \in B$ 或 $x \in A$, 即 $x \in B \cup A$, 所以 $A \cup B \subset B \cup A$。若 $x \in B \cup A$, 則 $x \in B$ 或 $x \in A$, 這也表示 $x \in A$ 或 $x \in B$, 即 $x \in A \cup B$, 所以 $B \cup A \subset A \cup B$。因此 $A \cup B = B \cup A$。

(B2) 若 $x \in A\cap B$, 則 $x \in A$ 且 $x \in B$, 這也表示 $x \in B$ 且 $x \in A$, 即 $x \in B\cap A$, 所以 $A\cap B \subset B\cap A$。若 $x \in B\cap A$, 則 $x \in B$ 且 $x \in A$, 這也表示 $x \in A$ 且 $x \in B$, 即 $x \in A\cap B$, 所以 $B\cap A \subset A\cap B$。因此 $A\cap B = B\cap A$。

(C1) 若 $x \in A\cup(B\cup C)$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B\cup C$, 得到 $x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C$, 由 $x \in A$ 或 $x \in B$ 得知 $x \in A\cup B$, 而 $x \in A\cup B$ 或 $x \in C$ 可得 $x \in (A\cup B)\cup C$, 所以 $A\cup(B\cup C) \subset (A\cup B)\cup C$。若 $x \in (A\cup B)\cup C$, 則 $x \in (A\cup B)$ 或 $x \in C$, 得到 $x \in A$ 或 $x \in B$ 或 $x \in C$, 由 $x \in B$ 或 $x \in C$ 得知 $x \in B\cup C$, 而 $x \in A$ 或 $x \in B\cup C$ 可得 $x \in A\cup(B\cup C)$, 所以 $(A\cup B)\cup C \subset A\cup(B\cup C)$。由上討論可知 $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$。

(C2) 若 $x \in A\cap(B\cap C)$, 則 $x \in A$ 且 $x \in B\cap C$, 得到 $x \in A$ 且 $x \in B$ 且 $x \in C$, 由 $x \in A$ 且 $x \in B$ 得知 $x \in A\cap B$, 而 $x \in A\cap B$ 且 $x \in C$ 可得 $x \in (A\cap B)\cap C$, 所以 $A\cap(B\cap C) \subset (A\cap B)\cap C$。若 $x \in (A\cap B)\cap C$, 則 $x \in (A\cap B)$ 且 $x \in C$, 得到 $x \in A$ 且 $x \in B$ 且 $x \in C$, 由 $x \in B$ 且 $x \in C$ 得知 $x \in B\cap C$, 而 $x \in A$ 且 $x \in B\cap C$ 可得 $x \in A\cap(B\cap C)$, 所以 $(A\cap B)\cap C \subset A\cap(B\cap C)$。由上討論可知 $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$。

(D1) 若 $x \in A\cup\emptyset$, 則 $x \in A$ 或 $x \in \emptyset$, 因為 $x \in \emptyset$ 不成立, 所以 $x \in A$, 於是 $A\cup\emptyset \subset A$。若 $x \in A$, 則 $x \in A$ 或 $x \in \emptyset$, 即 $x \in A\cup\emptyset$, 於是 $A \subset A\cup\emptyset$。因此 $A\cup\emptyset = A$。

(D2) 若 $x \in A\cap\emptyset$, 則 $x \in A$ 且 $x \in \emptyset$, 因為 $x \in \emptyset$ 命題為假, 故由 $x \in A\cap\emptyset$ 推得 $x \in \emptyset$ 之命題為真, 即 $A\cap\emptyset \subset \emptyset$。另一方面, 若 $x \in \emptyset$ 命題為假, 故由 $x \in \emptyset$ 推得 $x \in A\cap\emptyset$ 之命題為真, 即 $\emptyset \subset A\cap\emptyset$。由上討論得知 $A\cap\emptyset = \emptyset$。

(E1) 若 $x \in A$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B$, 即 $x \in A\cup B$, 因此 $A \subset A\cup B$。若 $x \in B$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B$, 即 $x \in A\cup B$, 因此 $B \subset A\cup B$。

(E2) 若 $x \in A\cap B$, 則 $x \in A$ 且 $x \in B$, 得到 $x \in A$, 因此 $A\cap B \subset A$。若 $x \in A\cap B$, 則 $x \in A$ 且 $x \in B$, 得到 $x \in B$, 因此 $A\cap B \subset B$。

(F1) 若 $x \in A\cup C$, 則 $x \in A$ 或 $x \in C$, 因為 $A \subset B$, 所以由 $x \in A$ 可得 $x \in B$, 於是 $x \in B\cup C$。因此 $A\cup C \subset B\cup C$。

(F2) 若 $x \in A\cap C$, 則 $x \in A$ 且 $x \in C$, 因為 $A \subset B$, 所以由 $x \in A$ 可得 $x \in B$, 於是 $x \in B\cap C$。因此 $A\cap C \subset B\cap C$。

(G1) ($\Rightarrow$) 若 $x \in A\cup B$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B$, 因為 $A \subset C$, 所以 $x \in C$, 因為 $B \subset C$, 所以 $x \in C$, 所以無論何種情況都有 $x \in C$, 於是 $(A\cup B) \subset C$。

($\Leftarrow$) 若 $x \in A$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B$, 因為 $(A\cup B) \subset C$, 所以 $x \in C$, 於是 $A \subset C$ 成立。若 $y \in B$, 則 $y \in A$ 或 $y \in B$, 因為 $(A\cup B) \subset C$, 所以 $y \in C$, 於是 $B \subset C$ 成立。因此 $A \subset C \wedge B \subset C$ 成立。

(G2) ($\Rightarrow$) 若 $x \in C$, 因為 $C \subset A$, 所以 $x \in A$, 因為 $C \subset B$, 所以 $x \in B$, 得到 $x \in A \cap B$, 因此 $C \subset (A \cap B)$。

($\Leftarrow$) 若 $x \in C$, 因為 $C \subset A \cap B$, 所以 $x \in A$ 且 $x \in B$, 得到 $C \subset A$ 且 $C \subset B$, 得到 $C \subset A \wedge C \subset B$ 成立。

(H1) 首先 $B \subset A \cup B$ 成立。若 $x \in A \cup B$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B$, 因為 $A \subset B$, 若 $x \in A$, 則 $x \in B$, 所以無論何種情況都告知 $x \in B$, 因此 $A \cup B \subset B$。因此 $A \cup B = B$。

(H2) 首先 $A \cap B \subset A$ 成立。若 $x \in A$, 因為 $A \subset B$, 所以 $x \in B$, 所以 $x \in A$ 與 $x \in B$ 同時成立, 即 $x \in A \cap B$, 得到 $A \subset A \cap B$。因此 $A \cap B = A$。

□

除了上述運算, 集合的聯集與交集之間有還有以下性質。

引理 4 (第 51 頁)**.** *關於集合的聯集與交集運算有以下性質:*

(A) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

(B) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

證明:

(A) 令 $x \in A \cap (B \cup C)$, 則 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 而後者表示 $x \in B$ 或是 $x \in C$, 於是 $x \in A$ 而且 $x \in B$ 表示 $x \in A \cap B$, 而 $x \in A$ 而且 $x \in C$ 表示 $x \in A \cap C$, 由此得到 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 即 $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

令 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 則 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$, 兩個情況都告知 $x \in A$ 必須成立。若 $x \in A \cap B$, 則 $x \in B \subset (B \cup C)$, 若 $x \in A \cap C$, 則 $x \in C \subset (B \cup C)$, 兩個情況都告知 $x \in B \cup C$ 必須成立。於是 $x \in A \cap (B \cup C)$, 因此 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$。

綜合上述討論, 我們得到 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$。

(B) 令 $x \in A \cup (B \cap C)$, 則 $x \in A$ 或 $x \in B \cap C$, 而後者表示 $x \in B$ 且 $x \in C$, 由 $x \in B$ 可知 $x \in A \cup B$, 由 $x \in C$ 可得 $x \in A \cup C$, 所以 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 因此 $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

若 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, 則 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$, 前者表示 $x \in A$ 或 $x \in B$, 後者表示 $x \in A$ 或 $x \in C$, 如果 $x \in A$, 則兩者皆成立; 如果 $x \notin A$, 那麼前者必須 $x \in B$, 後者必須 $x \in C$, 得到 $x \in B \cap C$, 於是 $x \in A \cup (B \cap C)$。因此 $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$。

綜合上述討論可得 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

□

關於集合的關係還有在數學上的論證, 現舉幾個例子說明, 各位之後應多嘗試練習幾個例子直到熟悉為止, 之後很多數學的論述都和集合的討論密切相關。

引理 **5** (第 49 頁)**.** 令 A, B 是兩個在宇集合 U 下的子集合, 試證以下集合關係*:*

(A) $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$。

(B) $(A^c)^c = A$。

(C) $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$。

(D) $A-B = A\cap B^c$。

(E) $A\subset B$ 若且唯若 $B^c\subset A^c$。

證明:

(A) 若 $x\in(A\cup B)^c$, 則 $x\in U$ 且 $x\notin A\cup B$, 因為 $x\notin A\cup B$ 表示 $x\notin A$ 且 $x\notin B$, 由 $x\in U$ 且 $x\notin A$ 得知 $x\in A^c$, 由 $x\in U$ 且 $x\notin B$ 得知 $x\in B^c$, 所以 $x\in A^c\cap B^c$, 得到 $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$。若 $x\in A^c\cap B^c$, 則 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$, 得到 $x\in U$ 且 $x\notin A$ 且 $x\in U$ 且 $x\notin B$, 由 $x\notin A$ 且 $x\notin B$ 得知 $x\notin A\cup B$, 由 $x\in U$ 且 $x\notin A\cup B$ 得知 $x\in(A\cup B)^c$, 因此 $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$。綜合上述討論得知 $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$。

(B) 令 $x\in(A^c)^c$, 則 $x\in U$ 且 $x\notin A^c$, 而 $x\notin A^c$ 告知 $x\in U$ 且 $x\in A$, 於是 $(A^c)^c\subset A$。若 $x\in A\subset U$ 而 $x\notin(A^c)^c$ 知 $x\in A^c$ 矛盾, 所以 $x\in(A^c)^c$, 得到 $A\subset(A^c)^c$。綜合上述討論得知 $(A^c)^c = A$。

(C) 若 $x\in(A\cap B)^c$, 則 $x\in U$ 且 $x\notin A\cap B$, 如果 $x\in A$, 由 $x\notin A\cap B$ 知 $x\notin B$, 得到 $x\in B^c$。如果 $x\in B$, 由 $x\notin A\cap B$ 知 $x\notin A$, 得到 $x\in A^c$。於是 $x\in A^c\cup B^c$, 得到 $(A\cap B)^c\subset A^c\cup B^c$。若 $x\in A^c\cup B^c$, 則 $x\in A^c$ 或 $x\in B^c$, 則 $x\in U$ 且 $x\notin A$ 或是 $x\in U$ 且 $x\notin B$, 由此知: 如果 $x\in A$ 則 $x\notin B$ 或是如果 $x\in B$, 則 $x\notin A$。假如 $x\notin(A\cap B)^c$, 則 $x\in U$ 且 $x\in A\cap B$ 矛盾, 所以 $x\in(A\cap B)^c$, 得到 $A^c\cap B^c\subset(A\cap B)^c$。綜上討論得知 $(A\cap B)^c\subset(A\cap B)^c$。

(D) 若 $x\in A-B$, 則 $x\in A$ 且 $x\notin B$, 而 $x\in A$ 表示 $x\in U$, 所以 $x\in U$ 且 $x\notin B$ 表示 $x\in B^c$, 由 $x\in A$ 且 $x\in B^c$ 表示 $x\in A\cap B^c$, 於是 $A-B\subset A\cap B^c$。若 $x\in A\cap B^c$, 則 $x\in A$ 且 $x\in B^c$, 後者表示 $x\in U$ 且 $x\notin B$, 所以由 $x\in A$ 且 $x\notin B$ 得知 $x\in A-B$, 於是 $A\cap B^c\subset A-B$。綜上討論得知 $A-B = A\cap B^c$。

(E) $(\Rightarrow)$ 令 $x\in B^c$, 則 $x\in U$ 且 $x\notin B$, 因為 $A\subset B$ 而且 $x\notin B$, 所以 $x\notin A$, 於是 $x\in U$ 且 $x\notin A$, 得到 $x\in A^c$, 因此 $B^c\subset A^c$。

$(\Leftarrow)$ 若 $x\in A$, 則 $x\notin A^c$, 得到 $x\in U$ 且 $x\notin B^c$, 因此 $x\in U$ 且 $x\in B$, 得到 $A\subset B$。

綜合上述討論得知 $A\subset B$ 若且唯若 $B^c\subset A^c$。

□

2.4 指標族

前一個單元介紹集合的關係只是針對兩個集合進行聯集、交集或是差集, 又或者是討論一個集合的補集, 而由數學歸納法 (Mathematical Induction) 原理, 當我們確定了兩個集合的關係之後, 這樣的規定可以類推到「任意有限個」集合下都成立。這裡各位應該要想清楚的一件事情是:「任意有限」和「無限」是不一樣的概念, 任意有限的意思是說, 我們先指定好一個自然數, 比方說 10000 好了, 那麼你可以探討這 10000 個集合的關係, 首先將這 10000 個集合中的其中一個取出, 另外 9999 個集合 (取聯集後) 視為一個集合, 這時候就可以透過兩集合的運算得到相應的結果; 接著, 再將這 9999 個集合視為一個集合與另一個集合 (它是 9998 個集合的聯集), 再用兩集合的運算得到相應的結果; 透過這樣逐一拆解的方式就可以確定這 10000 個集合的關係。

這個單元想要探討無限多個集合如何處理聯集與交集的問題, 此時會牽涉到的概念稱為 *指標族* (indexed families); 也就是說, 我們需要把想要討論的集合進行標號後再探討彼此的關係。在此之前, 我們必須花一點時間對於「無限」這個概念進行解釋: 若是從「計算個數」的觀點看待無限這個意義時, 會分成兩種無限的情況, 一種叫做可數無窮, 另一種叫做不可數無窮。關於無窮如何去計數的問題, 我們留到之後的章節再深入討論, 在此各位就先討論以下兩個情形, 等到我們對無窮有更多的認識之後, 各位再把這些觀念進行類推: (1) 可數無窮 (countable infinity) 像是自然數集 $\mathbb{N}$ 那樣的集合; (2) 不可數無窮 (uncountable infinity) 像是實數集 $\mathbb{R}$ 那樣的集合。

例 **1** (第 55, 56 頁)**.**

(A) 考慮 $\{A_n = (-n, n),\ 其中\ n \in \mathbb{N}\}$, 這是一個以自然數 n 為指標的指標族, 其中 A_n 是指從 $-n$ 到 n 的開區間。

(B) 考慮 $\{A_x = [-x, x],\ 其中\ x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, 這是一個以非負實數 x 為指標的指標族, 其中 A_x 是指從 $-x$ 到 x 的閉區間。

介紹完用自然數集或是實數集對於一個集合進行標號之後, 現在想要對於一族集合 (a family of sets) 像是 $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ 或是 $\{A_x, x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ 進行聯集、交集等運算。在數學上, 我們會把指標族寫得更為一般, 例如: Λ 是一個 *指標集* (index set), 也就是指標所成的集合, 然後 $\alpha \in \Lambda$ 表示 α 為指標集裡的某個指標。

定義 **2** (第 56 頁)**.** 令 $\mathcal{A} = \{A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是一族集合, 定義

(A) $\cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x |\ 存在\ \alpha \in \Lambda\ 使得\ x \in A_\alpha\}$。

(B) $\cap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x |\ x \in A_\alpha\ 對所有\ \alpha \in \Lambda\}$。

將一族集合進行聯集或交集是否仍然是一個集合是需要驗證的, 可藉由集合論公理以確認之。此時此刻我們並未提及這個問題的討論; 換言之, 上述定義是一個形式上的表達。關於下面定理的結果與討論在未確認最終的結果是否形成一個集合之前也是形式上的推演; 也就是說, 我們把「一些數學物件進行收集後是否形成一個集合」和「一些數學物件進行聯集與交集的操作」分成兩個問題看待, 以下定理是給出聯集與交集操作上的討論。

定理 3 (第 59 頁)**.** 令 $\mathcal{A} = \{A_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ 是一族集合, 而 B 是另一個集合, 則

(A) $B \cap (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha)$。

(B) $B \cup (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) = \cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha)$。

(C) $(\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$。

(D) $(\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$。

證明:

(A) 若 $x \in B \cap (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$, 則 $x \in B$ 且 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 於是 $x \in B$ 且存在某個 $\bar{\alpha} \in \Lambda$ 使得 $x \in A_{\bar{\alpha}}$, 得到 $x \in B \cap A_{\bar{\alpha}}$, 所以 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha)$。因此 $B \cap (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \subset \cup_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha)$。

若 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha)$, 則存在某個 $\bar{\alpha} \in \Lambda$ 使得 $x \in B \cap A_{\bar{\alpha}}$, 得到 $x \in B$ 且 $x \in A_{\bar{\alpha}}$。因為 $x \in A_{\bar{\alpha}}$, 所以 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 再由 $x \in B$ 且 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 得知 $x \in B \cap (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$, 因此 $\cup_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha) \subset B \cap (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$。

總上討論得知 $B \cap (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha)$。

(B) 若 $x \in B \cup (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$, 則 $x \in B$ 或 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$。如果 $x \in B$, 則對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in B \cup A_\alpha$, 得到 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha)$。如果 $x \notin B$, 那麼 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 必須成立, 則對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in A_\alpha$, 得到對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in B \cup A_\alpha$, 於是 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha)$, 因此 $B \cup (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha) \subset \cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha)$。

若 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha)$, 則對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in B \cup A_\alpha$。如果 $x \in B$, 則 $x \in B \cap (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$ 成立。如果 $x \notin B$, 則對所有 $\alpha \in \Lambda$, $x \in A_\alpha$ 必須成立, 得到 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 於是 $x \in B \cup (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$ 成立, 因此 $\cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha) \subset B \cup (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$。

綜上討論得知 $\cap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha) = B \cup (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)$。

(C) 若 $x \in (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 則 $x \in U$ 且 $x \notin \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 而 $x \notin \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 表示存在 $\bar{\alpha} \in \Lambda$ 使得 $x \notin A_{\bar{\alpha}}$。由 $x \in U$ 且 $x \notin A_{\bar{\alpha}}$ 得知 $x \in A_{\bar{\alpha}}^c$, 所以 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$, 因此 $(\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c \subset \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$。

若 $x \in \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$, 則存在 $\bar{\alpha} \in \Lambda$ 使得 $x \in A_{\bar{\alpha}}^c$, 也就是說, $x \in U$ 而且 $x \notin A_{\bar{\alpha}}$, 因為 $x \notin A_{\bar{\alpha}}$, 所以 $x \notin \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 於是 $x \in (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 因此 $\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c \subset (\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$。

綜合上述討論, 我們得到 $(\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$。

(D) 若 $x \in (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 則 $x \in U$ 且 $x \notin \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 所以對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \notin A_\alpha$, 於是對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in A_\alpha^c$, 得到 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$, 因此 $\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$。

若 $x \in \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$, 則對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in A_\alpha^c$, 也就是說, 對所有 $\alpha \in \Lambda$ 都有 $x \in U$ 且 $x \notin A_\alpha$, 則 $x \notin \cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, 於是 $x \in (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$, 因此 $\cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c \subset (\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c$。

綜合上述討論, 我們得到 $(\cup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^c = \cap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha^c$。

$\square$

在示範如何處理無窮多個集合的聯集與交集之前, 這裡想先介紹 阿基米德性質 (Archimedean Property), 它在論證技術上提供了一個方便的討論。

定理 4 (阿基米德性質, Archimedean Property)**.** 若 $x, y \in \mathbb{R}, x > 0$, 則存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nx > y$。

有關阿基米德性質的證明, 可以從實數的完備性 (completeness of the real numbers) 證明之, 這裡不給出證明, 留待各位學過實數完備性之後再把這個定理加以理解。

關於阿基米德性質最常見的應用有以下兩個:

(A) $y \in \mathbb{R}$ 給定, 然後取 $x = 1$, 則存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nx > y \Rightarrow n > y$; 也就是說, 任給一個實數 y, 一定會有比 y 還要大的正整數 n。

(B) $x > 0$ 給定, 然後取 $y = 1$, 則存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $nx > y \Rightarrow nx > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < x$; 也就是說, 任給一個正數 x, 在 0 和 x 之間一定會有一個長相是 $\frac{1}{n}$ 的有理數, 這個有理數的分子是 1, 分母是某個正整數 n。這裡要注意的是, 實數的稠密性本來就可以得知 0 和 x 之間必存在有理數, 而這裡可以得到是一個更特別的有理數。

例 5. 判斷以下集合並驗證之:

(A) $\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$。

(B) $\cap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n})$。

解. 因為這些集合都是實數集 $\mathbb{R}$ 的子集合, 由分離公理 (Axiom of schema of separation) 得知 $\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$ 與 $\cap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n})$ 都是集合。

(A) 給定 $x \in \mathbb{R}$, 若 $x \leq 0$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x < \frac{1}{n}$, 得到對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x \notin [\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$, 於是 $x \notin \cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$。

若 $0 < x \leq 1$, 由阿基米德性質 (Archimedean Property), 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\frac{1}{n_0} < x$, 又 $x \leq 1 \leq 3 - \frac{1}{n_0}$, 所以 $x \in [\frac{1}{n_0}, 3 - \frac{1}{n_0})$, 於是 $x \in \cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$。

若 $1 < x < 3$, 由阿基米德性質 (Archimedean Property), 存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $x < 3 - \frac{1}{n_1}$, 得到 $x \in [\frac{1}{n_1}, 3 - \frac{1}{n_1})$, 於是 $x \in \cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n_1}, 3 - \frac{1}{n_1})$。

若 $3 \leq x$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $3 - \frac{1}{n} < 3 \leq x$, 得到對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x \notin [\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$, 於是 $x \notin \cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n})$。

綜合上述討論, 我們得知 $\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}) = (0, 3)$。

(B) 給定 $x \in \mathbb{R}$, 若 $x < 0$, 由阿基米德性質 (Archimedean Property), 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x < -\frac{1}{n_0}$, 得到 $x \notin [-\frac{1}{n_0}, 3 + \frac{1}{n_0})$, 所以 $x \notin \cap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n})$。

若 $0 \leq x \leq 3$, 則對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $x \in [-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n})$, 所以 $x \in \cap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n})$。

若 $3 < x$, 由阿基米德性質 (Archimedean Property), 存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得 $3 < 3 + \frac{1}{n_1} < x$, 所以 $x \notin [-\frac{1}{n_1}, 3 + \frac{1}{n_1})$, 因此 $x \notin \cap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n})$。

綜合上述討論, 我們得知 $\cap_{n=1}^{\infty}[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}) = [0, 3]$。