1

數理邏輯

邏輯學 (logic, 有些人稱之為理則學) 是一門很深的學問, 自西元前三百多年亞里斯多德 (Aristotle, 384–322 BC) 著名的三段式論證就說明了在那個年代的人就已經在思考邏輯的本質, 甚至當邏輯學再繼續深究時, 則會和哲學 (philosophy) 息息相關。邏輯學是研究有效推論的原則與標準而形成的一門學問, 邏輯本身是指是推論和證明的思想過程; 更仔細地說, 邏輯是透過對推論的形式系統與自然語言中的論證等方式來研究並分類命題以及論證的結構。

現今的邏輯學已經發展出各式各樣的形式, 從形式邏輯與非形式邏輯的二分法, 到符號邏輯、數理邏輯、哲學邏輯等不同的分支。在數學導論的課程中, 我們感興趣的部分是符號邏輯以及數理邏輯, 所以我們只是對於邏輯進行最簡單的介紹; 也就是說, 這裡只會將邏輯中和數學最有關係的內容加以呈現, 目的是日後在進行數學證明與數學論述時, 能夠依循邏輯的規則表達清楚、完整且正確。

單元 1.1 開始要先界定清楚邏輯討論的範圍, 我們是針對一個語句形成命題的時候才可以用邏輯討論事情。給定命題之後, 我們可以將命題做一些串接或變形, 就產生了連言命題、選言命題、否言命題、如言命題、雙如言命題、逆命題與否逆命題這七種新形態的命題, 並且利用真值表的方式確實呈現每一個命題對應的真假值。

對於命題還可以繼續串接以產生更複雜的語句, 單元 1.2 介紹的布爾多項式可以用結構性的方式生成出複雜的命題, 並且從整體的結構判斷命題的真假, 如此會比起逐一列出真值表來說更有效率地了解一個命題。這個單元的另一個重點是要提出邏輯上等價, 有一些命題雖然是用不同的邏輯條件串聯, 但實際上它們代表同樣的意思, 我們用真值表最後的真假值是否完全一樣定義兩個命題的等價。若能確定兩命題互相等價, 在進行數學推論的時候就多了一條路徑去思考命題的正確與否。

單元 1.3 要介紹兩類特別的命題, 稱為恆真式與矛盾式。恆真式有兩種意義, 因為不管怎麼樣命題皆為真, 所以顯得這個命題有一點無聊; 另一方面, 命題的恆真式可以給出邏輯推演上的一種正確傳遞。至於矛盾式也有兩種意義, 因為不論如何命題皆為假, 怎麼樣也說不通的時候也是顯得無趣; 另一方面, 有一些特別的矛盾式將產生數學上的重大革命, 讓我們思考數學理論哪個地方出了問題需要調整。量詞是在單元 1.4 中討論的重點, 數學語句比起前面幾個單元所討論的命題還要來得複雜, 其中量詞的重要性讓我們更精確地描繪出各種數學概念, 也主宰了近代數學的理論。

邏輯除了在數學上給出一套講道理的模式, 在積體電路的基本組件也是透過邏輯閘處理訊號, 邏輯也會用在法律上案件的陳述, 邏輯到最後也會變成一種哲學議題。關於邏輯的延伸就留給大家日後涉獵。

1.1 邏輯與命題

邏輯最初步的構想是想要用一些基本的規則衍伸出一套系統, 而這個系統因為所有的過程都有所依循, 故能成為大家所公認的準則。

語言的形式是為了方便我們日常生活的溝通與彼此的了解, 但這裡要注意的是: 邏輯並非萬能; 也就是說, 邏輯無法處理世界上的所有大小事, 邏輯可以處理的只是某一部分的情況。為解釋清楚邏輯可以處理的面向, 我們需要界定清楚研究的主題。

定義 **1** (第 2 頁)**.** 一個可以判斷真假值 (true or false value) 的完整句子稱為 *命題* (proposition, statement)。

例 **2.** 判斷以下句子是不是一個命題:

(A)「$5 + 2 = 7$。」

(B)「2023 年 7 月 19 日是星期二。」

(C)「他很帥。」

(D)「現在幾點鐘?」

*解***.**

(A)「$5 + 2 = 7$。」是一個命題, 因為它是一個可以判斷為真的完整句子。

(B)「2023 年 7 月 19 日是星期二。」是一個命題, 因為它是一個可以判斷為假 (那天是星期三) 的完整句子。

(C)「他很帥。」不是一個命題, 因為句字當中的「他」不明, 指示代名詞可以代表很多種可能, 除非是在一個限定的場合, 比方說兩個人在吃飯的時候, 看到隔壁桌有個人, 你我清楚知道要討論的對象是同一個人。即便如此, 一般來說,「帥」這個概念也很模糊不清, 任兩人如何憑斷帥或不帥其實很難界定, 很難有一致的共識, 我們也無法完全同意或不同意他是不是帥。所以我們不把這句話稱為一個命題。

(D)「現在幾點鐘?」不是一個命題, 因為它是一個問句, 我們無法對於一個問句判定其真假。

關於命題這個概念, 我們通常會用大寫英文字母 $P, Q, R, S, \ldots$ 表示之。當我們寫了 P 這個符號, 它只是代表命題這個概念, 所以它有可能是判斷為真的命題, 也有可能是判斷為假的命題, 直到我們寫出 P 的明確語句之時, 其真假值就會完全確定。

邏輯學不僅用在數學或哲學, 像是法庭上的攻防會非常仰賴邏輯的論述, 然而當邏輯用在實際生活中的時候, 會牽涉到更複雜的面向, 像是語言的等價、語意的表達...... 等。數學導論課比較感興趣的是數理邏輯的推演; 也就是說, 這裡介紹的邏輯內容目的是想要藉助邏輯以幫忙數學理論的認識, 所以之後舉的例子可能會先從一些生活的經驗作為出發點, 但後來的舉例都會比較傾向用與數學相關的論述進行解釋與說明。

介紹完命題的概念後, 現在要做的事情是: 給定兩個命題, 我們可以將這兩個命題進行一些串接或變形而產生新的命題。

定義 **3** (第 3 頁). 假設 P 與 Q 是兩個命題, 定義以下新的命題:

(A) 用記號 $P \wedge Q$ 表示 P 與 Q 的連言命題 (conjunction P and Q), 若以真值表 (truth table) 的方式來呈現命題 $P \wedge Q$ 的真假值, 則為以下表格:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(B) 用記號 $P \vee Q$ 表示 P 與 Q 的選言命題 (disjunction P and Q), 若以真值表的方式來呈現命題 $P \vee Q$ 的真假值, 則為以下表格:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(C) 用記號 $\sim P$ 表示 P 的否言命題 (negation of P), 若以真值表的方式來呈現命題 $\sim P$ 的真假值, 則為以下表格:

P	$\sim P$
T	F
F	T

註 4. 在一般的邏輯書中, 關於 P 的否言命題會用記號 $\neg P$ 表示。

上述這三個命題若以直觀的方式看待它應該不會產生太大的困難。比方說, 連言命題相當於平常講話的「且」, 當 P 與 Q 同時為真的時候, $P \wedge Q$ 才約定為真; 選言命題相當於「或」的意思, 當 P 與 Q 只要有一個為真的時候, $P \vee Q$ 就約定為真; 而否言命題就相當於「否定」的意思, 所以真變假、假變真。

例 **5.** 給定命題「P: 2 是奇數」與命題「Q: 3 是質數」寫出 $P \wedge Q, P \vee Q$ 與 $\sim P$ 的意思, 並判斷命題的真假。

解. 命題「P: 2 是奇數」為假, 而命題「Q: 3 是質數」為真。

- $P \wedge Q$: 2 是奇數且 3 是質數。命題 $P \wedge Q$ 為假。
- $P \vee Q$: 2 是奇數或 3 是質數。命題 $P \vee Q$ 為真。
- $\sim P$: 2 不是奇數。命題 $\sim P$ 為真。

除了上述三個由原命題串接或變形的新命題以外, 以下還要再定義兩個新的命題。

定義 **6** (第 4 頁)**.** 假設 P 與 Q 是兩個命題, 定義以下兩個命題:

(A) 用記號 $P \to Q$ 代表 P 與 Q 的*如言命題* (conditional proposition), 其對應的真值表如下:

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(B) 用記號 $P \leftrightarrow Q$ 代表 P 與 Q 的*雙如言命題* (biconditional proposition), 它想要呈現的是「$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$」, 其對應的真值表如下:

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

關於如言命題會和平常在討論「若 P 則 Q」的條件語句有關, 至於雙如言命題則是和「P 與 Q 等價」這個概念相關。這裡我們先熟悉如言命題與雙如言命題的語句呈現與真假值。

例 **7.** 判斷以下命題的真假:

(A) $1+1=2 \to x^2+3x+2=0$ 有兩相異實根。

(B) $-8>0 \to x^2+2x+3=0$ 有實根。

(C) $\pi > 3 \leftrightarrow 5$ 是正整數。

解**.**

(A) 記「P: $1+1=2$」與「Q: $x^2+3x+2=0$ 有兩相異實根」, 因為 P 為真且 Q 為真, 故命題為真。

(B) 記「P: $-8>0$」與「Q: $x^2+2x+3=0$ 有實根」, 因為 P 為假, 所以命題為真。

(C) 記「P: $\pi>3$」與「Q: 5 是正整數」, 因為 P, Q 皆為真, 所以命題為真。

相較於先前討論的連言命題、選言命題與否言命題, 如言命題會讓一些人感到困惑, 現對這些困惑說明如下:

- 在邏輯學上, 我們可以討論 P 和 Q 兩者無關的命題並給出它的條件命題 $P \to Q$ 之真假, 但你會覺得這之間很沒有道理。要如何接受這種完全沒道理的語句呢?

答: 到目前為止, 我們只是對於命題做最初步的串接, 所以並不限定所要討論的內容或是探討它們的因果關係。對於看似無關的 P 與 Q 的命題硬是考慮它的如言命題 $P \to Q$ 就單純地想成是一個特別的規定或約定; 也就是說, 目前的定義只是給出 $P \to Q$ 的遊戲規則, 而此時先將焦點著重在命題的真假值判斷。

- 如言命題為什麼要設定成「若 P 為假, 而 Q 不論是真或假, 而 $P \to Q$ 這個命題皆為真」呢?

答: 如言命題可以想成是一個特殊的通行證, 除了 P 為真且 Q 為假的情況 (不可以從對的前提推出錯的結論) 通行證失效之外, 其它的情況都可以通關。又或者說, 如言命題後續的重點是想要呈現當 P 發生的時候, Q 就一定要發生, 不允許 P 發生的時候 Q 不對; 當 P 為假的時候, 如言命題的設定是沒有下任何定論, Q 是否會發生都有可能。若要建立 P 為假, 而 Q (或者是另一個命題 R) 是真或是假的命題, 則可從 $\sim P$ 為真這個條件出發, 然後重新判斷其如言命題的真假值。

以下我們從另一個面向來判讀「若 P 為假, 而 Q 不論是真或假, 而 $P \to Q$ 這個命題皆為真」這件事的合理性。從日常生活的推理經驗, 我們希望

$$((P \to Q) \land (Q \to R)) \to (P \to R) \qquad (\star)$$

這個推理的規則能夠成立; 也就是說, 當我們要判斷 $P \to R$ 的真假值時, 有可能透過另一個命題 Q 從中進行推演, 我們接受從 $((P \to Q) \land (Q \to R))$ 的推論過程中進而得到 $P \to R$ 的結果, 而且要有一致性。於是我們考慮以下三種情況:

P	Q	R	$P \to Q$	$Q \to R$	$(P \to Q) \land (Q \to R)$	$P \to R$	$(\star)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	?	F	T	T

關於第一列的設定是沒有問題的, 所有命題皆為真, 然後先從 P 為真推論出 Q 為真, 然後再透過 Q 為真得到 R 為真, 整體來看可以是從 P 為真得到 R 為真。

而第二列要傳達的概念是: 一開始從 P 為真推論出 Q 為真, 可是從 Q 為真推出 R 為假的時候, 從 Q 到 R 的論述無效, 進而整體來看從 P 到 R 的論述也無效。為了要讓 $(\star)$ 這個命題為真, 我們就要約定「當 P, Q 皆為假, 那麼 $P \to Q$ 這個命題為真」(應用於現在的情況是要把 $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 想成 P, 然後 $P \to R$ 想成 Q)。

至於第三列要描述的現象是: 一開始從 P 為真推論出 Q 為假, 這導致此命題為假, 然後我們又用錯誤的命題 Q 繼續去推得 R 為真, 這個情境像是說有人想要證由 P 到 Q 到 R 的過程中論述不正確, 可是 $P \to R$ 確實為真。這個時候, 因為 $P \to Q$ 為假, 所以不論 $Q \to R$ 是真是假, $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 必為假。為了要讓 $(\star)$ 這個命題為真, 我們就要約定「當 P 為假而 Q 為真, 那麼 $P \to Q$ 這個命題為真」。

這一個單元的最後, 我們要再給出與如言命題相關的另外兩個命題。

定義 8 (第 6 頁)**.** 假設 P 與 Q 是兩個命題,

(A) 記號 $Q \to P$ 代表 $P \to Q$ 的*逆命題* (converse proposition), 其對應的真值表如下:

P	Q	$Q \to P$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

(B) 我們將 $\sim Q \to \sim P$ 稱為 $P \to Q$ 的 *否逆命題* (contrapositive proposition), 其對應的真值表如下:

P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q \to \sim P$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

同樣地, 這裡先熟悉如何把一個如言命題的逆命題與否逆命題清楚表達。

例 9. 寫出以下如言命題的逆命題與否逆命題, 並判斷其真假值。

(A) P: $\sqrt{2} < \sqrt{5} \to 2 < 5$。

(B) Q: $2 \geq 5 \to \sqrt{2} \geq \sqrt{5}$。

解. 在接受三一律 (Trichotomy Law) 成立的情形下,

(A) P 的逆命題是: $2 < 5 \to \sqrt{2} < \sqrt{5}$, 因為 $2 < 5$ 為真, $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ 亦為真, 所以 P 的逆命題為真; P 的否逆命題是: $2 \geq 5 \to \sqrt{2} \geq \sqrt{5}$, 因為 $2 \geq 5$ 為假, $\sqrt{2} \geq \sqrt{5}$ 為假, 所以 P 的否逆命題為真。

(B) Q 的逆命題是: $\sqrt{2} \geq \sqrt{5} \to 2 \geq 5$; 因為 $\sqrt{2} \geq \sqrt{5}$ 為假, $2 \geq 5$ 為假, 所以 Q 的逆命題為真; Q 的否逆命題是: $\sqrt{2} < \sqrt{5} \to 2 < 5$, 因為 $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ 為真, 且 $2 < 5$ 為真, 所以 Q 的否逆命題為真。

這一個單元主要是介紹邏輯學所討論的範疇, 一個語句必須是以命題的形式出現才可以使用邏輯, 接著介紹七種將命題進行串接的形式而得的新命題, 並透過真值表的方式確定新命題的真假值。下一個單元我們將仔細探討一些命題之間的關聯。

1.2 命題的等價

前一單元介紹的是從兩個命題 P, Q 出發構造出一些與 P, Q 相關的新命題, 由此我們還可以繼續進行更複雜的串接。當我們要開始處理更複雜的命題時, 我們會利用 *變數* (variables) 還有 *括號* (parentheses) 寫出一種邏輯式, 這裡所說的變數是指以記號代表命題這個概念而不是某個明確的命題, 而引進括號的用意在於有時候需要界限清楚意義避免混淆。我們將這些邏輯式稱為 *命題表達式* (propositional expression)。

關於命題表達式, 我們會遇到的問題是: (1) 如何創造出新的命題表達式? 從命題表達式中又要怎麼得到新的命題? (2) 每次給出一個命題表達式, 我們難道總是要把它的真值表全部都寫下來才可以完全確定這個命題表達式的真假嗎? 有沒有一個比較系統性的方式決定哪些類型的表達式都具有同樣的真假值?

以下的布爾多項式提供了一個模式處理命題表達式, 並且給出較為統一的結果。

定義 **1.** 若 $p, q, \ldots$ 代表變數, 用 $\wedge, \vee, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow$ 與命題為變數結合而得的一個命題表達式稱為 *布爾多項式* (Boolean polynomial)。

例 **2.** 下面是二個變數 p 與 q 的布爾多項式:

$$f(p,q) = \sim(p \vee q)$$
$$g(p,q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q。$$

給定布爾多項式之後, 我們可以再造出更多的布爾多項式, 例如把 $f(p,q)$ 和 $g(p,q)$ 再進行選言或連言而得

$$f(p,q) \vee g(p,q) = [\sim(p \vee q)] \vee [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge q]$$
$$f(p,q) \wedge g(p,q) = [\sim(p \vee q)] \wedge [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge q]。$$

這裡注意到: 布爾多項式 $f(p, q, \ldots)$ 是一個命題表達式, 而這個命題表達式當中的每個變數 (命題) $p, q, \ldots$ 都未定, 所以可能真可能假, 當你把所有變數放入明確的命題 $p_0, q_0, \ldots$ 之後所得到的 $f(p_0, q_0, \ldots)$ 才會是一個命題, 並且可以確定這個命題的真假值。

我們可以針對布爾多項式建構出相應的真值表, 一旦完成後, 若 p_1 與 p_2 具有相同的真假值, q_1 與 q_2 具有相同的真假值, 則 $f(p_1, q_1)$ 與 $f(p_2, q_2)$ 這兩個命題就具有相同的真假值。所以我們可以建構基本的布爾多項式, 日後就可以經常使用它。

從布爾多項式出發自然可以確定同樣結構的命題表達式具有同樣的真假值, 而另一個感興趣的問題是: 有沒有可能將一些變數做不同的邏輯符號串接然後得到相同的概念? 或者說, 如何判定不同結構的命題表達式具有完全一樣的真假值。為此, 我們要先提出兩個表達式等價的概念。

定義 **3** (第 10 頁)**.** 給定兩個命題表達式 X 與 Y, 當兩個命題表達式在各種可能的情況下都對應到相同的真假值, 我們稱這兩個命題表達式 X 與 Y 彼此 *邏輯上等價* (logically equivalent)。此時, 用記號 $X \Leftrightarrow Y$ 代表這個概念。

例 **4** (第 10 頁)**.** 考慮兩個表達式 X: $P \to Q$ 與 Y: $\sim P \vee Q$。證明: X 與 Y 彼此邏輯上等價。

證明: 首先, 我們寫出 X 的真值表:

P	Q	X: $P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

再將 Y 的真值表, 如下表格所示:

P	Q	$\sim P$	Y: $\sim P \vee Q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

因為兩命題在各種情況對應的真假值都一樣, 所以 X 與 Y 彼此邏輯上等價。 □

對於 例 **4**, 我們可以這麼思考: 關於 P, 可能為真, 也可能為假; 若 P 為真, 則會導致 Q 這個結果為真; 若 P 為假, 沒有給出任何結果, 所以兩種情況合併得知為 $\sim P \vee Q$。

例 **5** (第 11 頁)**.** 證明: X: $P \to Q$ 與 Y: $\sim Q \to \sim P$ 邏輯上等價。

證明: 首先列出 X 的真值表:

P	Q	X: $P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

再寫出 Y 的真值表:

P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	Y: $\sim Q \to \sim P$
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T

所以 X 與 Y 邏輯上等價。 □

關於 例 **5** 的結果非常重要, 未來在進行數學論述時, 當我們證明了「若 P 則 Q」, 實際上也告知「非 Q 則非 P」; 又或者說, 在日後如果要進行數學論證「若 P 則 Q」這個命題時, 有的時候我們會採用它的否逆命題「非 Q 則非 P」證明它, 連同它的一些相關討論像是反證法也都是由此而來。

定理 6 (迪摩根律, De Morgan's laws, 第 12 頁). 證明以下命題表達彼此邏輯上等價:

(A) X: $\sim(P \vee Q)$ 與 Y: $\sim P \wedge \sim Q$。

(B) X: $\sim(P \wedge Q)$ 與 Y: $\sim P \vee \sim Q$。

證明:

(A) 首先列出 X 的真值表:

P	Q	$P \vee Q$	$\sim(P \vee Q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

再寫出 Y 的真值表:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

所以 X 與 Y 邏輯上等價。

(B) 首先列出 X 的真值表:

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim(P \wedge Q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

再寫出 Y 的真值表:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \vee \sim Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

所以 X 與 Y 邏輯上等價。

□

1.3 恆真式與矛盾式

在邏輯命題的討論中, 有兩種最特別的命題表達式:

定義 1 (第 11 頁)**.** 給定一個命題表達式 $P(p, q, \ldots)$,

(A) 如果對任何命題 $p, q, \ldots$ 不論真假所得到的 $P(p, q, \ldots)$ 皆為真, 我們說命題表達式 $P(p, q, \ldots)$ 是 *恆真式* (tautology)。

(B) 如果對任何命題 $p, q, \ldots$ 不論真假所得到的 $P(p, q, \ldots)$ 皆為假, 我們說命題表達式 $P(p, q, \ldots)$ 是 *矛盾式* (contradiction)。

例 2 (第 11 頁)**.** 判斷以下命題表達式是恆真式或是矛盾式。

(A) X: $P \vee \sim P$。

(B) Y: $P \wedge \sim P$。

(C) Z: $(P \to Q) \wedge (P \wedge \sim Q)$。

解.

(A) 寫下 X: $P \vee \sim P$ 的真值表:

P	$\sim P$	$P \vee \sim P$
T	F	T
F	T	T

所以 X: $P \vee \sim P$ 是恆真式。

(B) 寫下 Y: $P \wedge \sim P$ 的真值表:

P	$\sim P$	$P \wedge \sim P$
T	F	F
F	T	F

所以 Y: $P \wedge \sim P$ 是矛盾式。

(C) 寫下 Z: $(P \to Q) \wedge (P \wedge \sim Q)$ 的真值表:

P	Q	$\sim Q$	$P \to Q$	$P \wedge \sim Q$	$(P \to Q) \wedge (P \wedge \sim Q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

所以 Z: $(P \to Q) \wedge (P \wedge \sim Q)$ 是矛盾式。

前面兩個個例子應該要覺得很自然, 因為「否定」這件事是一種互斥的二分法, 所以 P 要對, 那麼 $\sim P$ 就不對, 而 P 不對的話, 那麼 $\sim P$ 就對, 所以兩者再取選言的話, 因為必有一種情況為真, 所以它為恆真句; 將兩者取連言的話, 因為兩者不可能同時為真, 所以它是矛盾句。

至於第三個例子也可以解釋: 從 P 的真假值出發, 當 P, Q 皆為真, 那麼 $P \wedge \sim Q$ 為假; 當 P 為真 Q 為假, 那麼 $P \to Q$ 為假; 當 P 為假, 那麼 $P \wedge \sim Q$ 為假, 這麼一來所有情況都討論完畢。

翻遍數學上所寫的定理, 幾乎所有的敘述中都帶有「若 P 則 Q」的概念在裡面, 這件事情是合理的, 因為數學的內容廣泛, 我們必須限定在某些情況下才會有相對應的結果。為此, 我們要對於如言命題 $P \to Q$ 再做進一步地討論。

定理 3. *假設 $P(p,q,\ldots)$ 與 $Q(p,q,\ldots)$ 是兩個命題表達, 則下面三個命題是邏輯上等價的:*

(A) $P(p,q,\ldots) \to Q(p,q,\ldots)$ 是一個恆真式。

(B) $\sim P(p,q,\ldots) \vee Q(p,q,\ldots)$ 是一個恆真式。

(C) $P(p,q,\ldots) \wedge \sim Q(p,q,\ldots)$ 是一個矛盾式。

證明: 以下用 P, Q 簡記 $P(p,q,\ldots)$ 與 $Q(p,q,\ldots)$, 現建構每個命題表達式的真值表如下:

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \to Q$	$\sim P \vee Q$	$P \wedge \sim Q$
T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	F

當第二列被排除之後, 則得知 (A), (B), (C) 是邏輯上等價的。 □

定義 4. 如果 定理 **3** 中的任意一個條件成立, 我們稱命題表達式 $P(p,q,\ldots)$ *邏輯地蘊涵* (logically imply) 命題表達式 $Q(p,q,\ldots)$。我們以符號 $P(p,q,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,\ldots)$ 表示這個邏輯地蘊涵關係。

根據定義, 邏輯地蘊涵 $P \Rightarrow Q$ 表示 $P \to Q$ 為一恆真式; 換言之, 如果 P 真, 則 Q 真。在之後的討論中, 有時我們會把「邏輯地蘊涵」簡記為「蘊涵」二字; 而「邏輯上等價」也會簡記為「等價」。

定理 5. *邏輯地蘊涵 $P(p,q,\ldots,) \Rightarrow Q(p,q,\ldots)$ 滿足以下關係:*

(A) (自反律, reflexive law) $P(p,q,\ldots) \Rightarrow P(p,q,\ldots)$。

(B) (反對稱律, antisymmetry law)

$$P(p,q,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,\ldots) \text{ 且 } Q(p,q,\ldots) \Rightarrow P(p,q,\ldots), \text{ 則 } P(p,q,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,\ldots)。$$

(C) (遞移律, transitive law)

$$P(p,q,\ldots) \Rightarrow Q(p,q,\ldots) \text{ 且 } Q(p,q,\ldots) \Rightarrow R(p,q,\ldots), \text{ 則 } P(p,q,\ldots) \Rightarrow R(p,q,\ldots)。$$

證明:

(A) 建立 $P \Rightarrow P$ 的真值表如下:

P	$P \Rightarrow P$
T	T
F	T

所以邏輯地蘊涵具有自反律。

(B) 建立 $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P, P \Leftrightarrow Q$ 的真值表如下:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

因為前提是 $P \Rightarrow Q$ 與 $Q \Rightarrow P$ 都要成立, 故刪去第二列與第三列之後, 其餘兩列的 $P \Leftrightarrow Q$ 皆為真, 所以邏輯地蘊涵具有反對稱律。

(C) 建立 $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R, P \Rightarrow R$ 的真值表如下:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

因為前提 $P \Rightarrow Q$ 與 $Q \Rightarrow R$ 都要成立, 故刪去第二、三、四、六列, 其餘四列的 $P \Rightarrow R$ 皆為真, 所以邏輯地蘊涵具有遞移律。

□

關於邏輯上的蘊涵 $P \Rightarrow Q$, 我們說 P 是 Q 的 *充分條件* (sufficient condition), 而 Q 是 P 的 *必要條件* (necessary condition)。至於邏輯上的等價 $P \Leftrightarrow Q$, 我們說 P 是 Q 的 *充分必要條件* (necessary and sufficient condition)。

註 6. 注意一下中文習慣上是說充分必要條件, 但英文的字會和中文的字相反。

1.4 量詞

在數學的命題中, 量詞 (quantifiers) 也是一個非常重要的概念, 它用來幫助我們界定一個性質適用的對象及範圍。近代數學會特別重視量詞的使用還有量詞與邏輯符號之間的關係, 如此才有辦法將一些深刻的數學概念精確地傳達。在這個單元中, 我們要學會的是量詞以及量詞在進行命題否定的時候如何正確表達。

在介紹量詞之前, 我們要先把命題再做進一步的討論。前面的幾個單元都只是著重在如何構造新命題、命題的關係還有確定命題表達式的真假值, 實際上我們會遇到的數學語句更複雜, 像是一個語句裡面會帶有 *數學符號* (mathematical sign) 以幫助我們記錄一些帶有數學意義的概念。數學符號分成以下兩類型:

- *常數* (constant) 就是指固定的一個值, 比方說 2 就是一個常數。
- *變數* (variable) 顧名思義就是它是一個不定元, 可以允許放入各種數字。例如 $x < 1$ 的 x 就是變數, 因為這裡的 x 不定, 有很多數字代入後會滿足這個條件, 也會有數字不滿足條件。

若將上面變數的例子再說得更清楚的話, 關於「$x < 1$」這句話不是一個命題, 因為這句話裡面帶有變數 x, 此時此刻你無法明確判定這句話的真假, 直到你將 $x = 0$ 代入之後得到「$0 < 1$」是一個命題, 而且命題為真, 又或者是當你把 $x = 10$ 代入語句之後又得到另一個命題「$10 < 1$」, 而且命題為假。像這種帶有變數的句子我們稱為 *命題函數* (propositional function) 或稱 *開放句* (open sentence)。

這裡還有幾個術語也必須了解: 給定一個命題函數, 可以將變數替換的所有物件收集起來的集合稱為 *宇集合* (universe), 於是在一個命題函數中相對應的宇集合內的元素即為常數。在宇集合內代入命題函數後使得命題為真的元素所成的集合稱為 *眞集合* (truth set)。所以「$x < 1$」的真集合就是那些小於 1 的所有實數。

例 **1.** 以下表達式都是命題函數:

(A) n 是最小的正偶數。

(B) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$。

(C) $x^2 - 3x + 2 = 0$。

介紹完命題函數後, 再來要引進量詞的概念。

定義 **2.**

(A) 我們用符號 $\exists$ 代表 *存在* (exist), 它被稱為特稱量詞 (existential quantifiers)。

(B) 我們用符號 $\forall$ 代表 *所有* (for all), 它被稱為全稱量詞 (universal quantifiers)。

在數學上會經常探討一個數學量或數學物件是 *存在唯一* (exist and unique), 在邏輯的符號上我們會寫成 $\exists!$。

例 **3.** 將下面的語句改寫成用量詞的方式表達:

(A) $x+3=10$ 有解。

(B) $x^2+2x+2=0$ 無實數解。

解**.**

(A) 存在 $x \in \mathbb{R}$ 使得 $x+3=10$ 成立。

(B) 對所有 $x \in \mathbb{R}$, $x^2+2x+2=0$ 都不成立。

假設 $P(x)$ 是一個命題函數, 為了以下討論方便, 我們做以下簡記:

- 「對所有 x, $P(x)$」記為「$(\forall x)P(x)$」。
- 「存在 x 使得 $P(x)$」記為「$(\exists x)P(x)$」。

定理 **4.** 假設 $P(x)$ 是帶有變數 x 的命題函數, 則

(A) $\sim[(\forall x)P(x)]$ 與 $(\exists x)\sim[P(x)]$ 等價。

(B) $\sim[(\exists x)P(x)]$ 與 $(\forall x)\sim[P(x)]$ 等價。

證明:

(A) 由 $\sim[(\forall x)P(x)]$ 命題成立, 即 $(\forall x)P(x)$ 為假, 於是 $\sim P(x)$ 的集合非空, 得到 $(\exists x)\sim[P(x)]$ 為真。

由 $(\exists x)\sim[P(x)]$ 命題成立, 則 $\sim P(x)$ 的集合非空, 於是 $(\forall x)P(x)$ 為假, 得到 $\sim[(\forall x)P(x)]$ 命題成立。

由上面的討論得知: $\sim[(\forall x)P(x)]$ 與 $(\exists x)\sim[P(x)]$ 等價。

(B) 由 $\sim[(\exists x)P(x)]$ 命題成立, 即 $(\exists x)P(x)$ 為假, 於是使 $\sim P(x)$ 成立的集合是宇集合, 得到 $(\forall x)\sim[P(x)]$ 為真。

由 $(\forall x)\sim[P(x)]$ 命題成立, 則滿足 $\sim P(x)$ 的集合是宇集合, 於是 $(\exists x)P(x)$ 為假, 得到 $\sim[(\exists x)P(x)]$ 為真。

由上面的討論得知: $\sim[(\exists x)P(x)]$ 與 $(\forall x)\sim[P(x)]$ 等價。

□

由上面討論得知, 帶有量詞的語句若要進行否定的話, 改寫的方式是把「所有 $\forall$」換成「存在 $\exists$」, 然後「存在 $\exists$」換成「所有 $\forall$」, 最後讓 $P(x)$ 進行否定。這套量詞的改變可以適用在更一般且更複雜的情況, 極限的精確定義就是一個很經典的例子。

例 **5** (極限的精確定義). 在實數軸上給定數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 定義數列是 收斂的 (convergent) 為:

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)。$$

寫出數列是 發散的 (divergent) 精確定義。

解.

$$(\forall L \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n_0 \geq N \Rightarrow |a_{n_0} - L| \geq \varepsilon_0)。$$

這裡的 ε_0 與 n_0 都用下標註記是想要強調這兩個量的存在性。