微分幾何(二) 課程學習單 活動 11

學號: _______________ 姓名: _______________ 你的伙伴: _______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 高斯-伯內定理 (Gauss-Bonnet Theorem) 的認識。

☐ 高斯曲率的另一個解釋。

2 預備知識

討論 **1.** 試與伙伴討論以下問題:

(A1) 何謂 格林定理 (Green's Theorem)?

(A2) 平面上的多邊形有什麼是不變量?

(A3) 從地球的北極沿東經 0 度的經線往南走到赤道, 再沿著赤道往東走到東經 90 度的地方, 再沿著東經 90 度的經線往北走到北極, 這樣繞了一圈之下, 總共轉了多少角度?

解.

3　外角的定義

定義 2 (第 268 頁)**.** 給定正則曲面 S 上的曲線 $\boldsymbol{\alpha} : [0, l] \to S$, 我們說滿足以下條件的 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 簡單、封閉、片段正則 (simple, closed, piecewise regular) 的參數曲線:

(a) $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}(l)$。 (封閉)

(b) 對所有 $t' \neq t'', t', t'' \in [0, l)$ 都有 $\boldsymbol{\alpha}(t') \neq \boldsymbol{\alpha}(t'')$。 (簡單)

(c) 存在 $[0, l]$ 的一種分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = l$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}|_{(t_i, t_{i+1})}, i = 0, 1, \ldots, n-1$ 是正則曲線。(換言之, 曲線上只有有限個點無法定義切線。) (片段正則)

而 $\boldsymbol{\alpha}(t_i), i = 0, 1, \ldots, n-1$ 稱爲曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 頂點 (vertices)。

對於每個頂點, 考慮 $\boldsymbol{\alpha}'_-(t_i) = \lim\limits_{t \to t_i -} \boldsymbol{\alpha}'(t)$ 與 $\boldsymbol{\alpha}'_+(t_i) = \lim\limits_{t \to t_i +} \boldsymbol{\alpha}'(t)$, 這兩個向量都落在 $T_{\boldsymbol{\alpha}(t_i)}S$ 上, 對於那些 $\boldsymbol{\alpha}'_-(t_i) \neq \boldsymbol{\alpha}'_+(t_i)$ 的點, 定義 有向外角 (signed external angle): 令 $|\theta_i|, 0 < |\theta_i| \leq \pi$ 是 $\boldsymbol{\alpha}'_-(t_i)$ 與 $\boldsymbol{\alpha}'_+(t_i)$ 之間的夾角大小, 賦予符號的方式是透過行列式 $\det(\boldsymbol{\alpha}'_-(t_i), \boldsymbol{\alpha}'_+(t_i), \mathbf{N}(t_i))$ 的正負號決定。

現在有兩種情況要討論, 根據 $|\theta| \neq \pi$ 與 $|\theta| = \pi$ 觀察:

(1) 若 $|\theta| \neq \pi$, 如圖所示:

(2) 若 $|\theta| = \pi$, 此時頂點是具有 尖角 (cusp) 的形狀, 由連續性得知存在 $\delta > 0$ 使得 $\det(\boldsymbol{\alpha}'_-(t_i - \delta), \boldsymbol{\alpha}'_+(t_i + \delta), \mathbf{N}(t_i))$ 不會改變其符號, 以此決定其正負號。

例題 3. 與伙伴討論以下情況每個外角的正負號。

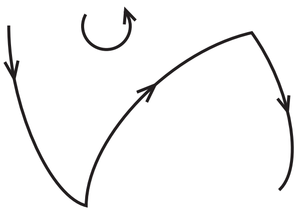

圖 1: 確定每一個有向外角。

圖 2: 確定每一個有向外角。

現在對於我們要討論的幾何物件整理如下:

(A) 令 $\boldsymbol{\alpha}:[0,l]\to\mathbf{x}(U)\to S$ 是簡單、封閉、片段正則之參數曲線, 其頂點記爲 $\boldsymbol{\alpha}(t_i)$, 而有向外角記爲 $\theta_i, i=0,1,\ldots,n-1$。

(B) 令 $\varphi_i:[t_i,t_{i+1}]\to\mathbb{R}$ 是從 $\mathbf{x}_u$ 到 $\boldsymbol{\alpha}'(t)$ 之正向角, 它是可微分函數。

上學期的課程中曾經介紹光滑曲線的切線旋轉定理, 這個定理在片段光滑的曲線的情況下有以下的結論:

定理 4 (切線旋轉定理 (Theorem of turning tangents, 第 270 頁)**.** 由上述設定, 則有

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\varphi_i(t_{i+1})-\varphi_i(t_i))+\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i=\pm 2\pi,$$

其中右式的正負號取決於 $\boldsymbol{\alpha}$ 的定向。

在介紹局部版本的高斯–伯內定理之前, 我們還需要以下的術語。

(A) 記 S 是一個可定向的曲面, 區域 $R\subset S$ 稱爲 *簡單區域* (simple region): 如果 R 與某個圓盤 (disk) 同胚 (homeomorphic), 而 R 的邊界(記爲 ∂R) 是一條簡單、封閉、片段正則的參數曲線之軌跡。

(B) 我們說 $\boldsymbol{\alpha}$ 具有 *正的定向* (positive oriented): 如果對每個 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 而言, 在光滑的區段上, 其正向的正交基底 $\{\boldsymbol{\alpha}'(t),h(t)\}$ 都滿足 $h(t)$ 都指向區域 R 的內部。

(C) 上述的說法, 可以用數學的語言再描述之: 任何曲線 $\boldsymbol{\beta}:I\to R,\boldsymbol{\beta}(0)=\boldsymbol{\alpha}(t),\boldsymbol{\beta}'(0)\neq\boldsymbol{\alpha}'(t)$ 都有 $\langle\boldsymbol{\beta}'(0),h(t)\rangle>0$。

(D) 直觀來說, 若人沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 行走, 頭與法向量 $\mathbf{N}$ 同向, 則區域 R 始終在左手邊。

4 高斯-伯內定理(局部版本)

定理 5 (局部版本的高斯-伯內定理 (Gauss-Bonnet Theorem, local version, 第 272 頁))**.** 令 $\mathbf{x}: U \to S$ 是一個等溫參數式 (isothermal parametrization), 也就是 $F=0, E=G=\lambda^2(u,v)$, 而 S 是可定向的曲面, $U \subset \mathbb{R}^2$ 同胚於開圓盤, $\mathbf{x}$ 與 S 的定向相容。

令 $R \subset \mathbf{x}(U)$ 是 S 上的簡單區域, 而 $\boldsymbol{\alpha}: I \to S$ 使得 $\partial R = \boldsymbol{\alpha}(I)$, 假設 $\boldsymbol{\alpha}$ 具有正的定向, 以弧長 s 爲參數, 並且 $\boldsymbol{\alpha}(s_0), \ldots, \boldsymbol{\alpha}(s_{n-1})$ 與 $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$ 分別爲頂點與 $\boldsymbol{\alpha}$ 的外角, 則

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}A + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi,$$

其中 $k_g(s)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的測地曲率, K 是 S 的高斯曲率。

證明: 記 $\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$, 現看 $\boldsymbol{\alpha}(s)|_{[s_i, s_{i+1}]}, i = 0, 1, \ldots, n-1$, 因爲測地曲率滿足以下公式:

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} - E_v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}s},$$

其中 $\varphi_i = \varphi_i(s)$ 是可微分函數, 它測量從 $\mathbf{x}_u$ 到 $\boldsymbol{\alpha}'(s)$ 在 $[s_i, s_{i+1}]$ 的正向角度。現將上式逐段積分並相加, 得到

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,\mathrm{d}s &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s \\
&= \iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} \left(\left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\right)_u\right) \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \sum_{i=0}^{n-1}(\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi(s_i)) \\
&= -\iint_{\mathbf{x}^{-1}(R)} K\lambda\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1}\theta_i = -\iint_R K\,\mathrm{d}A + 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1}\theta_i,
\end{aligned}$$

於是

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R K\,\mathrm{d}A + \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i = 2\pi。$$

5 高斯曲率的重新解釋

令 $\mathbf{x}: U \to S$ 是 $p \in S$ 附近的一個等溫參數式, $R \subset \mathbf{x}(U)$ 是一個沒有頂點且包含 p 的一個簡單區域, 記 $\boldsymbol{\alpha}: [0, l] \to \mathbf{x}(U)$ 是以弧長 s 爲參數的曲線使得它對應於 R 的邊界。令 $\mathbf{w}_0$ 是 S 在 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 的單位切向量, $\mathbf{w}(s), s \in [0, l]$ 是 $\mathbf{w}_0$ 沿著 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平行移動。由格林定理 (Green's Theorem) 得知:

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^l \left[\frac{D\mathbf{w}}{\mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}s &= \int_0^l \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} - E_v \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s + \int_0^l \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s \\
&= -\iint_R K\,\mathrm{d}A + \varphi(l) - \varphi(0) = -\iint_R K\,\mathrm{d}A + \Delta\varphi,
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{R \to p} \frac{\Delta\varphi}{A(R)} = K(p),$$

也就是說, ____。