微分幾何(二) 課程學習單　　活動 10

學號: ______________　　姓名: ______________　　你的伙伴: ______________

1　單元介紹與學習目標

☐ 推導測地線方程式並觀察旋轉曲面的一些測地線。

☐ 推得向量場的共變微分公式。

☐ 證明向量場平行移動之存在唯一性。

2　測地線方程式(第 257 頁)

假設 $\gamma : I \to S$ 是一條測地線, 記 $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ 是曲線參數式, 則 $\gamma'(t) = u'(t)\mathbf{x}_u + v'(t)\mathbf{x}_v$ 爲測地線的切向量。因爲

$$\frac{\mathrm{d}\gamma'(t)}{\mathrm{d}t} = u''(t)\mathbf{x}_u + u'(t)\left(\mathbf{x}_{uu}u'(t) + \mathbf{x}_{uv}v'(t)\right) + v''(t)\mathbf{x}_v + v'(t)\left(\mathbf{x}_{vu}u'(t) + \mathbf{x}_{vv}v'(t)\right),$$

得到

$$\frac{\mathrm{D}\gamma'(t)}{\mathrm{d}t} =$$

因爲 $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}$ 與 $\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$, 所以測地線方程式 $\frac{\mathrm{D}\gamma'(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}$ 等價於以下聯立式:

$$\begin{cases} u''(t) + \Gamma^1_{11}(u'(t))^2 + 2\Gamma^1_{12}u'(t)v'(t) + \Gamma^1_{22}(v'(t))^2 = 0 \\ v''(t) + \Gamma^2_{11}(u'(t))^2 + 2\Gamma^2_{12}u'(t)v'(t) + \Gamma^2_{22}(v'(t))^2 = 0。\end{cases}$$

討論 **1.** 觀察測地線方程式的特性。

解**.**

曲面上的測地線方程式理論非常豐富, 以下先探討有關旋轉曲面當中某些特別的測地線。

例題 **2** (第 258–259 頁)**.** 考慮旋轉曲面 (surfaces of revolution)

$$\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)), \quad \text{其中} \quad 0 \le u < 2\pi, a < v < b\text{。}$$

首先計算一些基本的幾何量:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_u = (-f(v)\sin u, f(v)\cos u, 0) \\ \mathbf{x}_v = (f'(v)\cos u, f'(v)\sin u, g'(v)) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

因爲 $E_u = 0, F_u = 0, G_u = 0, E_v = 2ff', F_v = 0, G_v = 2(f'f'' + g'g'')$, 所以

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{f^2((f')^2 + (g')^2)} \begin{bmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{f^2((f')^2 + (g')^2)} \begin{bmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{f^2((f')^2 + (g')^2)} \begin{bmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

所以代入測地線方程式得到

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1 (v')^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{11}^2 (u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2 (v')^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

現以子午線與平行線這兩類曲線進行討論:

(A) <u>子午線 (Meridian)</u> 是指在坐標上選取 $(u = u_0 = \text{常數}, v = v(s))$ 透過 $\mathbf{x}$ 映到旋轉曲面上的曲線, 其中 s 爲弧長參數, 也就是

$$\mathbf{x}(u = u_0, v = v(s)) = (f(v(s))\cos u_0, f(v(s))\sin u_0, g(v(s))),$$

此時 $u'(s) = 0, u''(s) = 0$, 所以測地線方程式的第一式成立。至於第二式, 因爲 s 是弧長參數, 所以 $(f'v')^2 + (g'v')^2 = ((f')^2 + (g')^2)(v')^2 = 1$, 將這個式子再對 s 微分後得到

結論: ______________________________

(B) 平行線 (Parallel) 是指在坐標上選取 $(u = u(s), v = v_0 = \text{常數})$ 透過 $\mathbf{x}$ 映到旋轉曲面上的曲線, 其中 s 爲弧長參數, 也就是

$$\mathbf{x}(u = u(s), v = v_0) = (f(v_0)\cos(u(s)), f(v_0)\sin(u(s)), g(v_0)),$$

由測地方程式的第一式得到 $u''(s) = 0$, 所以 $u'(s) = \text{常數} \neq 0$, 這個常數非零的原因是

再由測地方程式的第二式得到 ______________, 因爲

例題 **3.**

(A1) 利用旋轉曲面的立體圖與你的伴伙確定哪些子午線與平行線爲測地線, 哪些不是。

(A2) 根據測地線的定義 — 切向量對於曲面的共變微分爲零向量 — 在圖形上示意子午線與平行線是否爲測地線。

解.

3 測地曲率

給定可定向曲面 S, 考慮 $\mathbf{w}(t)$ 是沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha} : I \to S$ 上的單位向量場, 因爲 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$ 垂直於 $\mathbf{w}(t)$, 所以這個單位向量場 $\mathbf{w}(t)$ 沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 的共變微分可以寫成

$$\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right](\mathbf{N}(t) \wedge \mathbf{w}(t)), \quad \text{其中} \left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right] = \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}, \mathbf{N}(t) \wedge \mathbf{w}(t) \right\rangle,$$

注意到 $\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right]$ 與 S 的定向有關。(因爲單位法向量 $\mathbf{N}$ 的選取若取反向, 則 $\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right]$ 變號。)

回想一條空間曲線的曲率是觀察單位切向量對於曲線弧長的變化率。現將上述的共變微分概念套用在曲線(落在某個曲面 S) 的單位切向量, 則有以下定義:

定義 4 (第 251 頁)**.** 假設 C 是一條在可定向曲面 S 上的一條可定向的正則曲線, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是以弧長參數表示 C, 則 $\kappa_g = \left[\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{\alpha}'(s)}{\mathrm{d}s}\right]$ 稱爲曲線 C 的 *測地曲率* (geodesic curvature)。若曲線 C 的測地曲率處處爲零, 則稱之 *測地線* (geodesic)。

例題 5 (第 251 頁)**.** 曲線曲率的關係式: $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_{\mathbf{n}}^2$。特別以球上的小圓爲例, 說明曲率的關係。

解.

4 共變微分的另一種表示

以下引理提供了夾角函數的重新表達。

引理 6 (第 253 頁)**.** *假設 $f(t), g(t)$ 是定義在區間 I 上的可微分函數, 並且滿足 $f^2(t) + g^2(t) \equiv 1$。給定 $t_0 \in I$, 記 φ_0 滿足 $f(t_0) = \cos(\varphi_0), g = \sin(\varphi_0)$, 定義函數*

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (f(u)g'(u) - g(u)f'(u))\,\mathrm{d}u$$

則 $\varphi(t)$ 滿足 $\cos(\varphi(t)) = f(t), \sin(\varphi(t)) = g(t), t \in I$ 以及 $\varphi(t_0) = \varphi_0$。

證明: 若要找到 $\varphi(t)$ 滿足 $\cos(\varphi(t)) = f(t), \sin(\varphi(t)) = g(t)$, 那麼 $\varphi(t)$ 必須滿足以下微分方程

$$\begin{cases} -\sin(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f'(t) \\ \cos(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = g'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(t) \cdot \varphi'(t) = -f'(t) \\ f(t) \cdot \varphi'(t) = g'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^2(t) \cdot \varphi'(t) = -g(t)f'(t) \\ f^2(t) \cdot \varphi'(t) = f(t)g'(t) \end{cases}$$

兩式相加後得到 $\varphi'(t) = f(t)g'(t) - g(t)f(t)$, 積分後即得 $\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (f(u)g'(u) - g(u)f'(u))\,\mathrm{d}u$。

以下公式將闡明兩個單位向量場沿著一條曲線的共變微分的差與角度的變化之間的關係。

引理 **7** (第 254 頁)**.** 假設 $\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{w}$ 是兩個沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha}: I \to S$ 的單位向量場, 則

$$\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right] - \left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t},$$

其中 φ 指的是兩向量場之間的夾角函數。

證明: 首先, 由 $\mathbf{v}$ 定義 $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{v}$, 則 $\{\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\}$ 形成在曲面限制在曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 上每一點之切平面之單位正交基底。對於向量場 $\mathbf{w}$, 定義 $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{w}$, 然後將 $\mathbf{w}$ 與 $\overline{\mathbf{w}}$ 用單位正交基底 $\{\mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}\}$ 展開:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= (\cos\varphi)\mathbf{v} + (\sin\varphi)\overline{\mathbf{v}} \\
\overline{\mathbf{w}} &= \mathbf{N} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{N} \wedge ((\cos\varphi)\mathbf{v} + (\sin\varphi)\overline{\mathbf{v}}) = (\cos\varphi)\mathbf{N} \wedge \mathbf{v} + (\sin\varphi)\mathbf{N} \wedge \overline{\mathbf{v}} \\
&= (\cos\varphi)\overline{\mathbf{v}} - (\sin\varphi)\mathbf{v} = -(\sin\varphi)\mathbf{v} + (\cos\varphi)\overline{\mathbf{v}}。
\end{aligned}$$

因爲

$$\mathbf{w}' = -\sin\varphi \cdot \varphi'\,\mathbf{v} + (\cos\varphi)\mathbf{v}' + \cos\varphi \cdot \varphi'\,\overline{\mathbf{v}} + (\sin\varphi)\overline{\mathbf{v}}',$$

利用 $\langle \mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}} \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \mathbf{v}', \overline{\mathbf{v}} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \overline{\mathbf{v}}' \rangle$ 以及 $\|\mathbf{v}\|^2 \equiv 1 \Rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle = 0$ 得到

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{w}', \overline{\mathbf{w}} \rangle &= \langle -\sin\varphi \cdot \varphi'\,\mathbf{v} + (\cos\varphi)\mathbf{v}' + \cos\varphi \cdot \varphi'\,\overline{\mathbf{v}} + (\sin\varphi)\overline{\mathbf{v}}', -(\sin\varphi)\mathbf{v} + (\cos\varphi)\overline{\mathbf{v}} \rangle \\
&= \sin^2\varphi \cdot \varphi' + \cos^2\varphi \langle \mathbf{v}', \overline{\mathbf{v}} \rangle + \cos^2\varphi \cdot \varphi' - \sin^2\varphi \langle \overline{\mathbf{v}'}, \mathbf{v} \rangle = \varphi' + \langle \mathbf{v}', \overline{\mathbf{v}} \rangle,
\end{aligned}$$

因此

$$\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right] - \left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right] = \langle \mathbf{w}', \overline{\mathbf{w}} \rangle - \langle \mathbf{v}', \overline{\mathbf{w}} \rangle = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}。$$

例題 **8** (測地曲率的幾何意義, 第 254 頁)**.** 回想平面曲線的曲率, 它是在研究單位切向量的變化, 把所有單位切向量收集起來放在單位圓上, 就會對應到夾角的變化(設定基準向量例如 x-軸的正向, 然後定義廣義角)。

現在將上述引理與上述的現象做一個類比: 令 C 是一條在 S 上的正則可定向曲線, $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 是 C 的弧長參數表示, 取 $\mathbf{v}(s)$ 是沿著 $\boldsymbol{\alpha}(s)$ 的平行向量場, 取 $\mathbf{w}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$, 則 $\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$。所以測地曲率的幾何意義是:

以下命題是給出共變微分利用坐標表達之公式。

命題 9 (第 255 頁)**.** 假設 $\mathbf{x}(u,v)$ 是一個在定向曲面 S 的鄰域的一個正交參數式, 即第一基本式的交叉項 $F\equiv 0$, 給定 $\mathbf{w}(t)$ 是在 S 上沿著某一條曲線 $\mathbf{x}(u(t),v(t))$ 的可微分單位向量場, 則

$$\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-E_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

其中 $\varphi(t)$ 是從 $\mathbf{x}_u$ 到 $\mathbf{w}(t)$ 的轉角。

證明: 將上述引理套用到 $\mathbf{e}_1=\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}$ 以及 $\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}$ 上, 得到 $\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{dt}\right]=\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t}\right]+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$, 現在要將 $\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t}\right]$ 改寫成命題要的型式, 注意到 $\mathbf{e}_1(t)=\mathbf{e}_1(u(t),v(t))$,

$$\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t}\right]=\left\langle\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t}\right],\mathbf{N}\wedge\mathbf{e}_1\right\rangle=\left\langle\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_1}{\mathrm{d}t},\mathbf{e}_2\right\rangle=\left\langle(\mathbf{e}_1)_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+(\mathbf{e}_1)_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\mathbf{e}_2\right\rangle,$$

因爲 $F=\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\rangle=0$, 所以

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{e}_1)_u,\mathbf{e}_2\rangle&=\left\langle\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}\right)_u,\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right\rangle=\left\langle\frac{\mathbf{x}_{uu}}{\sqrt{E}},\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right\rangle=-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}},\\\langle(\mathbf{e}_1)_v,\mathbf{e}_2\rangle&=\left\langle\left(\frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}\right)_v,\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right\rangle=\left\langle\frac{\mathbf{x}_{uv}}{\sqrt{E}},\frac{\mathbf{x}_v}{\sqrt{G}}\right\rangle=\frac{G_u}{2\sqrt{EG}},\end{aligned}$$

其中用到了以下關係式:

$$\begin{aligned}&\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\rangle=0\Rightarrow\langle\mathbf{x}_{uu},\mathbf{x}_v\rangle=-\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_{vu}\rangle=-\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_{uv}\rangle=-\frac{1}{2}\langle\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u\rangle_v=-\frac{1}{2}E_v\\&\langle\mathbf{x}_{uv},\mathbf{x}_v\rangle=\langle\mathbf{x}_{vu},\mathbf{x}_v\rangle=\frac{1}{2}\langle\mathbf{x}_v,\mathbf{x}_v\rangle_u=\frac{1}{2}G_u。\end{aligned}$$

因此

$$\left[\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\right]=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-E_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}。$$

定理 10 (平行向量場的存在唯一性(第 245, 256 頁))**.** 令 $\boldsymbol{\alpha}:I\to S$ 是 S 上的一條參數曲線, 記 $\mathbf{w}_0\in T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}S, t_0\in I$。則存在唯一沿著 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 的平行向量場 $\mathbf{w}(t)$ 使得 $\mathbf{w}(t_0)=\mathbf{w}_0$。

證明: 首先考慮曲線 $\boldsymbol{\alpha}:I\to S$ 是落在某個正交參數式 $\mathbf{x}(u,v)$ 的坐標鄰域, 因爲 $\mathbf{w}$ 是平行向量場, 由公式 (1) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G_u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}-E_v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\overset{記}{=}B(t),$$

積分後得到

$$\varphi(t)=\varphi_0+\int_{t_0}^{t}B(u)\,\mathrm{d}u。$$

若 $\boldsymbol{\alpha}(I)$ 無法用一個正交參數式覆蓋住, 因爲 I 是緊緻, 所以 $\boldsymbol{\alpha}(I)$ 可用有限個正交參數式覆蓋, 於是逐段使用存在唯一性定理則可完全延拓。