微分幾何 (二) 課程學習單 活動 **9**

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

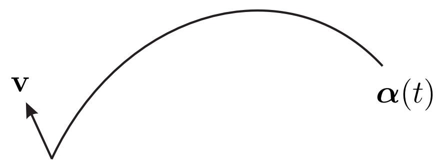
☐ 研究向量沿著曲線的變化, 並認識向量在曲面上的平行移動 (parallel transport)。

☐ 認識曲面上的測地線 (geodesic)。

2 活動討論

討論 **1.** 試與伙伴討論以下問題:

(A) 平面上有一條曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 及在 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 上有一個向量 $\mathbf{v}$, 畫出將 $\mathbf{v}$ 沿著 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 平移的結果 $\mathbf{v}(t)$。



(B) 由剛才畫圖對於「平移」的感覺, 若在直角坐標系中記錄 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, 則 $\mathbf{v}(t) =$ __________。

(C) 在 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 上另取一個向量 $\mathbf{w}$, 然後再將 $\mathbf{w}$ 沿著 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 平移, 觀察 $\mathbf{v}(t)$ 與 $\mathbf{w}(t)$ 之間的關係。

討論 **2.** 如何用數學描述 (刻畫) 一條直線?

(A)

(B)

(C)

(D)

討論 **3.** 猜一猜球面上的切向量如何「平移」? 在球面上畫一條小圓 (球與不通過球心的平面交集出的圓稱爲小圓) $\boldsymbol{\alpha}$, 並給定一個向量 $\mathbf{v}$ (向量 $\mathbf{v}$ 是球面上的切向量, 但不一定是曲線的切向量), 向量沿著 $\boldsymbol{\alpha}$「平移」一圈回到原點後, 兩向量會重疊嗎?

3 向量場的變化與共變微分

定義 **4 (第 241 頁).** 正則曲面上某個開集 $U \subset S$ 的 (切) 向量場 ((tangent) vector field) 指的是 $p \in U$ 到 $\mathbf{w}(p) \in T_pS$ 的一個對應。將向量場用曲面參數式 $\mathbf{x}(u,v)$ 表達, 寫成 $\mathbf{w} = A(u,v)\mathbf{x}_u + B(u,v)\mathbf{x}_v$ 時, 若分量 $A(u,v)$ 與 $B(u,v)$ 都是可微分函數, 則稱向量場是 可微分的 (differentiable)。

定義 **5 (第 241 頁).** 令 $\mathbf{w}$ 是定義於 $U \subset S$ 上的一個可微分向量場, 另有 $p \in U$ 以及 $\mathbf{y} \in T_p(S)$。考慮參數曲線 $\boldsymbol{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}(0) = p, \boldsymbol{\alpha}'(0) = \mathbf{y}$。現將向量場 $\mathbf{w}$ 限制在曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 上, 記爲 $\mathbf{w}(t)$, 定義向量場 $\mathbf{w}$ 在 p 點對於向量 $\mathbf{y}$ 的 共變微分 (covariant derivative) 爲 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}(0)$ 投影到切平面 $T_p(S)$ 的向量, 我們用 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}(0)$ 或 $\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{w}(p)$ 註記這個概念。

現在將上述定義用局部坐標表示: 考慮曲線 $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, 則限制在曲線上的向量場記爲

$$\mathbf{w}(t) = A(t)\mathbf{x}_u(t) + B(t)\mathbf{x}_v(t) = A(u(t),v(t))\mathbf{x}_u(u(t),v(t)) + B(u(t),v(t))\mathbf{x}_v(u(t),v(t)),$$

上式表明所有量都和 t 有關, 所以由鏈鎖律 (chain rule) 得知

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v\right) = A'\mathbf{x}_u + A\left(\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{uv}v'\right) + B'\mathbf{x}_v + B\left(\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v'\right),$$

於是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} &= \left(A' + A\Gamma_{11}^1 u' + A\Gamma_{12}^1 v' + B\Gamma_{21}^1 u' + B\Gamma_{22}^1 v'\right)\mathbf{x}_u \\ &\quad + \left(B' + A\Gamma_{11}^2 u' + A\Gamma_{12}^2 v' + B\Gamma_{21}^2 u' + B\Gamma_{22}^2 v'\right)\mathbf{x}_v。\end{aligned}$$

上式表明 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$ 只與 $\mathbf{y} = u'(0)\mathbf{x}_u + v'(0)\mathbf{x}_v$ 有關, 與 $\boldsymbol{\alpha}$ 的選取無關。此外, $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$ 與克里斯多夫符號 (第一基本式) 有關, 所以 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$ 是曲面的內蘊幾何量。

例題 **6 (第 242 頁).** 計算平面 $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$ 上的向量場 $\mathbf{w}$ 的共變微分。

解.

上面的討論說明: 以前在 $\mathbb{R}^2$ 上計算向量場的變化, 直接計算分量的微分即可, 現在因爲曲面有彎曲, 在討論向量場的變化時, 必須補上後面和曲面彎曲有關的量做修正, 此概念稱爲共變微分。

事實上, 只要向量場在曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 上有定義, 就可以計算向量場沿著曲線切向量的共變微分。

我們利用以下方式定義向量場如何在曲面上進行平移。

定義 7 (第 244 頁). 向量場 $\mathbf{w}$ 沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha}: I \to S$ 若滿足 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} \equiv \mathbf{0}$, 則稱向量場在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上是 平行的 (parallel)。

這個定義符合 討論 **1** (B) 的性質。而且以下命題也將證明它與 討論 **1** (C) 的關係。

命題 8 (第 244 頁). 令 $\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{w}$ 是兩個沿 $\boldsymbol{\alpha}: I \to S$ 上的平行向量場, 則 $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t) \rangle =$ 常數。特別地, $\|\mathbf{v}\|$ 與 $\|\mathbf{w}\|$ 爲常數, 並且 $\mathbf{v}$ 與 $\mathbf{w}$ 之間的夾角不變。

證明:

□

另一方面, 在平面上我們可以很自然地把向量沿著一條曲線平移, 而且平移後的向量也唯一確定。這個概念實際上牽涉到的是以下平行向量場的存在唯一性定理。

命題 9 (平行向量場的存在唯一性 (第 245, 256 頁)). 令 $\boldsymbol{\alpha}: I \to S$ 是 S 上的一條參數曲線, 記 $\mathbf{w}_0 \in T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}S, t_0 \in I$, 則存在唯一沿著 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 的平行向量場 $\mathbf{w}(t)$ 使得 $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$。

這個命題證明的本質是常微分方程式初始值問題的存在唯一性的證明。詳細的證明必須先建立出向量場共變微分的另一個表達式, 我們將留到下一個活動討論。

定義 10 (第 245 頁). 令 $\boldsymbol{\alpha}: I \to S$ 是一條正則參數曲線, 而 $\mathbf{w}_0 \in T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}S, t_0 \in I$。從 t_0 出發, 造出 $\mathbf{w}(t_0)$ 沿著 $\boldsymbol{\alpha}(t)$ 的平行向量場 $\mathbf{w}(t)$ 的過程稱爲 平行移動 (parallel transport)。而向量 $\mathbf{w}(t_1), t_1 \in I$ 也稱爲 $\mathbf{w}_0$ 沿著 $\boldsymbol{\alpha}$ 在 t_1 處的 平行移動 (parallel transport)。

數學上必須檢查的是: <u>向量場平行移動不依賴於曲線的參數化</u>, 理由: 若 $\boldsymbol{\beta}(u)$ 是另一個正則曲線參數式, 則 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ 且 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} \neq 0$。

以下將介紹兩個平行移動的性質:

(A) 若兩個曲面 S 與 $\overline{S}$ 沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 相切, 而 $\mathbf{w}_0$ 是在 $T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}S = T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}\overline{S}$ 上的切向量場, 則 $\frac{\mathrm{D}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$ 在兩個曲面上的結果一樣。

(B) 特別地, 若兩個曲面 S 與 $\overline{S}$ 沿著曲線 $\boldsymbol{\alpha}$ 相切, 而 $\mathbf{w}_0$ 是在 $T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}S = T_{\boldsymbol{\alpha}(t_0)}\overline{S}$ 上的切向量場, 則將 $\mathbf{w}_0$ 沿著曲面平行移動後的結果一樣。

例題 **11 (第 246 頁).** 給定球面上的小圓以及一向量 $\mathbf{w}$, 如何將 $\mathbf{w}$ 沿著小圓平行移動?

解.

4 曲面上的測地線

將向量場沿著曲線的共變微分還有平行移動的概念套用在曲線的切向量上, 則得以下測地線的概念。

定義 **12 (第 247 頁).** 一條參數曲線 $\gamma : I \to S$ 稱為 測地線 (geodesic) 如果 $\gamma'(t)$ 沿著 $\gamma(t)$ 是平行的;換言之, $\frac{\mathrm{D}\gamma'(t)}{\mathrm{d}t} = 0$。

討論 **13.** 考慮球、圓柱、圓錐, 哪些曲線是曲面上的測地線?

解.