微分幾何 (二) 課程學習單 活動 8

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 高斯絕妙定理與曲面論基本定理的更進一步認識。

2 高斯絕妙定理的更進一步認識

例題 **1.** 若 $\mathbf{x}(u,v)$ 是一個 正交參數式 (orthogonal parametrization), 也就是說 $F=0$, 則

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)。$$

解. 因爲

$$\begin{array}{llll}
\Gamma_{11}^1E=\frac{1}{2}E_u & \Rightarrow\Gamma_{11}^1=\frac{E_u}{2E} & \Gamma_{11}^2G=-\frac{1}{2}E_v & \Rightarrow\Gamma_{11}^2=-\frac{E_v}{2G}\\
\Gamma_{12}^1E=\frac{1}{2}E_v & \Rightarrow\Gamma_{12}^1=\frac{E_v}{2E} & \Gamma_{12}^2G=\frac{1}{2}G_u & \Rightarrow\Gamma_{12}^2=\frac{G_u}{2G}\\
\Gamma_{22}^1E=-\frac{1}{2}G_u & \Rightarrow\Gamma_{22}^1=-\frac{G_u}{2E} & \Gamma_{22}^2G=\frac{1}{2}G_v & \Rightarrow\Gamma_{22}^2=\frac{G_v}{2G}
\end{array}$$

所以

$$\begin{aligned}
-EK&=(\Gamma_{12}^2)_u+\Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2+\Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2-(\Gamma_{11}^2)_v-\Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2-\Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2\\
&=\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u-\frac{E_v}{2E}\cdot\frac{E_v}{2G}+\frac{G_u}{2G}\cdot\frac{G_u}{2G}+\left(\frac{E_v}{2G}\right)_v-\frac{E_u}{2E}\cdot\frac{G_u}{2G}+\frac{E_v}{2G}\cdot\frac{G_v}{2G}\\
&=\frac{G_{uu}}{2G}-\frac{G_u^2}{2G^2}-\frac{E_v}{2E}\cdot\frac{E_v}{2G}+\frac{G_u}{2G}\cdot\frac{G_u}{2G}+\frac{E_{vv}}{2G}-\frac{E_vG_v}{2G^2}-\frac{E_u}{2E}\cdot\frac{G_u}{2G}+\frac{E_v}{2G}\cdot\frac{G_v}{2G}\\
&=\frac{G_{uu}}{2G}-\frac{E_v}{2E}\cdot\frac{E_v}{2G}-\frac{G_u}{2G}\cdot\frac{G_u}{2G}+\frac{E_{vv}}{2G}-\frac{E_u}{2E}\cdot\frac{G_u}{2G}-\frac{E_v}{2G}\cdot\frac{G_v}{2G}\\
\Rightarrow K&=-\frac{G_{uu}}{2EG}+\frac{E_v^2}{4E^2G}+\frac{G_u^2}{4EG^2}-\frac{E_{vv}}{2EG}+\frac{E_uG_u}{4E^2G}+\frac{E_vG_v}{4EG^2}。
\end{aligned}$$

另一方面,

$$-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)=-\frac{E_{vv}}{2EG}+\frac{E_v\left(E_vG+EG_v\right)}{4E^2G^2}-\frac{G_{uu}}{2EG}+\frac{G_u\left(E_uG+EG_u\right)}{4E^2G^2},$$

因此

$$K=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v+\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)。$$

註. 在一般參數式下高斯曲率的公式爲

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\begin{vmatrix}-\frac{E_{vv}}{2}+F_{uv}-\frac{G_{uu}}{2} & \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2}\\ F_v-\frac{G_u}{2} & E & F\\ \frac{G_v}{2} & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2}\\ \frac{E_v}{2} & E & F\\ \frac{G_u}{2} & F & G\end{vmatrix}\right)。$$

例題 **2.** 若 $\mathbf{x}(u,v)$ 是一個等溫參數式 (isothermal parametrization), 也就是說 $E=G=\lambda(u,v)>0, F=0$, 則

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\Delta(\ln\lambda),$$

其中 $\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$ 是函數 φ 的 拉普拉斯 (Laplacian)。特別地, 當 $E=G=(u^2+v^2+c)^{-2}, F=0$, 則 $K=4c$。

解. 透過 例題 **1** 的公式, 得到

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\left(\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v+\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u\right)=-\frac{1}{2\lambda}\left((\ln\lambda)_{vv}+(\ln\lambda)_{uu}\right)=-\frac{1}{2\lambda}\Delta(\ln\lambda)。$$

當 $\lambda=(u^2+v^2+c)^{-2}$, 則 $\ln\lambda=-2\ln(u^2+v^2+c)$, 並且

$$(\ln\lambda)_u=-2\cdot\frac{2u}{u^2+v^2+c}=-\frac{4u}{u^2+v^2+c}\qquad(\ln\lambda)_{uu}=-\frac{4}{u^2+v^2+c}+\frac{4u\cdot 2u}{(u^2+v^2+c)^2}$$
$$(\ln\lambda)_v=-2\cdot\frac{2v}{u^2+v^2+c}=-\frac{4v}{u^2+v^2+c}\qquad(\ln\lambda)_{vv}=-\frac{4}{u^2+v^2+c}+\frac{4v\cdot 2v}{(u^2+v^2+c)^2}$$

所以

$$K=-\frac{1}{2\lambda}\left((\ln\lambda)_{uu}+(\ln\lambda)_{vv}\right)=-\frac{1}{2\lambda}\cdot\lambda\left(-4(u^2+v^2+c)+8u^2-4(u^2+v^2+c)+8v^2\right)=4c。$$

例題 **3.** 無法畫一張不失真的地圖。

解.

例題 **4.** 球 (sphere)、柱 (cylinder)、馬鞍 (saddle) $z=x^2-y^2$ 彼此不可能局部保距。

解.

例題 **5.** 驗證以下兩曲面

$$\mathbf{x}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, \ln u), u>0$$
$$\overline{\mathbf{x}}(u,v)=(u\cos v, u\sin v, v)$$

在對應的點 $\mathbf{x}(u,v)$ 與 $\overline{\mathbf{x}}(u,v)$ 具有同樣的高斯曲率, 但是 $\overline{\mathbf{x}}\circ\mathbf{x}^{-1}$ 並非保距映射。這個例子告知: 局部保距可得高斯曲率相同, 反之不對。

解. 欲證 $\overline{\mathbf{x}}\circ\mathbf{x}^{-1}$ 並非保距映射, 需要用到以下命題 (第 231 頁, 單元 4-2 習題 2):

命題 **6.** *Let* $\varphi : S \to \bar{S}$ *be an isometry and* $\mathbf{x} : U \to S$ *a parametrization at* $p \in S$*, then* $\bar{\mathbf{x}} = \varphi\circ\mathbf{x}$ *is a parametrization at* $\varphi(p)$ *and* $E=\overline{E}, F=\overline{F}, G=\overline{G}$*.*

3　曲面論基本定理的更進一步認識

例題 **7.** 試證不可能存在曲面 $\mathbf{x}(u,v)$ 滿足 $E=G=1, F=0, e=1, g=-1, f=0$。

解**.**

例題 **8.** 是否存在曲面 $\mathbf{x}(u,v)$ 滿足 $E=1, F=0, G=\cos^2 u, e=\cos^2 u, f=0, g=1$?

解**.**