

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

- 曲面的內蘊性質 (intrinsic property) 與高斯絕妙定理 (Theorema Egregium)。
- 認識曲面論基本定理。

2 曲面的內蘊性質 (第 235 頁)

在之前的活動中，我們對於曲面的認識，都是將曲面放在 \mathbb{R}^3 中利用單位法向量的改變定義曲面的曲率以了解曲面的彎曲。高斯在幾何上的一個重要貢獻是他證明了高斯曲率是一個 內在的 (intrinsic) 性質。

給定正則可定向的曲面 S ，取 $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ 為曲面的一個參數式，在 $\mathbf{x}(U)$ 上考慮 活動標架 (trihedron) $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ ，現將以下向量全部用活動標架這組基底展開(這裡的記號，下標 1 對應於變數 u ，下標 2 對應於變數 v):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{uu} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{uv} = \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + f \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vu} = \Gamma_{21}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{21}^2 \mathbf{x}_v + f \mathbf{N} \\ \mathbf{x}_{vv} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + g \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_u = a_{11} \mathbf{x}_u + a_{21} \mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{12} \mathbf{x}_u + a_{22} \mathbf{x}_v \end{cases} \quad (1)$$

上述的記號 $\Gamma_{ij}^k, i, j, k = 1, 2$ 在幾何上是專用的記號，稱為 克里斯多夫記號 (Christoffel symbols)。上面的展開式中，有些係數之間是有關係的，例如：從 $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ 得知 _____。

現在想要將 Γ_{ij}^k 求出：

(A) 兩邊對 \mathbf{x}_u 內積：

兩邊對 \mathbf{x}_v 內積：

(B) 兩邊對 \mathbf{x}_u 內積：

兩邊對 \mathbf{x}_v 內積：

(C) 兩邊對 \mathbf{x}_u 內積：

兩邊對 \mathbf{x}_v 內積：

所以 Γ_{ij}^k 可以完全用第一基本式及其微分表達。

現觀察以下關係式:

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_{uu})_v - (\mathbf{x}_{uv})_u = 0 \\ (\mathbf{x}_{vv})_u - (\mathbf{x}_{vu})_v = 0 \\ (\mathbf{N}_u)_v - (\mathbf{N}_v)_u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \mathbf{x}_u + B_1 \mathbf{x}_v + C_1 \mathbf{N} = 0 \\ A_2 \mathbf{x}_u + B_2 \mathbf{x}_v + C_2 \mathbf{N} = 0 \\ A_3 \mathbf{x}_u + B_3 \mathbf{x}_v + C_3 \mathbf{N} = 0 \end{cases}$$

其中 $A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$ 是 E, F, G, e, f, g 及其微分表示。因為 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{N}\}$ 線性獨立, 所以 $A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0, i = 1, 2, 3$ 。舉例來說: 將 $(\mathbf{x}_{uu})_v = (\mathbf{x}_{uv})_u$ 展開得到 $(\Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + e \mathbf{N})_v = (\Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + f \mathbf{N})_u$, 再用微分的乘法規則並用 (1) 式替換後, 進行以下觀察:

$$(A1) \text{ 觀察 } \mathbf{x}_u \text{ 的係數, 得到 } (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} = (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + f a_{11}。$$

$$\Rightarrow e a_{12} - f a_{11} = (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = FK。$$

$$(B1) \text{ 觀察 } \mathbf{x}_v \text{ 的係數, 得到 } (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + f a_{21}。$$

$$\Rightarrow f a_{21} - e a_{22} = (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 = EK$$

$$(C1) \text{ 觀察 } N \text{ 的係數, 得到 } e_v + \Gamma_{11}^1 f + \Gamma_{11}^2 g = f_u + \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f。$$

$$\Rightarrow e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f - \Gamma_{11}^1 f - \Gamma_{11}^2 g$$

$$(A2) \text{ 觀察 } \mathbf{x}_u \text{ 的係數, 得到 } (\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 + g a_{11} = (\Gamma_{21}^1)_v + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + f a_{12}。$$

$$\Rightarrow f a_{12} - g a_{11} = (\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{21}^1)_v - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 = GK。$$

$$(B2) \text{ 觀察 } \mathbf{x}_v \text{ 的係數, 得到 } (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 + g a_{21} = (\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 + f a_{22}。$$

$$\Rightarrow g a_{21} - f a_{22} = (\Gamma_{21}^2)_v + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{22}^2)_u - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2 \Gamma_{21}^2 = FK。$$

$$(C2) \text{ 觀察 } N \text{ 的係數, 得到 } g_u + \Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f = f_v + \Gamma_{21}^1 f + \Gamma_{21}^2 g。$$

$$\Rightarrow f_v - g_u = \Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f - \Gamma_{21}^1 f - \Gamma_{21}^2 g。$$

$$(A3) \text{ 觀察 } \mathbf{x}_u \text{ 的係數, 得到 } (a_{11})_v + a_{11} \Gamma_{12}^1 + a_{21} \Gamma_{22}^1 = (a_{12})_u + a_{12} \Gamma_{11}^1 + a_{22} \Gamma_{21}^1。$$

$$(B3) \text{ 觀察 } \mathbf{x}_v \text{ 的係數, 得到 } (a_{21})_v + a_{11} \Gamma_{12}^2 + a_{21} \Gamma_{22}^2 = (a_{22})_u + a_{12} \Gamma_{11}^2 + a_{22} \Gamma_{22}^2。$$

$$(C3) \text{ 觀察 } N \text{ 的係數, 得到 } a_{11} f + a_{21} g = a_{12} e + a_{22} f, \text{ 這是一個恆等式。}$$

高斯在這些符號中得到了一個驚人的發現:

定理 1 (高斯絕妙定理 (Theorema Egregium), 第 237 頁). 高斯曲率 K 在局部保距的變換下是一個曲面的不變量。

證明:

註. 均曲率 $H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$ 並不是一個內在的不變量, 例如 \mathbb{R}^3 中的平面、圓柱、圓錐之間的關係是局部保距, 但是曲面對於大空間 \mathbb{R}^3 的彎曲程度有別。

註. 往後的幾何發展, 若純粹在 (M, ds^2) 的層級下討論幾何稱為黎曼幾何 (Riemannian geometry)。若牽涉到必須把小空間放到大空間中 $N \subset M$ 的幾何稱為子流形幾何 (submanifold geometry)。

3 曲面論基本定理

實際上, (A1) (B1) (A2) (B2) 這四個等式彼此等價, 我們稱之 高斯方程 (Gauss equation):

$$eg - f^2 = G \left((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \right) \\ - F \left((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right),$$

而 (A3) (B3) 同時成立等價於 (C1) 與 (C2) 同時成立。這兩個方程式稱為 可達技方程 (Codazzi equation):

$$e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + \Gamma_{12}^2 f - \Gamma_{11}^1 f - \Gamma_{11}^2 g \\ f_v - g_u = \Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f - \Gamma_{21}^1 f - \Gamma_{21}^2 g.$$

曲面論基本定理想問的是: 給定區域 $U \subset \mathbb{R}^2$ 上的六個函數 E, F, G, e, f, g , 是否存在正則曲面 $S : U \xrightarrow{\mathbf{x}(u,v)} S \subset \mathbb{R}^3$ 使得其第一基本式為 $I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ 而第二基本式為 $\Pi = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$?

由前面的討論知道: 若這六個函數要形成曲面第一基本式與第二基本式的係數, 那麼它們不能任意給定, 這六個函數之間至少要滿足高斯方程與可達技方程。也就是說, 這三個方程式是讓六個函數得以透過曲面基本式實現的必要要件。我們將這三個方程式稱為曲面論的 相容方程式 (compatibility equations)。

而曲面論要繼續追問的是: 除了上述所說的相容方程式以外, 是否還有其它條件限制了用函數表現曲面形狀的任意性? 這個問題的結果如下:

定理 2 (曲面局部理論基本定理, 第 239, 317–320 頁).

- (a) 存在性 (Existence): 令 $E > 0, F, G > 0, e, f, g$ 是定義於開集合 $V \subset \mathbb{R}^2$ 上的六個可微分的函數。假設這六個函數滿足高斯方程、可達技方程式、以及 $EG - F^2 > 0$, 那麼對任意 $q \in V$, 存在 $U \subset V$ 與可微同胚 $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ 使得正則曲面 $\mathbf{x}(U)$ 以 E, F, G 為第一基本式的係數, e, f, g 為第二基本式的係數。
- (b) 剛性 (rigidity): 如果 U 是連通的 (connected) 而且如果 $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow \bar{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3$ 是另外一個滿足同樣條件的可微同胚映射, 則存在一個 平移映射 (translation) T 以及一個 \mathbb{R}^3 中的線性正交變換 (linear orthogonal transformation) ρ 使得 $\bar{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$ 。

附錄：方程式的等價

以下將證明高斯方程 (A1) (B1) (A2) (B2) 彼此等價：將 $E \times (A1)$ 與 $F \times (B1)$ 兩者相比，得到

$$\begin{aligned} EFK &= E \left((\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - (\Gamma_{11}^1)_v - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \right) \\ &= F \left((\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 \right). \end{aligned} \quad (2)$$

另一方面，由 $\frac{1}{2}E_{uv} = \frac{1}{2}E_{vu}$ 得到

$$(\Gamma_{11}^1)_v E + \Gamma_{11}^1 E_v + (\Gamma_{11}^2)_v F + \Gamma_{11}^2 F_v = (\Gamma_{12}^1)_u E + \Gamma_{12}^1 E_u + (\Gamma_{12}^2)_u F + \Gamma_{12}^2 F_u,$$

再將 E_v, E_u, F_v, F_u 的公式代入後得到

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{11}^1)_v E + \Gamma_{11}^1 (2\Gamma_{12}^1 E + 2\Gamma_{12}^2 F) + (\Gamma_{11}^2)_v F + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F + \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) \\ &= (\Gamma_{12}^1)_u E + \Gamma_{12}^1 (2\Gamma_{11}^1 E + 2\Gamma_{11}^2 F) + (\Gamma_{12}^2)_u F + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F + \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G). \end{aligned}$$

上式中，帶有 G 的項都可以消掉，而將帶有 E 的項整理到等式左邊；將帶有 F 的項整理到等右邊，就會發現它和 (2) 式完全一樣。

換言之，由二次微分的交換性 $E_{uv} = E_{vu}, F_{uv} = F_{vu}, G_{uv} = G_{vu}$ 將分別證明 (A1) 與 (B1) 等價；(B1) 與 (A2) 等價；以及 (A2) 與 (B2) 等價。

以下欲證 (A3) (B3) 同時成立與 (C1) (C2) 同時成立等價：首先注意到 $C_1 = 0$ 等價於

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x}_{uuv}, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{x}_{uvu}, \mathbf{N} \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}_v \rangle - \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N} \rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}_u \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle \right) - \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}_v \rangle - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle \right) + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}_u \rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_u \rangle - \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{N}_v \rangle + \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{N}_u \rangle = 0. \end{aligned}$$

同理， $C_2 = 0$ 等價於

$$\langle \mathbf{x}_{vvu}, \mathbf{N} \rangle - \langle \mathbf{x}_{vuv}, \mathbf{N} \rangle = -\frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_v \rangle - \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{N}_u \rangle + \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{N}_u \rangle + \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{N}_v \rangle = 0.$$

另一方面，若對於 $\mathbf{N}_{uv} - \mathbf{N}_{vu} = 0$ ，兩邊對 \mathbf{x}_u 內積後得到

$$A_3 E + B_3 F = \langle \mathbf{N}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle - \langle \mathbf{N}_{vu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_u \rangle - \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle - \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0.$$

對於 $\mathbf{N}_{uv} - \mathbf{N}_{vu} = 0$ 兩邊對 \mathbf{x}_v 內積後得到

$$A_3 F + B_3 G = \langle \mathbf{N}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{N}_{vu}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle - \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle - \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0.$$

所以 $C_1 = 0, C_2 = 0$ 等價於 $A_3 = 0, B_3 = 0$ 。

在第 1 頁的討論得到

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u \\ F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v \\ \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$