

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

- 高斯曲率與均曲率的另一個刻畫。
- 高斯曲率、函數極值與圓錐曲線的分類之間的關係。

2 高斯映射的方向性

討論 1. 討論並觀察以下現象:

- (A1) 拿一枝筆放在球面上示意為單位法向量, 筆沿著球面上的某個封閉曲線繞一圈, 觀察筆頭與筆尾的順逆向關係。
- (A2) 拿一枝筆放在馬鞍面上示意為單位法向量, 筆沿著馬鞍面上的某個封閉曲線繞一圈, 觀察筆頭與筆尾的順逆向關係。

解.

討論 2. 何謂重積分的均值定理 (The Mean Value Theorem for Double Integrals)?

解.

定理 3 (第 169 頁). 若曲面 S 上有一點 p 的高斯曲率 $K(p) \neq 0$, 令 V 是 p 附近的一個連通區域使得高斯曲率都不變號, 則

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A},$$

其中 A 指的是曲面 S 上包含 p 的區域 $W \subset V \subset S$ 的面積; 而 A' 指的是區域 W 經過高斯映射得到在單位球上的映像 (image) 之面積. 此外, 還有一些條件的限制.

證明: 給定 S 在 p 附近的一個參數式 $\mathbf{x}(u, v)$, 其中 $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$ 使得 $\mathbf{x}(R) = W$, 則區域 W 的面積為

$$A = \iint_R \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv.$$

另一方面, 因為區域 W 的高斯映射可以用參數式與法向量兩者合成來表達, 於是區域 W 經過高斯映射對應到單位球上的映像之面積為

$$A' = \iint_R \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| \, du \, dv,$$

因為

$$\begin{cases} \mathbf{N}_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v \\ \mathbf{N}_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v \end{cases} \Rightarrow \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| = |K| \cdot \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|$$

所以由重積分的均值定理得知

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A} = \lim_{\text{Area}(R) \rightarrow 0} \frac{\iint_R |K| \cdot \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv}{\iint_R \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv} = \lim_{\text{Area}(R) \rightarrow 0} \frac{|K(\xi)| \iint_R \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv}{\iint_R \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| \, du \, dv} = K(p).$$

討論 4. 若要完成 定理 3 的論述, 還需要追加什麼條件?

解.

定理 5. 均曲率的幾何意義: $H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_{\mathbf{n}}(\theta) \, d\theta$, 其中 $\kappa_{\mathbf{n}}(\theta)$ 指的是法曲率.

證明: 由 歐拉公式 (Euler formula): $\kappa_{\mathbf{n}} = \cos^2 \theta \kappa_1 + \sin^2 \theta \kappa_2$, 直接計算得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_{\mathbf{n}}(\theta) \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \kappa_1 + \sin^2 \theta \kappa_2) \, d\theta$$

3 二變數函數的極值判別法

對於一個二變數函數 $f(x, y)$ ，假設其二次偏導數都是連續函數，該如何判別函數臨界點的類型呢？

首先，針對某個點 $p = p(x_0, y_0)$ ，利用泰勒多項式重新表達函數在 $p(x_0, y_0)$ 附近的函數，由單變數函數討論的結果，相信大家接受以下式子會是多變數函數以 $p(x_0, y_0)$ 為中心的泰勒多項式表示法：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(p) + \frac{1}{1!} (f_x(p)(x - x_0) + f_y(p)(y - y_0)) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (f_{xx}(p)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(p)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(p)(y - y_0)^2) \\ &\quad + \text{對 } (x - x_0) \text{ 與 } (y - y_0) \text{ 而言的高階無窮小量,} \end{aligned}$$

若 $p(x_0, y_0)$ 為二變數函數 $f(x, y)$ 的臨界點，則函數在 p 處同時滿足 $f_x(p) = 0$ 與 $f_y(p) = 0$ ，因此在 p 附近的點 (x, y) ，都有

$$\begin{aligned} &f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{2!} (f_{xx}(p)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(p)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(p)(y - y_0)^2) \\ &\quad + \text{對 } (x - x_0) \text{ 與 } (y - y_0) \text{ 而言的高階無窮小量} \\ &= \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \text{高階無窮小量。} \end{aligned}$$

其中矩陣

$$\text{Hess}(f)(p) \stackrel{\text{定義}}{=} \begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

稱為函數 $f(x, y)$ 在 $p(x_0, y_0)$ 點的赫士矩陣 (Hessian matrix)。

寫成這樣之後，我們就可以利用矩陣對角化的理論處理問題。因為函數 $f(x, y)$ 的二次偏導數是連續函數，所以赫士矩陣 $A = \text{Hess}(f)(p)$ 是一個對稱矩陣，於是矩陣可以正交對角化，也就是存在矩陣 P 滿足 $P^T P = P P^T = I$ ，並且存在對角矩陣 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 使得 $D = P^T A P$ ，或者說是 $A = P D P^T$ 。於是我們可以引進新的坐標系 (\tilde{x}, \tilde{y}) — 經過旋轉與平移之下，會有

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} + \text{高階無窮小量} \\ &= \frac{1}{2!} (\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2) + \text{高階無窮小量,} \end{aligned}$$

所以判斷函數在臨界點的行為，其「主要部份」就是由 $\frac{1}{2!} (\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2)$ 決定，而函數 $z(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2!} (\lambda_1(\tilde{x})^2 + \lambda_2(\tilde{y})^2)$ 的長相，可以根據 λ_1 與 λ_2 的正負號分類。另一方面，因為矩陣的行列式滿足 $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ，所以

$$\begin{aligned} \det(D) &= \det(P^T A P) = \det(P^T) \det(A) \det(P) = \det(P^T) \det(P) \det(A) \\ &= \det(P^T P) \det(A) = \det(I) \det(A) = \det(A), \end{aligned}$$

於是我們可以直接觀察原赫士矩陣的行列式 $\det(A) = \det(\text{Hess}(f)(p))$ 還有它的主對角線的第一個元素的正負號, 就可以對二變數函數的極值下結論:

- 若 $\det(A) > 0$ 且 $f_{xx}(p) > 0$, 則 $f(p)$ 為 _____。

理由: 因為這兩個條件等同於 $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 且其中一個為正, 所以另一個亦為正, 圖形長相如開口向上的橢圓拋物面。

- 若 $\det(A) > 0$ 且 $f_{xx}(p) < 0$, 則 $f(p)$ 為 _____。

理由: 因為這兩個條件等同於 $\lambda_1\lambda_2 > 0$, 且其中一個為負, 所以另一個亦為負, 圖形長相如開口向下的橢圓拋物面。

- 若 $\det(A) < 0$, 則 $f(p)$ _____。

理由: 因為這兩個條件等同於 $\lambda_1\lambda_2 < 0$, 所以一正一負, 圖形長相如馬鞍面。

4 圓錐曲線的判別式

討論 6. 試判斷圓錐曲線的形狀, 方程式代表的是橢圓? 拋物線? 還是雙曲線? 如何得知其結果?

(B1) $x^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - 2y - 1 = 0$ 。

(B2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ 。

(B3) $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$ 。

解.