

學號: _____

姓名: _____

你的伙伴: _____

1 單元介紹與學習目標

認識曲面的第二基本式 (second fundamental form)。

2 預備知識 (第 217– 219 頁)

討論 1. 以下將複習線性代數的相關知識。給定內積空間 $(V^n, \mathbb{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 及其線性映射 $A : V^n \rightarrow V^n$,

(A) 若線性映射 A 滿足什麼條件時, 稱它為 自伴隨映射 (self-adjoint map)?

(B) 若在內積空間中選取一組有序單位正交基底 (ordered orthonormal basis) $\beta = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, 而將自伴隨映射用矩陣 $[A]_\beta$ 表示時, 這個矩陣有什麼性質?

(C) 定義 $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, 驗證映射 B 是雙線性 (bilinear) 的對稱式 (symmetric form)。

(D) 定義二次式 (quadratic form) $Q(\mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, 試將 $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 用 Q 表達。

(E) 什麼時候一個矩陣可以 正交對角化 (orthogonal diagonalization)? 它與上述討論之間的關係為何?

解: 給定矩陣 A , 若在存可逆且對稱的矩陣 P 以及對角矩陣 D 使得 $\begin{cases} D = P^{-1}AP \\ PP^T = P^T P = \text{Id}, \end{cases}$ 則稱矩陣 A 是可以正交對角化的。由

$$P^T P = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle & \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

這件事表明正交對角化的取名之由來。

線性代數的一個定理是說: 若 A 是 _____, 則 A 可以正交對角化。此外, 線性代數提供一套標準作業流程 (SOP) 可以實現正交對角化。

例: 觀察線性變換 A , 以 $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ 表達時。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$,

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix} = (\tilde{v}_1)^2 + 3(\tilde{v}_2)^2 \end{aligned}$$

其中上述的關係是重選有序基底 $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{e}_2$ 以及 $\tilde{\mathbf{e}}_2 = -\sin \frac{\pi}{4} \mathbf{e}_1 + \cos \frac{\pi}{4} \mathbf{e}_2$ 之下, 則 $\mathbf{v} = \tilde{v}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2$ 。

3 曲面的第二基本式

在活動 2 中介紹了高斯映射及其微分映射之幾何意義，現在要繼續對此概念探討其性質。

定理 2 (第 142 頁). 高斯映射 $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ 在一點 $p \in S$ 的微分映射 $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{S}^2$ 是一個自伴隨 (*self-adjoint*) 的線性映射。

證明: 給定 $T_p S$ 的一組基底 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, 現在要驗證: $\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, d\mathbf{N}_p(\mathbf{w}_2) \rangle$ 。

記 $\mathbf{x}(u, v)$ 為 S 在 p 附近的一個參數式, 而 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 為 $T_p(S)$ 的一組基底。若 $\alpha(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ 是在 S 上的一條參數曲線, 並且 $\alpha(0) = p$, 則

$$d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)) = d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u u'(0) + \mathbf{x}_v v'(0)) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{N}(u(t), v(t)) \right|_{t=0} = \mathbf{N}_u u'(0) + \mathbf{N}_v v'(0)。$$

特別地, 我們有 $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_u) = \mathbf{N}_u$ 與 $d\mathbf{N}_p(\mathbf{x}_v) = \mathbf{N}_v$ 。

由此, 若要證 $d\mathbf{N}_p$ 自伴隨, 只要再證明 $\langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{N}_v \rangle$ 即可。

因為 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_u \rangle = 0$ 與 $\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_v \rangle = 0$, 將這兩式分別對 v 與 u 求導, 則有

$$\begin{cases} \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \langle \mathbf{N}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}_v, \mathbf{x}_u \rangle。$$

□

定義 3 (第 143 頁). 正則曲面 S 在 p 點的第二基本式 (second fundamental form) 定義為

$$\mathbb{I}\mathbb{I}_p(\mathbf{v}) = -\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle。$$

4 用曲線理解曲面的第二基本式

定義 4 (第 143 頁). 考慮在正則曲面 S 上的一條正則曲線 C , 而 $p \in C \subset S$, 記 κ 是曲線在 p 點的曲率, 而 $\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$, 其中 \mathbf{n} 為曲線 C 在 \mathbb{R}^3 中的單位法向量; 而 \mathbf{N} 是曲面 S 的單位法向量。定義 $\kappa_{\mathbf{n}} = \kappa \cos \theta$ 為曲線 C 對於 S 在 p 的法曲率 (normal curvature)。

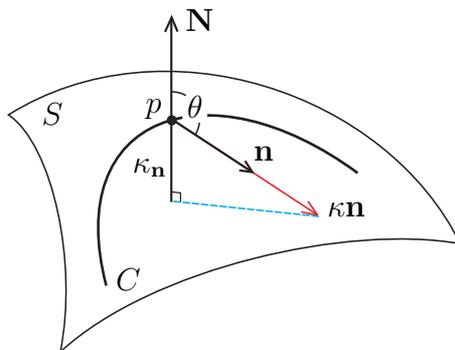


圖 1: 曲線 C 對於 S 在 p 的法曲率。

□ 幾何意義: 法曲率 $\kappa_{\mathbf{n}}$ 是 _____。

第二基本式的另一種解讀

考慮 $p \in C \subset S$, 其中 $C: I \rightarrow \alpha(s), \alpha(0) = p$, 且 s 為弧長參數, 而 $\mathbf{N}(s)$ 是曲面上的單位法向量限制在曲線 C 的映射, 因為 $\langle \mathbf{N}(s), \alpha'(s) \rangle \equiv 0$, 所以

$$\frac{d}{ds} \langle \mathbf{N}(s), \alpha'(s) \rangle = \langle \mathbf{N}'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \mathbf{N}(s), \alpha''(s) \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \mathbf{N}'(s), \alpha'(s) \rangle = -\langle \mathbf{N}(s), \alpha''(s) \rangle,$$

於是

$$\Pi_p(\alpha'(0)) = -\langle d\mathbf{N}_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = -\langle \mathbf{N}'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle \mathbf{N}(0), \alpha''(0) \rangle = \langle \mathbf{N}, \kappa \mathbf{n} \rangle(0) = \kappa_{\mathbf{n}}(p).$$

討論 5. 將上面的式子進行幾何的解釋。

定理 6 (Meusnier, 第 144 頁). 在 S 上通過 $p \in S$ 的兩條曲線, 若它們在 p 點有著相同的切線, 則它們的法曲率也相同。

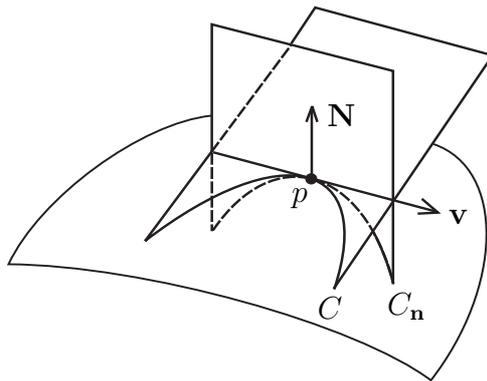


圖 2: 曲線 C 與 C_n 在 p 點沿著 \mathbf{v} 方向具有相同的法曲率。

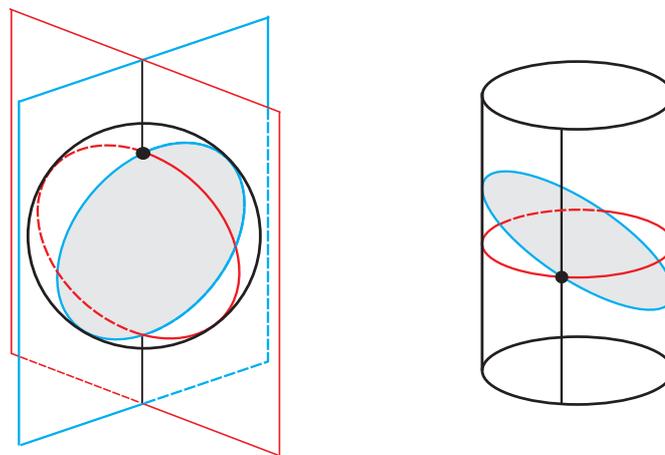


圖 3: 球 (sphere) 與圓柱 (circular cylinder) 的法截面 (normal section)。

5 主曲率與主方向

現在重回線性映射 $d\mathbf{N}_p$ 的討論。由線性代數理論知道：給定 $p \in S$ ，在 $T_p S$ 上存在單位正交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 使得 $d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_1) = -\kappa_1 \mathbf{e}_1$, $d\mathbf{N}_p(\mathbf{e}_2) = -\kappa_2 \mathbf{e}_2$ ，此外， κ_1 與 κ_2 分別是第二基本式限制於 $T_p(S)$ 上的單位圓之最大值與最小值。

定義 7 (第 146 頁). κ_1 與 κ_2 稱為主曲率 (principle curvature); 其固有向量稱為主方向 (principle direction)。

若 $\mathbf{v} \in T_p S$, $\|\mathbf{v}\| = 1$ ，將 \mathbf{v} 對於單正交基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 表示，則 $\mathbf{v} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$ ，計算對於向量 \mathbf{v} 的法曲率：

$$\kappa_{\mathbf{n}} = \Pi_p(\mathbf{v}) = -\langle d\mathbf{N}_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = -\langle d\mathbf{N}_p(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2), \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \rangle$$

這個公式稱為 歐拉公式 (Euler formula)。

定義 8 (第 148 頁). 令 $p \in S$ 與 $d\mathbf{N}_p : T_p S \rightarrow T_p S$,

(A) 定義 $d\mathbf{N}_p$ 的行列式為 高斯曲率 (Gauss curvature), 記成 K 。

(B) 定義 $d\mathbf{N}_p$ 的跡之一半再取負號為 均曲率 (mean curvature), 記成 H 。

註. 現將定義改寫成用主曲率的方式表示：

(A) $d\mathbf{N}_p$ 的行列式為 $\det(d\mathbf{N}_p) = (-\kappa_1)(-\kappa_2) = \kappa_1 \kappa_2$ 。

(B) $d\mathbf{N}_p$ 的跡之一半再取負號為 $-\frac{1}{2}(\text{tr}(d\mathbf{N}_p)) = -\frac{1}{2}(-\kappa_1 - \kappa_2) = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$ 。

定義 9 (第 148 頁). 正則曲面 S 上一點 p ，根據高斯曲率的符號有不同的名稱：

- (1) 若 $\det(d\mathbf{N}_p) > 0$ ，稱為 橢圓點 (elliptic)。
- (2) 若 $\det(d\mathbf{N}_p) < 0$ ，稱為 雙曲點 (hyperbolic)。
- (3) 若 $\det(d\mathbf{N}_p) = 0$ 且 $d\mathbf{N}_p \neq \mathbf{0}$ ，稱為 拋物點 (parabolic)。
- (4) 若 $d\mathbf{N}_p = \mathbf{0}$ ，稱為 平面點 (planar)。