微分幾何(二) 課程學習單 活動 1

學號: ______________ 姓名: ______________ 你的伙伴: ______________

1 單元介紹與學習目標

☐ 探索曲面的定向 (orientability) 並介紹封閉曲面分類定理。

2 認識曲面的定向

討論 1. 拿起紙條, 一位同學根據上方圖示將紙條的短邊相黏; 另一位同學根據下方圖示將紙條的短邊相黏。

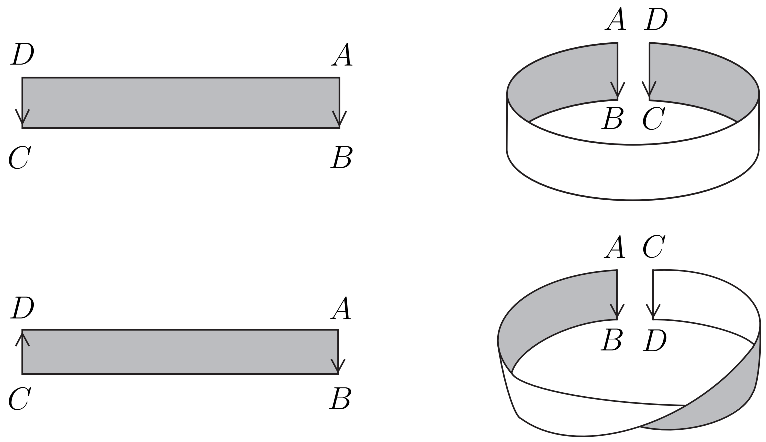

圖 1: 將紙條的短邊依箭頭指向相黏。

想像這兩個紙條是車道, 現在有一輛小車開始在車道上往前行駛。

(A1) 當小車繞了一圈回到原處(坐標位置一模一樣) 時, 小車的方向有什麼不同?

(A2) 觀察這兩座車道, 這兩座車道有什麼不同的地方?

(A3) 若將紙條沿著中線剪開, 先猜一猜會最後會發生什麼事? 然後確實將紙條剪開以對照你的想法。

解.

討論 **2.** 在沒有道具的情況下, 我們要如何紙上談兵(回答 討論 **1** 的所有問題)?

解.

討論 **3.**

(B1) 如果再將紙條沿著中線剪開, 想一想會發生什麼事? 然後確實將紙條剪開並對照你當初的想法。

(B2) 如果原先的紙條三等份剪開, 想一想會發生什麼事? 然後確實將紙條剪開並對照你當初的想法。

解.

3 曲面的定向 (第 105 頁)

在 討論 **1** 中, 我們用小車沿著車道行駛一圈後, 車子有沒有上下顛倒的方式來區分這兩個曲面的不同。前者是一般的帶狀物, 我們說它有兩個面 (two-sided surface), 有著色的面與沒有著色的面各自形成一個區域。關於第二個曲面, 稱爲 莫比烏斯帶 (Möbius strip), 它只有一個面 (one-sided surface), 有著色的面與沒有著色的面互相連通。

上述的觀察在數學上所牽涉到的是一個曲面是否可以定向 (orientable) 的問題。給定一個正則曲面 S, 在 $p \in U \subset S$ 附近用參數化 $\mathbf{x}(u,v)$ 表示, 在切平面 $T_p(S)$ 上可以指定一組有序基底 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$。若 $p \in U$ 上使用另一組參數化方式 $\overline{\mathbf{x}}(\overline{u},\overline{v})$, 對於切平面 $T_p(S)$ 上有另一組有序基底 $\{\overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}}, \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}}\}$。

現在要討論這兩組基底之間的轉換關係: 因爲 $\overline{\mathbf{x}}(\overline{u},\overline{v}) = \mathbf{x}(u(\overline{u},\overline{v}), v(\overline{u},\overline{v}))$, 由鏈鎖律得到

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}} = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}} = \mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}} \\ \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_v \end{bmatrix}$$

定義 4 (第 105 頁)**.** 我們說在 $T_p(S)$ 上的兩組有序基底 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 與 $\{\overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}}, \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}}\}$ 具有一樣的定向 (have the same orientation) 如果 雅可比行列式 (Jacobi determinant) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ 爲正, 其中

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \overline{u}} & \frac{\partial v}{\partial \overline{v}} \end{bmatrix}$$

定義 5 (第 106 頁)**.**

(a) 一個正則曲面 S 稱爲 可定向的 (orientable) 如果存在一組可以覆蓋 S 的坐標鄰域滿足: 若 $p \in S$ 屬於某兩個坐標鄰域下, 則坐標變換的雅可比行列式爲正。這種選擇方法稱爲 S 的一個 定向 (orientation)。

(b) 一個正則曲面 S 若不存在上述性質的坐標鄰域則稱曲面是 不可定向的 (nonorientable)。

由上述曲面定向之定義有幾件事情可再澄清:

(A) 根據 討論 **1** 的經驗, 一個可定向的曲面會有兩種定向的選擇方法。

(B) 從定義看來, 曲面的定向只與切向量的有序基底 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ 的順序有關, 但是我們在比較兩個曲面的異同時, 是用小車的頭頂前行一圈回到原處時是否顛倒來區分, 那麼這兩個概念之間有什麼關聯呢?

給定一個正則曲面 S, 在 $p \in U \subset S$ 附近用參數化 $\mathbf{x}(u,v)$ 表示, 在切平面 $T_p(S)$ 上可以指定一組有序基底 $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, 由此可以定義 單位法向量 (unit normal vector)

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}。$$

另一方面, 由上述的計算也可以得到

$$\overline{\mathbf{x}}_{\overline{u}} \wedge \overline{\mathbf{x}}_{\overline{v}} = \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \overline{u}}\right) \wedge \left(\mathbf{x}_u \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + \mathbf{x}_v \frac{\partial v}{\partial \overline{v}}\right) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\, \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v,$$

所以

於是曲面是否可以定向的問題與小車走一圈回到原處時頭頂是否顛倒的問題相同(車頂的方向就是對著單位法向量)。而前者定義的特色在於: 它只要用 $\mathbf{x}_u$ 與 $\mathbf{x}_v$ 的方式就能定義, 不需要再藉助 $\mathbf{N}$。

附錄: 封閉曲面分類問題 (第 276 頁)

這個活動的最後想要補充在 拓樸學 (topology) 中的一個大定理:

定理 **6.** 二維封閉(緊緻無邊)的曲面在同胚視爲相同的意義下必屬於以下情形之一*:*

(1) 若曲面可定向, 則爲球面, 或是球面挖掉偶數個圓盤再沿著邊兩兩回黏上一個把手。

(2) 若曲面不可定向, 則爲球面挖掉若干個圓盤, 然後沿邊逐一黏上一個莫比烏斯帶。

一個曲面的 歐拉數 (Euler number) 指的是曲面上的一種三角分割下頂點個數 V 減去邊的個數 E 再加上面的個數 F, 也就是 $\chi(S) = V - E + F$。歐拉數的定義與三角分割無關。

在可定向曲面的情況, 記 g 爲添加把手的個數, 則曲面的歐拉數爲 $2-2g$。在不可定向曲面的情況, 記 k 爲添加莫比烏斯帶的個數, 則曲面的歐拉數爲 $2-k$。

問題**.** 你可以想像 $k=1$ 還有 $k=2$ 的不可定向曲面之長相嗎?