

111 年 6 月 15 日(三) 微分幾何課程說明

1 課程目標

- (1) 介紹大域版本的高斯-伯內定理, 給予證明, 並介紹幾個關於高斯-伯內定理的數學應用。
- (2) 認識向量場的奇異點與指標, 介紹龐加萊定理, 用來說明髮漩的存在性。
- (3) 介紹幾個與高斯絕妙定理相關的影片, 讓高斯教你如何正確吃披薩。

2 課程內容

請由以下幾個管道擇一進入課程影片, 搭配課程學習單學習。

- 從 QR code 掃描進入影片或是輸入每個影片的 YouTube 網址進入。
- 進入網頁 <http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/110Geometry.html> 相應的連結觀看影片。

活動 12-04 <https://youtu.be/0sdrFNCZz5M>



影片將給出高斯-伯內定理的大域版本。前一個單元是在討論局部版本, 也就是區域與圓盤同胚的情況。而現在討論的是二維的正則區域, 而得到的結果, 在等式的左邊仍然是三個幾何量的相加, 而等式的右邊應修正成 $2\pi\chi(R)$, 其中 $\chi(R)$ 是區域 R 的歐拉示性數。

活動 12-05 https://youtu.be/X-08aQk6_dE



關於高斯-伯內定理大域版本的證明, 首先對於區域 R 進行三角劃分使得每個小三角形區域滿足局部版本的所有條件, 於是就可以列出公式。將所有式子相加之後, 公式的前兩項已經完成, 至於第三項還有右式必須仔細討論。

活動 12-06 <https://youtu.be/UUOKC6Hy61k>



透過外角與內角的關係, 頂點在邊上產生平角、區域內部的頂點角度和形成一個周角這三件事情逐一地替換, 就可以把這些量轉換成點、線、面的個數的資訊, 最後這些量又可以整合成歐拉示性數。

活動 12-07 https://youtu.be/qRJ-R44S_4E



這個影片想要提出幾個高斯-伯內定理的應用。(A1) (A2) 高斯曲率的重積分 — 稱為全曲率 (total curvature) — 是一個幾何不變量。(B1) (B2) (B3) 曲面上高斯曲率的正、負號與它是否同胚於球的關係。

活動 12-08

<https://youtu.be/-pdcI1pmmq4>



這個影片的前半段是要討論高斯曲率與測地線的關係。(B4) 標準球與球上任兩條封閉測地線的關係。(B5) 負曲率的測地線圍出來的區域很複雜。(B6) 非負高斯曲率的簡單區域之邊界沒那麼簡單。(B7) 測地三角形的內角和與高斯曲率的關係。

活動 12-09

<https://youtu.be/sG0xmgaUn6I>



這一個影片要介紹的是向量場的奇異點，我們對於向量場不可微分的點稱為奇異點，而奇異點我們可以定義指標，區域上的向量場指標加總與這個區域的歐拉示性數有關。其中一個應用可以解釋髮漩的存在性。

活動 12-10

https://youtu.be/5vF3p7MSk_E



從第一次上課的問卷回顧這一年的微分幾何課程，希望各位在這一年當中得到許多微分幾何的故事，甚至是回答一些日常生活中的問題。微分幾何其實是一個相當生活化的數學學問，從中可以認識世界的美妙。

這門課因為疫情的關係原本答應要請班上同學吃披薩之事看來必須食言了，感到抱歉。以下有三個影片跟大家分享：

- 賴以威數感實驗室如何吃披薩 <https://www.youtube.com/watch?v=6VrOUjP7o-s&t=2s>
- Numberphile <https://www.youtube.com/watch?v=gi-TBlh44gY&t=32s>
- 李永樂談微分幾何之高斯絕妙定理 https://www.youtube.com/watch?v=mh_gjwSXTVg