

# 111 年 6 月 1 日 (三) 微分幾何課程說明

## 1 課程目標

- (1) 活動 11 的後半段是要給出測地曲率的幾何意義；此外，透過共變微分的局部坐標表示法，可以證明平行向量場的存在唯一性。
- (2) 活動 12 主要是介紹高斯-伯內定理，還有高斯曲率的另一個幾何意義。在此之前所需的預備知識是格林定理，並且從平面上的多變形進行觀察，先行探索哪些是不變量。另外，也觀察球面上的三角形的內角和。

## 2 課程內容

請由以下幾個管道擇一進入課程影片，搭配課程學習單學習。

從 QR code 掃描進入影片或是輸入每個影片的 YouTube 網址進入。

進入網頁 <http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/110Geometry.html> 相應的連結觀看影片。

---

活動 10-08 <https://youtu.be/iRaMwCA4DTI>



這個影片可以把它視為純分析的問題：若有兩個函數平方和處處為 1，那麼這兩個函數就可以分別和餘弦函數與正弦函數對應，而函數的變數與三角函數的角度之間有一個變數變換的關係，而且有一個很好的表達。各位也可以想一想如何用幾何的方式解釋此結果。

---

活動 10-09 <https://youtu.be/D57PW1IhhmM>



影片要介紹的引理是：在曲面上的兩個單位向量場，它們對於曲面的共變微分的差異大小為向量場夾角函數的變化。若對這個引理不太理解的話，應先退回在  $\mathbb{R}^2$  上的兩個單位向量場體會此引理，再進行類比。另一方面，證明的過程只是用了線性代數的討論而已。

---

活動 10-10 [https://youtu.be/pZFEx50H\\_D8](https://youtu.be/pZFEx50H_D8)



影片要給出曲線測地曲率的幾何意義：因為曲線的測地曲率是觀察單位切向量的變化投影到切平面上的分量，取一組在曲線上的平行個量場（將它視為測量的基準），搭配前一個影片介紹的引理，則得到測地曲率是曲線切向量對於該平行單位向量場的夾角變化率。

---

活動 10-11 [https://youtu.be/OR\\_MsKx6qYY](https://youtu.be/OR_MsKx6qYY)



曲面上的單位向量場的共變微分，利用坐標方式寫出來的公式，是這個影片要學習的重點。這個公式得求得，一方面可以幫助我們證明平行向量場的存在唯一性定理，另一方面，它會在下一個單元中在證明高斯-伯內定理中用到。

---

---

活動 10-12

<https://youtu.be/Ire5S4c1VHU>



這個影片要證明平行向量場的存在唯一性。當我們在坐標中選定  $e_1 = \frac{\mathbf{X}}{\sqrt{E}}$  為單位向量場，然後指定初始向量  $\mathbf{w}_0$ ，要得到處處與  $\mathbf{w}_0$  的向量場  $\mathbf{w}(t)$ ，從前面的影片知道，只要確定夾角  $\varphi(t)$  的大小即可，因為  $\varphi'(t) = B(t)$ ，所以可得  $\varphi(t)$ 。

---

活動 11-01

<https://youtu.be/Zz37yvngQvQ>



活動 11 要介紹高斯-伯內定理還有高斯曲率的另一個解釋。在此之前，先介紹向量微積分的一個經典定理：格林定理。它是微積分基本定理對於維度與區域的推廣。影片是用類比的方式介紹定理，對證明有興趣者可以看微積分的課程影片。

---

活動 11-02

<https://youtu.be/BwnLkQ7RAFM>



在介紹高斯-伯內定理之前，我們先回想中學數學中所學到的平面上多變形的不變量。另一方面，我們研究觀察球面上的三角形（由三個邊所圍成的區域），探討它的內角和，它們還會是 180 度嗎？

---

活動 11-03

<https://youtu.be/Ss7Z9jeD6qA>



在介紹高斯-伯內定理之前，我們需要仔細定義簡單、封閉、片段正則曲線。簡單指的是曲線不自交，封閉指的是曲線的起點與終點都對應到同一個位置，片段正則則是曲線可以分成有限段小曲線，每個小曲線是正則曲線，而小曲線在相接處連續，但切向量不連續。

---