

111 年 5 月 25 日 (三) 微分幾何課程說明

1 課程目標

- (1) 認識平面上的「直線」, 從過往對於直線的認識, 抽象化其精神之後給出「測地線」的概念。從測地線方程式, 認識平面上的測地線為什麼是直線; 而旋轉曲面中的子午線與平行線有哪些是測地線。
- (2) 在曲面中的一條曲線未必是測地線 (直線), 此時表示著這條曲線是「彎曲的」, 而測地曲率是要試圖描述這條曲線對於曲面的彎曲程度。

2 課程內容

請由以下幾個管道擇一進入課程影片, 搭配課程學習單學習。

從 QR code 掃描進入影片或是輸入每個影片的 YouTube 網址進入。

進入網頁 <http://www.math.ncue.edu.tw/~kwlee/110Geometry.html> 相應的連結觀看影片。

活動 09-11 <https://youtu.be/5fkAiKUw6M8>



定義平面上的測地線, 概念上是想要給出平面上的「直線」, 這裡是利用曲線切向量沿著曲線是否平行的方式定義, 而它類比於空間中的直線之切向量處處平行。影片中將討論球、圓柱、圓錐上哪些是平面上的測地線。

活動 10-01 <https://youtu.be/ygV-AZJ87J8>



影片主要是推導出測地線方程式 (geodesic equation)。從 $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = \mathbf{0}$ 出發, 記 $\gamma'(t) = u'(t)\mathbf{X}_u + v'(t)\mathbf{X}_v$, 則得關於 $u(t)$ 與 $v(t)$ 的二階非線性常微分方程組。方程組中帶有克里斯多夫符號的部份是修正曲線因為曲面彎曲而被迫彎曲的量。

活動 10-02 <https://youtu.be/R2VUNYC6FZc>



接下來的幾個影片想要認識旋轉曲面的測地線。首先將旋轉曲面參數式寫出, 它的第一基本式在之前的活動已經推導過, 由此可以確實地計算出旋轉曲面的克里斯多夫符號。這麼一來, 就可以確實地將測地線方程式寫出。

活動 10-03 <https://youtu.be/DtGz2l83AcA>



從旋轉曲面的測地線方程式 (若是以 $(u(s), v(s))$ 為觀點的話則是測地線方程組), 現在想要觀察幾類很特別的測地線。這個影片欲證明: 所有旋轉平面上的子午線 (meridian) 都是測地線。

活動 10-04

<https://youtu.be/GDPP716RICw>



現在想要問的是：旋轉曲面中，哪些平行線 (parallel) 會是測地線？而測地線方程組得知平行線會是測地線的充分必要條件是 $f'(v) = 0$ ，其中 $(f(v), g(v))$ 指的是生成曲線的參數式。

活動 10-05

<https://youtu.be/m94yDwSwVEQ>



這個影片透過圖形的方式，綜合前面兩個影片的討論，標示旋轉曲面中的子午線與平行線，哪些是測地線，哪些不是測地線。此外，再透過曲線切向量的微分投影到切平面是否為零向量的觀點，再次體會測地線的意義。

活動 10-06

<https://youtu.be/YuPoQ9orRcE>



這個影片要介紹曲線的測地曲率 (geodesic curvature)，一條曲線落在曲面上，曲面落在 \mathbb{R}^3 中，曲線參數式的二次微分的向量，將向量分解成屬於切平面以及屬於法向量的部份，測地曲率就是要度量這個向量對於切平面的部分，它想要突顯曲線「自身」的彎曲。

活動 10-07

https://youtu.be/ZZLWhc_5k2I



這個影片想要研究曲線的曲率、法曲率、測地曲率的關係。曲線以弧長為參數式的二次微分後向量的大小是曲率 κ ，這個向量對於曲面的法向量部份的大小是法曲率，這個向量對於曲面切平面的部份的大小是測地曲率，所以三個數值滿足畢氏定理。
