8

無窮級數理論

這一章將建立無窮級數理論, 單元 8.1 先從無窮級數的意義開始, 這個概念的建立是藉助於第 2 章數列極限的意義, 由此也從數列極限的理論先得到一些關於無窮級數收斂或發散的一般定理以及級數收斂或發散與一般項之間的關係。

qXwvAT6nSyc

無窮級數的首要課題是要判斷一個級數是否收斂或發散, 相較於瑕積分理論也曾經探討過收斂或發散的問題, 而級數理論比起瑕積分來說更為豐富, 所以這一章還會再介紹許多級數收斂或發散的判別法則。比方說單元 8.2 將介紹三個正項級數的收斂或發散判別法: 積分判別法、比較判別法、極限比較判別法。關於積分判別法就是透過瑕積分的收斂或發散理論推導出來的結果。到了單元 8.3 則是探討一般級數的收斂或發散, 這裡就會提供更多的判別法, 像是交錯級數判別法、比值判別法、根式判別法、拉比判別法、阿貝爾判別法、狄立克萊判別法。介紹這麼多的判別法在數學上是基於論述的嚴謹性, 把建構的過程逐步確實呈現, 而在分析級數理論的過程中, 其實更重要的一個精神是在於如何利用等級的眼光重新觀察級數收斂或發散, 若能確實掌握等級的原理與級數收斂或發散的關係, 那麼對於一些不過於複雜的級數就可以從等級的原理快速預判級數的收斂性, 而上述所列的各式各樣的判別法都只是基於數學的完整呈現所需的一個過程。

無窮級數的另一個課題是關於極限與運算之間的相容性。中學以前的數學, 對於數字之間的運算像是結合律、交換律、分配律等問題都是視為理所當然, 在接受了這些規則下繼續討論後面的數學問題。但是數學的系統一旦牽涉到極限 (像是無窮級數也是由極限所衍伸出的一個產物), 那麼所有當初視為理所當然的運算規則都必須重新檢視。所以單元 8.4 是從結合律、交換律、分配律這些數學的結構探討無窮級數收斂或發散對於這些結構的影響。

無窮級數理論的建立是為了之後要研究函數列以及函數項級數而做的前置作業。特別地, 函數項級數在近代數學有非常多發展與應用, 從冪級數到泰勒級數理論甚至是傅立葉級數理論, 將這些級數理論與泛函分析或是測度論結合則對數學分析有全新的認識。這類的函數項級數理論是基於以下理念: 若想了解一個函數, 那麼試圖將它拆解成無限多個函數之和, 而函數改用加總的方式重現可將函數對於某個特徵的重要性依照求和之順序呈現, 如此就能從中觀察每個函數的特性; 此時, 能否確實將函數拆解就是牽涉到級數收斂性的問題。此外, 很多問題也涉及迭代或是遞迴的過程, 這類不斷重覆、依照某個規則操作產生的數學式很容易形成級數的樣貌, 因而我們勢必要對級數理論做更深入地了解。若要利用電腦處理問題, 則會將問題設計並拆解成很多步驟再讓電腦運算, 不論是問題的本身或是處理問題而使用某種演算法所耗的時間之估算, 如何讓電腦發揮最大的效能, 這也是級數問題的一環。

8.1 無窮級數的基本性質

T_8T-XuGMsQ

第 2 章曾經介紹無窮數列 (infinite sequence) 理論, 針對一串永無止盡排列的數字 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 想要探索它的行爲, 口語上來說是想觀察這串數字是不是會和某個實數 $L \in \mathbb{R}$ 愈來愈接近。在數學上引進了 ε-N 語言 (ε-N language) 淸楚地描述這個現象並且引發一系列的討論以判斷數列是否收斂。

這一章想要進一步研究無窮級數 (infinite series) 問題, 概念上是希望將這個無窮數列的所有數字都加總起來。但是實際上我們無法眞正辦到把「所有」數字相加, 這是因爲不管你用多大的力氣將前面很多個數字加起來了, 然而後面的數字無止盡, 總是會有數字沒被加到。這時我們需要用另一種思維取代所謂數字全部加起來的概念, 以下的級數定義就是解決這個問題的新觀點。

定義 **1.** 給定無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

(A) 定義 *部份和數列* (partial sum sequence) $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。

(B) 定義 *無窮級數* (infinite series) 爲部份和數列的極限; 也就是說,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{\text{定義}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)。$$

(C) 若部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 換言之, 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 存在, 則稱無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *收斂* (convergent), 極限值 s 稱爲 *級數和* (sum of the series)。

(D) 若部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 則稱無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *發散* (divergent)。

各位在中學的時候一定有學過兩類很特別的數列與級數: 等差數列與等差級數、等比數列與等比級數。所謂 *等差數列* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是指該數列後項與前項的差爲定值 d, 這個定值稱爲 *公差* (common difference)。因爲對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $a_{n+1} - a_n = d$, 所以我們可以把等差數列的一般項改寫成用首項 a_1 與公差 d 來表示, 即 $a_n = a_1 + (n-1)d$。除此以外, 若要研究等差級數, 那麼它的部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 $s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$。

這一章感興趣的問題是無窮級數的部份, 所以對於等差級數來說, 若要問等差級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收斂性, 就是在問極限

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right)$$

是否存在。此時分兩種情況討論:

(A) <u>如果 $a_1 \neq 0$ 或 $d \neq 0$</u>, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \geq N$ 都有 $a_1 + \frac{n-1}{2}d \neq 0$, 於是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在, 故等差級數發散。

(B) <u>如果 $a_1 = 0$ 且 $d = 0$</u>, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ 收斂, 此時, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$。

由上面的討論知道: 無窮等差數列只有在首項 $a_1 = 0$ 且公差 $d = 0$ 的時候, 則 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 每一項都爲 0, 得到無窮等差級數收斂, 否則無窮等差級數都發散。所以等差級數在無窮級數的理論來說一點也不有趣, 也不會再有什麼新奇的事情發生。

但是等比數列還有對應的等比級數則在無窮級數理論當中佔了非常重要的地位, 它是級數理論中相當重要的模型, 我們有必要先花時間徹底地討論它。

R_RpEZQjbwk

例 **2** (等比級數). 試論 等比級數 (geometric series) 的收斂性與級數和: 給定 $a \neq 0$ 與 $r \in \mathbb{R}$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & 若\ |r| < 1 \\ 發散 & 若\ |r| \geq 1。\end{cases}$$

證明:

(A) 若 $r \neq 1$, 計算部份和:

$$\begin{aligned} s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ r \cdot s_n &= \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n, \end{aligned}$$

兩式相減後得到

$$(1-r)s_n = a - ar^n = a(1-r^n) \Rightarrow s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

因爲等比數列 (geometric sequence) 的收斂與發散情況如下:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & 若\ -1 < r < 1 \\ 1 & 若\ r = 1 \\ 發散 & 若\ r > 1\ 或\ r \leq -1, \end{cases}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & 若\ |r| < 1 \\ 發散 & 若\ r > 1\ 或\ r \leq -1。\end{cases}$$

(B) 若 $r = 1$, 因爲 $a \neq 0$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a = \lim\limits_{n\to\infty} na$ 發散。

□

從上面的討論當中, 我們看到等比級數的部份和 s_n 可以清楚地寫出一般式, 所以此時得以直接計算這個部份和數列的極限以確定等比級數的收斂性。一般來說, 給定一個無窮級數, 它的部份和要有明確表達式 (清楚地寫出它與 n 的關係式) 是可遇而不可求的, 但是根據無窮級數的定義知道: 研究級數收斂或發散的問題本質上是在探討部份和數列之收斂或發散, 所以就算部份和數列只是形式上的表達, 我們仍然可以藉助第 2 章建立出來的數列理論先推得幾個無窮級數的基本性質。

Bw1BhUc9l94

這裡, 我們先給出收斂的無窮級數的線性性質。

定理 3 (線性性質)**.**

(A) 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ 收斂, 並且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n。 \tag{1}$$

(B) 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 而 $c \in \mathbb{R}$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ 收斂, 並且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

證明:

(A) 記 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 與 $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, 則

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \lim_{n\to\infty}(s_n \pm t_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n。\end{aligned}$$

(B) 記 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 而 $c \in \mathbb{R}$, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} c \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} c \cdot s_n = c \lim_{n\to\infty} s_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

□

這個定理表面上看起來非常自然, 各位在考慮級數問題時下意識就會直接把兩級數拆開來寫或者是將係數自動提到外面, 但是多數人都不太留意其實這兩個等式成立是有條件的; 也就是說, 我們必須先確定每個級數皆收斂的情況下等式才有意義, 所以像

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

或是

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 2^n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

其實在數學寫作上都是不被允許的表示法, 應避免寫出這類的式子。

若從證明的過程來看定理, 這裡的論述純粹只是將數列極限的加、減法與係數乘法之結果套用到部份和數列。但是回想數列極限的定理, 除了加、減與係數乘法外, 還有乘法與除法等其它規則。要注意的是, 不應過度詮釋把數列極限的乘法與除法結果誤用到級數的情況; 也就是說,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

這是因爲左式的部份和與右式兩級數的部份和相乘本來就不一樣, 只要寫出兩邊各自的部份和 (至少兩項) 之後就會發現不同。

最後, 我們再重新思考級數的意義下, 定理結論之等式兩側本質上不一樣。就以 (1) 式來說, 先給定兩個數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 等式的左邊是先考慮兩數列逐項相加或逐項相減後得到的新數列 $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$, 然後再觀察新的無窮級數之收斂性; 而等式右邊則是先分別求得級數和之後, 再把兩級數和相加, 這裡可以看出兩者在操作上的先後順序不同。

我們知道: 數字的四則運算有優先順序, 也就是先乘除後加減, 而括號的添加會讓運算優先度提前; 換言之, 括號內的操作必須先執行。以下定理說明原級數與某些項加括號後的級數之關係, 若以數學的術語來說, 這件事是在探討無窮級數加法結合律 (associative law of addition) 的問題。

定理 4 (加法結合律)**.** 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則將某些項加括號之後所成的級數

uxCuJcLCQG8

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots \\ + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots\end{aligned}$$

收斂, 並且級數和相同。

在證明這個定理之前, 我們先花一些時間認識上面式子的寫法。首先在無窮數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中選出一個子數列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, 這個子數列的每一項代表每一組括號當中的最後一項, 所以第一組就是在 a_1 與 a_{n_1} 前後加上括號, 然後再從 a_{n_1} 的下一項, 也就是在 a_{n_1+1} 和 a_{n_2} 前後加上括號, 依序下去就可以完全描述加括號的概念。在思考這個新的級數和時, 則是優先處理括號內的運算, 然後再看第一組括號所得之值加上第二組括號得到的結果依序相加而得部份和數列之極限。

證明: 設 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和數列。記 $n_0 = 0$, 對於 $k \in \mathbb{N}$, 令

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k},$$

則先將某些項加括號之後所得的無窮級數可表示爲 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, 其部份和數列記爲 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, 於是對所有 $k \in \mathbb{N}$, 都有 $t_k = s_{n_k}$; 也就是說, 數列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} = \{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的一個子數列。因爲 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 所以由數列與子數列的收斂關係得知 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 也收斂。 □

這裡注意到關於加法的結合律並不會更動這個級數一般項的前後順序, 若級數一般項的前後順序更動, 則牽涉到的概念是加法交換律 (commutative law of addition) 的問題, 我們會在之後的單元才會探討這個問題。

arH8Yva8EB8

此外, 由證明的過程中知道無窮級數的結合律對應到部份和數列的子數列之收斂性, 也就是利用「若數列收斂, 則它的任何子數列也收斂, 並且極限值相同」這個結果, 所以將這個敘述的否逆命題寫下來則爲「若子數列發散, 或是存在兩個子數列收斂但是極限值不同, 則原數列發散」, 再將此結果用到級數理論上, 則可以得到:「給定無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 若有一種添加括號的方法所得之級數發散, 或是若有兩種添加括號的方法所得的級數和不同, 則無窮級數發散。」。例如: 考慮無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$, 若對於每個奇數 k, 將第 k 項與第 $k+1$ 項前後加上括號, 則它的部份和數列會對應於原級數部份和之子數列 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$, 於是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = 0$; 若對於每個偶數 l, 將第 l 項與第 $l+1$ 項前後加上括號, 則它的部份和數列會對應於原級數部份和之子數列 $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$, 於是 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1} = 1$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 發散。

以下要給出級數收斂與原數列極限之關係。

定理 5 (級數收斂的必要條件)**.** 若無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

SYrErvL1XnA

證明: 因爲無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 記 $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, 其中 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和數列。因爲 $a_n = s_n - s_{n-1}$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0。$$

□

這個定理的逆敘述不對, 也就是「若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂」不一定成立。比方說考慮級數

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots ,$$

其中這個級數對應到的數列之特色爲: 從 $n = 1, 2, 3, \ldots$ 依序列出 n 個 $\frac{1}{n}$。注意到此級數一般項之極限爲 0。假設這個無窮級數收斂, 則由加法結合律知道加括號後的級數也會收斂, 但是, 當我們考慮以下添加括號的方式:

$$\frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \cdots ,$$

這個級數的部份和數列爲 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} = \{k\}_{k=1}^{\infty}$, 而 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k$ 發散與 定理 **4** 的結論矛盾。故數列的一般項趨近於零不見得無窮級數收斂。

至於 定理 **5** 的否逆命題則是一個常用來判斷無窮級數發散的方法。

推論 6 (發散判別法, Test of Divergence)**.** 考慮無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 若極限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 或者是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \neq 0$, 則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

之前討論等比級數的例子, 我們也可以透過發散判別法得知等比級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$ 在公比爲 $r \geq 1$ 或是 $r \leq -1$ 的時候發散。

第三章曾經介紹過數列的柯西收斂準則, 現將部份和用數列的柯西收斂準則寫出, 則得以下級數版本的柯西收斂準則, 而這個敘述是級數收斂的充分必要條件。

Yr6icjvCrUw

定理 7 (柯西收斂準則, Cauchy Convergence Criterion)**.** 無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂的充分必要條件是*:* 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon。$$

證明: 記 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和數列。級數收斂表示 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在, 由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知: 極限 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在等價於對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon。$$

□

以下舉例說明如何利用柯西收斂準則判斷級數的收斂或發散。

例 8. 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 是收斂或是發散。

SQaCiA4UYqc

解. 對於 $m, n \in \mathbb{N}$, 不妨設 $m > n$, 計算

$$\begin{aligned}|s_m - s_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n},\end{aligned}$$

由上述分析得知: 給定任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1$, 則對所有 $m > n \geq N$, 都有 $m > n \geq N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $\frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon$, 於是對所有 $m > n \geq N$, 都有

$$|s_m - s_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

故由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂。

例 9. 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是收斂或是發散。

aCc2Y1YFU3U

解. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, 對任意 $N \in \mathbb{N}$, 取 $N = n, m = 2N$, 則

$$\begin{aligned}|s_m - s_n| &= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+N} \\ &\geq \frac{1}{N+N} + \frac{1}{N+N} + \cdots + \frac{1}{N+N} = \frac{N}{N+N} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

故由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散。

W1vcjsb9_YA

例 **10.** 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 是收斂或是發散。

解. 對於 $m,n\in\mathbb{N}$, 不妨設 $m>n$, 觀察

$$|s_m-s_n|=\left|\sum_{k=1}^{m-n}\frac{(-1)^{n+k+1}}{n+k}\right|=\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}+\frac{(-1)^{n+3}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{m}}{m-1}+\frac{(-1)^{m+1}}{m}\right|$$

(A) <u>若 $m-n$ 是奇數</u>, 則

$$|s_m-s_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}。$$

(B) <u>若 $m-n$ 是偶數</u>, 則

$$|s_m-s_n|=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{m-2}-\frac{1}{m-1}\right)-\frac{1}{m}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}。$$

無論何種情況, 對任意正數 $\varepsilon>0$, 都可以取 $N=[\![\frac{1}{\varepsilon}]\!]+1$, 則對所有 $m>n\geq N$ 都有 $|s_m-s_n|<\varepsilon$, 因此無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收斂。

除了利用上述方法確定級數的收斂外, 若能將級數和求出對數學家而言是件夢寐以求的事; 換言之, 一個級數若可以找到級數和相對來說是非常特殊的情況。通常級數和的證明是要透過其它數學理論才能求得, 而且證明的手法也千變萬化, 甚至有更多的級數只知其收斂但是級數和懸而未解。不過, 就以上面所提的級數來說, 數學家歐拉 (Leonhard Euler, 1707–1783) 首先證明了 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$; 至於級數和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$ 則是另一個相當深刻的結果。這兩個級數和若之後有機會再加以證明, 這一章的重點將專注於判定無窮級數的收斂或發散。

8.2 正項級數的收斂判別法

QETOWuQIUpE

如前一節所言, 對於一般的無窮級數, 若要把它的部份和數列明確寫出來是件可遇而不可求的事, 那麼在問無窮級數收斂或發散時, 我們勢必要透過旁敲側擊或者是間接的手法了解, 於是產生了很多相關的理論。

這一節我們先專心研究 正項級數 (series with positive terms) 的收斂性, 也就是型如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 其中 $a_n>0$ 的無窮級數; 下一節再分析一般項有正有負的無窮級數。分兩個階段進行級數的討論是有原因的, 一來, 每一項都是正的級數較為單純, 正負消長的級數有時會增加分析上的複雜度; 二來, 對於有正有負的級數之理論需要用到正項級數的結果。

這一節要介紹三個正項級數判別法, 第一個稱為積分判別法 (Integral Test), 它是藉助瑕積分的收斂發散理論而得級數收斂性之定理。另外兩個稱為比較判別法 (Comparison Test) 與極限比較判別法 (Limit Comparison Test), 若各位仔細研究後便會發現這兩個判別法和當初瑕積分的情況是相近的概念, 故對於判別法的取名也沿用同樣的術語。

定理 1 (積分判別法, Integral Test)**.** 假設 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是連續、恆正、遞減的函數。記 $a_n = f(n)$, 則正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與瑕積分 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 具有相同收斂或發散的性質。

證明: 因爲 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上是連續、恆正、遞減的函數, 所以對所有 $k \in \mathbb{N}$, 函數 $f(x)$ 在區間 $[k,k+1]$ 上是可積分的, 並且有不等式 $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$, 於是

$$a_{k+1} = f(k+1)\cdot 1 = \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x \le \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k)\cdot 1 = a_k,$$

將不等式對於 k 從 1 加總到 $n-1$ 則得

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k。\tag{2}$$

記 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部份和數列。

(A) 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正項級數, 所以 $\{s_n - a_1\}_{n=1}^{\infty}$ 是遞增數列, 若瑕積分 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 則不等式 (2) 說明

$$s_n - a_1 \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x,$$

它表示數列 $\{s_n - a_1\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\{s_n - a_1\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n - a_1) = L \in \mathbb{R}$, 於是級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - a_1 + a_1) = \lim_{n\to\infty}(s_n - a_1) + \lim_{n\to\infty} a_1 = L + a_1$$

收斂。

(B) 若瑕積分 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 發散, 則 (2) 式告知: 對任意 $M > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \ge N$ 都有

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ge \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x > M,$$

於是 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 發散, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

□

積分判別法在級數理論的重要性在於: 因爲我們從瑕積分理論中知道標準模型 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 的收斂與發散結果, 它可以幫助我們建立 p-級數的收斂或發散。現將定義與結果呈現如下:

定義 2. 給定 $p \in \mathbb{R}$, 型如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的無窮級數稱爲 p-級數 (p-series)。

eEVJMibOXKw

例 **3.** 證明: p-級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p>1$ 收斂; 若 $p \leq 1$ 發散。

證明:

(A) 若 $p>0$, 考慮 $f(x)=\frac{1}{x^p}$, 則 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上連續、恆正、遞減。因爲瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 若 $p>1$ 收斂, 若 $p\leq 1$ 發散, 所以 p-級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p>1$ 收斂, 若 $0<p\leq 1$ 發散。

(B) 若 $p\leq 0$, 記 $a_n=\frac{1}{n^p}$, 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$, 由發散判別法 (Test of Divergence) 得知: p-級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p\leq 0$ 時發散。

(C) 綜合 (A) 與 (B) 的結果, 得知: p-級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 若 $p>1$ 收斂; 若 $p\leq 1$ 發散。

□

這裡做一個註記: 我們在單元 8.1 利用柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 證明了 p-級數在 $p=1,2$ 的情況。

關於 p-級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 和等比級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, 它們是兩類重要的標準模型, 之後將發展出很多理論與判別法, 在實際應用時, 經常會和這兩類級數進行比較而得到其它無窮級數的收斂性。

以下再舉一個例子說明積分判別法的特色。

kc-R8q3I6j0

例 **4.** 對於 $p>0$, 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 是收斂或是發散。

證明: 考慮函數 $f(x)=\frac{\ln x}{x^p}$, 若要使用積分判別法, 必須檢查函數滿足條件的範圍。對所有 $p>0$, 函數 $f(x)=\frac{\ln x}{x^p}$ 在 $[2,\infty)$ 上連續且恆正。欲討論函數遞減的範圍, 因爲

$$f'(x)=\frac{x^p\cdot\frac{1}{x}-\ln x\cdot px^{p-1}}{x^{2p}}=\frac{1-p\ln x}{x^{p+1}},$$

解不等式 $f'(x)<0$ 得到 $1-p\ln x<0$, 即 $x>\mathrm{e}^{\frac{1}{p}}$。記 $A_p=\max(\llbracket \mathrm{e}^{\frac{1}{p}}\rrbracket+1,2)=\llbracket \mathrm{e}^{\frac{1}{p}}\rrbracket+1$。

因爲 $f(x)=\frac{\ln x}{x^p}$ 在 $[A_p,\infty)$ 上連續、恆正、遞減, 而瑕積分 $\int_{A_p}^\infty \frac{\ln x}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 若 $p>1$ 收斂; 若 $p\leq 1$ 發散 (詳見第 7 章 7.2 節 例 **3** 討論), 所以由積分判別法 (Integral Test) 得知:

(A) 若 $p>1$, 則 $\sum\limits_{n=A_p}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 收斂。

(B) 若 $0<p\leq 1$, 則 $\sum\limits_{n=A_p}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 發散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 發散。

□

G-FEfvbW-g8

在進入下一個判別法之前, 我們再對積分判別法進一步討論。這裡想問的是: 爲什麼函數 $f(x)$ 需要遞減這個條件? 也就是說, 如果只要求 $f(x)$ 在 $[1,\infty)$ 上連續以及恆正, 而且瑕積分 $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂的話, 記 $a_n=f(n)$, 那麼有辦法證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也是收斂嗎?

若從證明的過程來看, 積分判別法之建立主要是用到 (2) 這個不等式, 若函數 $f(x)$ 遞減, 函數與 x-軸在討論範圍內所圍出的區域面積會被兩組長方形面積之總和有上界與下界的控制。以下要構造一個不是遞減的函數 $f(x)$, 瑕積分 $\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ 收斂, 但是 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n)$ 發散。這個函數 $f(x)$ 的表示法如下: 對於 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-\frac{1}{n})(x-n)+\frac{1}{n} & \text{若 } x \in [n-\frac{1}{2n}, n] \\ 2\left(\frac{n}{(n+1)^2}-1\right)(x-n)+\frac{1}{n} & \text{若 } x \in [n, n+\frac{1}{2n}] \\ \frac{1}{(n+1)^2} & \text{若 } x \in [n+\frac{1}{2n}, (n+1)-\frac{1}{2(n+1)}], \end{cases}$$

函數 $f(x)$ 的表達式看起來很複雜, 實際上若用圖形示意則可以很快看出其特色:

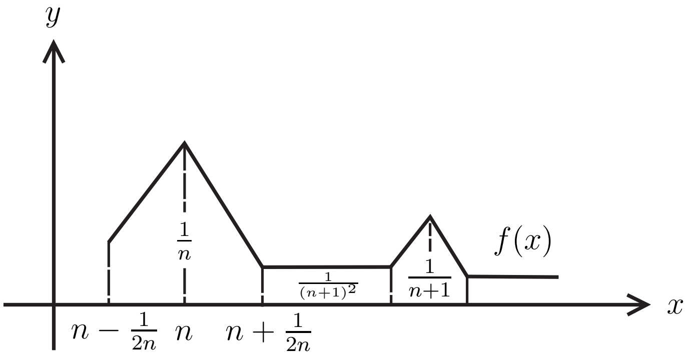

圖 8.1: 若函數沒有遞減的性質時, 無法由瑕積分收斂推得級數收斂。

這個函數在每個 $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ 的附近都有一座「山峰」, 而兩座山峰之間由一條水平線連接。每個山峰在 $x=n$ 的地方達到局部極大值 $\frac{1}{n}$, 而山形的寬度爲 $\frac{1}{n}$, 所以我們在 $x=n$ 的左、右兩側抓出 $x=n-\frac{1}{2n}$ 與 $x=n+\frac{1}{2n}$ 兩個點, 透過兩座山之間的水平線要求高度爲 $\frac{1}{(n+1)^2}$ 之下構造每座山峰的形狀。以下要計算瑕積分 $\int_{\frac{7}{4}}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, 實際上就是在計算函數與 x-軸在 $x=\frac{7}{4}$ 的右邊所圍成的面積。首先計算介於一個山峰配上水平線與 x-軸之間的面積: 對於 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{(n+1)^2}\left((n+1)-\frac{1}{2(n+1)}-\left(n+\frac{1}{2n}\right)\right),$$

這裡先將上式中帶有 $\frac{1}{(n+1)^2}$ 的項進行整理:

$$\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{1}{4n}+(n+1)-\frac{1}{2(n+1)}-\left(n+\frac{1}{2n}\right)\right)=\frac{1}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{4n}\right),$$

所以

$$A_n = \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{4n}+\frac{1}{(n+1)^2}\left(1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{4n}\right) \leq \left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{4n}+\frac{1}{n^2}=\frac{7}{4n^2},$$

因此

$$\int_2^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\frac{7}{4}}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} A_n \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{7}{4n^2}$$

得知瑕積分收斂, 但是級數 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散。

以下兩個判別法也和瑕積分介紹過的判別法有異曲同工之妙, 各位應好好體會兩者關聯並融會貫通。

lnXw84FPUYY

定理 5 (比較判別法, Comparison Test)**.** 假設無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 滿足對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $0 < a_n \leq b_n$。

(A) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(B) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散。

證明: 考慮兩級數之部份和 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 與 $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$,

(A) 因爲兩級數皆爲正項級數, 所以部份和數列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 皆爲遞增數列。因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 記 $t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$。因爲對所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $a_k \leq b_k$, 所以 $s_n \leq t_n \leq t$。由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂; 換言之, 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂。

(B) 因爲級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散, 則 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$, 因此級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 發散。

$\square$

g-c_mIiy3aU

例 **6.** 判斷無窮級數 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^3-2n+5}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^3-2n^2+1}$ 是收斂或是發散。

解**.**

(A) 因爲

$$\frac{n^2+4n-1}{n^3-2n+5} = \frac{\frac{1}{2}n^2+4n+\frac{1}{2}(n^2-2)}{n^3-2n+5} \overset{(n\geq 2)}{\geq} \frac{\frac{1}{2}n^2+0+0}{n^3+0+n^3} = \frac{1}{4n},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ 發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^3-2n+5}$ 發散。

(B) 因爲

$$\frac{n+3}{3n^3-2n^2+1} = \frac{n+3}{2n^3+n^2(n-2)+1} \overset{(n\geq 3)}{\leq} \frac{n+n}{2n^3+0+0} = \frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^3-2n^2+1}$ 收斂。

我想各位應該看得出來級數的收斂發散也和等級有關。在 (A) 的例子中, 若對於分子 n^2+4n-1 與分母 n^3-2n+5 各自將最高的等級抓出來, 則爲 n^2 與 n^3, 所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n-1}{n^3-2n+5}$ 的行爲會與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 相似, 於是預期級數發散。至於 (B) 的情況, 若將分子 $n+3$ 與分母 $3n^3-2n^2+1$ 各自將最高的等級抓出來, 則爲 n 與 $3n^3$, 所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^3-2n^2+1}$ 的行爲會與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ 相似, 於是預期級數收斂。至於嚴格的數學論述可以透過上述的方法呈現。

定理 7 (極限比較判別法, Limit Comparison Test)**.** 假設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆爲正項級數, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0,$$

3P-S4Ntqnpo

則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有同樣的收斂或發散性質。

證明: 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C > 0$, 取 $\varepsilon = \frac{C}{2} > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}C < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}C \Rightarrow \frac{1}{2}C \cdot b_n < a_n < \frac{3}{2}C \cdot b_n,$$

(A) 因爲對所有 $n > N$ 都有 $\frac{1}{2}C \cdot b_n < a_n$, 得到 $b_n < \frac{2}{C} \cdot a_n$。若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 收斂, 得到 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{C} \cdot a_n$ 也收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 無窮級數 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 收斂。

(B) 因爲對所有 $n > N$ 都有 $a_n < \frac{3}{2}C \cdot b_n$, 得到 $\frac{2}{3C} \cdot a_n < b_n$。若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散, 則 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n$ 發散, 得到 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{3C} \cdot a_n$ 也發散, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 無窮級數 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 發散, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n + \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n$ 發散。

□

由極限比較判別法的判別式, 它更能突顯級數收斂或發散與等級的關係, 因爲這個判別式就是告知等級較低的量對上等級較高的量來說微乎其微, 故等級較低的量不會影響級數收斂性。

例 8. 試就 $p \in \mathbb{R}$ 討論 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 的收斂性。

解. 注意到對於 $n \in \mathbb{N}$, 因爲 $0 < \frac{1}{n} \le 1 < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$, 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 是正項級數。記 $a_n = \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 與 $b_n = \frac{1}{n^{p+1}}$, 因爲

Fbch0-gaKq4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

而級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 若 $p+1 > 1$ 收斂, 若 $p+1 \le 1$ 發散, 所以由極限比較判別法 (Limit Comparison Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 在 $p > 0$ 時收斂; 在 $p \le 0$ 時發散。

若用等級的觀點重看上述的討論, 則重點在於: 當 x 很接近 0 的時候, $\sin x$ 和 x 相近, 所以 $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 和 $\frac{1}{n}$ 具有一樣的等級, 也因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 的收斂或發散的性質一致。

8.3 一般級數的收斂判別法

pniEmp-cbQc

對於無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 一般項 a_n 可能正可能負, 然而我們比較感興趣而且在數學上較爲重要的一類級數是一般項正負相間的情況, 因爲這種正負交錯的級數在之後討論冪級數 (power series) 理論時經常會遇到而且是必須克服的情況, 像是兩負一正、一負兩正或是正負沒有規律的級數雖然也能發展出一些數學理論, 但畢竟那又是更特殊的情況, 這裡就暫不討論它。

以下先給出交錯級數的定義。

定義 1 (交錯級數, Alternating Series)**.** 若對所有 $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, 則型如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 或是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 的無窮級數稱爲 交錯級數 (alternating series)。

以下提供一個判斷交錯級數收斂的方法。

定理 2 (交錯級數判別法, Alternating Series Test)**.** 關於交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 或 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$, 若數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減而且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 則交錯級數收斂。

證明: 這裡先看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 的情況。記交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$ 的部份和數列爲 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, 並記 $s_0 = 0$, 因爲 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 所以觀察

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-2} + b_{2n-1} - b_{2n} \geq s_{2n-2} \\ s_{2n+1} &= s_{2n-1} - b_{2n} + b_{2n+1} = s_{2n-1} - (b_{2n} - b_{2n+1}) \leq s_{2n-1}; \end{aligned}$$

換言之, 部份和的偶數項子數列 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 遞增, 而奇數項子數列 $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 而且

$$\begin{aligned} s_{2n} &= s_{2n-1} - b_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-3} \cdots \leq s_3 \leq s_1 = b_1 \\ s_{2n+1} &= s_{2n} + b_{2n+1} \geq s_{2n} \geq s_{2n-2} \geq \cdots \geq s_4 \geq s_2 = b_1 - b_2 \geq 0, \end{aligned}$$

得到部份和的偶數項子數列 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 有上界, 而奇數項子數列 $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 有下界, 由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ 都收斂。

設 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = L$ 與 $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = M$, 因爲

$$M - L = \lim_{n\to\infty}(s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0,$$

所以交錯級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n = L = M$ 收斂。

至於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 的情形, 記 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其部份和, 則 $t_n = -s_n$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 收斂, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} -s_n = -\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 收斂。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ 收斂。 □

以下舉例說明如何利用交錯級數判別法驗證級數是收斂的。

例 **3.** 試論交錯級數 (A) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^p}$, 其中 $p>0$ 與 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n-1}$ 是收斂或是發散。

qyNaFTdKAm8

解.

(A) 由單元 8.2 的 例 **4** 知道數列 $\left\{\frac{\ln n}{n^p}\right\}_{n=2}^{\infty}$ 當 $n \geq [\![e^{\frac{1}{p}}]\!] + 1$ 時遞減。此外,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} \overset{(\frac{\infty}{\infty},L)}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^p} = 0,$$

由交錯級數判別法 (Alternating Series Test) 得知: 對所有 $p>0$, 級數 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^p}$ 收斂。

(B) 記 $b_n = \frac{2n+1}{3n-1}$, 因爲

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3},$$

記 $a_n = (-1)^n b_n$, 因爲

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} b_{2n} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n-1} b_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} -b_{2n-1} = -\frac{2}{3},$$

所以 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在。故由發散判別法 (Test of Divergence) 得知級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n-1}$ 發散。

這裡應特別注意的是: 交錯級數判別法只能用來確定交錯級數收斂, 無法用此證明級數發散。也就是說, 若級數不滿足交錯級數判別法之檢驗條件時, 只是表示交錯級數判別法並不適用, 此時必須透過其它的方法重新判斷。所以像上例 (B) 是利用發散判別法得知級數發散。

關於級數理論, 我們需要一個更仔細的級數收斂之分類, 故引進以下定義。

定義 **4.** 考慮無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

syNY8EnXmxM

(A) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 稱無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 *絕對收斂* (absolutely convergent)。

(B) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 稱級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是 *條件收斂* (conditionally convergent)。

舉例來說, 因爲 $\{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 都是遞減且趨近於零的數列, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 都是收斂的交錯級數。若我們先把一般項加上絕對值之後再看級數, 則分別得到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 由 p-級數的理論知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 發散。因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 絕對收斂, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 條件收斂。

絕對收斂與條件收斂的概念在瑕積分理論中也出現過, 而這兩個概念在無窮級數的理論中將更加突顯其特色。

定理 5. 絕對收斂級數必爲收斂級數。換言之, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂。

證明: 記 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部份和數列, 而 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的部份和數列, 觀察

$$|s_m-s_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|\leq|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\cdots+|a_m|=|t_m-t_n|,$$

因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 對任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $m>n\geq N$ 都有 $|t_m-t_n|<\varepsilon$, 得到 $|s_m-s_n|<\varepsilon$, 由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂。 □

以下要先介紹兩個實用性很高的判別法則: 比值判別法與根式判別法。

I_SRGGdTKsg

定理 6 (比值判別法, Ratio Test)**.**

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L<1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散。

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$, 則級數收斂或發散無法下定論。

證明:

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L<1$, 取 $\varepsilon=\frac{1-L}{2}>0$, 則存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n\geq N$ 都有

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|-L\right|<\frac{1-L}{2}\Rightarrow\frac{3L-1}{2}<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<\frac{1+L}{2}。$$

記 $r=\frac{1+L}{2}<1$, 從不等式 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<r$ 得到對所有 $n>N$ 都有 $|a_{n+1}|<|a_n|r$, 於是對所有 $k\in\mathbb{N}$, 都有

$$|a_{N+k}|<|a_{N+k-1}|r<|a_{N+k-2}|r^2<\cdots<|a_N|r^k,$$

因爲 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_N|r^k=\frac{|a_N|r}{1-r}$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{N+k}|$ 收斂, 於是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{N}|a_n|+\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{N+k}|$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty$, 則存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n\geq N$ 都有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1\Leftrightarrow|a_{n+1}|>|a_n|,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$, 所以由發散判別法 (Test of Divergence) 得知無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 發散。

□

例 **7.** 試論級數 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 與 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ 是收斂或是發散。

ALMfrOSZKnM

解.

(A) 令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$, 計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1,$$

故由比值判別法 (Ratio Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收斂。

(B) 令 $a_n = \frac{2^n}{n^3}$, 計算

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3$$
$$= 2\cdot\left(\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}\right)^3 = 2\cdot\left(\frac{1}{1+0}\right)^3 = 2 > 1,$$

故由比值判別法 (Ratio Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$ 發散。

當級數的一般項是由兩種不同類型的量組成時, 通常可以先試著用比值判別法研究級數的收斂性。這裡所謂的「類型」, 大體上是以對數 $\ln n$、多項式或冪次 $n^p, p>0$、指數 $a^n, a>1$、階乘 $n!$ 還有 n^n 作爲最簡易的分類, 除了表達式的型態本身看起來就有差異, 它們的數學屬性也截然不同。所以在上例 (A) 中級數一般項的分子與分母爲 $n!$ 與 n^n, 它是兩種不同類型的量組成, 當 $n\to\infty$ 時, $n! \ll n^n$, 所以 n^n 終究會主宰級數的行爲, 而且分母放了 n^n 之下趨於無限大的速度會比 $n^p, p>1$ 來得快很多, 所以預期 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 是收斂的級數。至於 (B) 中級數一般項的分子與分母爲 2^n 與 n^3, 它也是兩類不同的量組成, 當 $n\to\infty$ 時, $n^3 \ll 2^n$, 也就是 2^n 將主宰級數的行爲, 當分子放了 2^n 之下, 級數就像是公比爲 2 的發散等比級數, 所以預期 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3}$ 也是發散的級數。

MCJCNDZLkRY

各位在利用等級的觀點進行一些級數收斂或發散的預判時, 或許要更小心的是如果一般項是由三種或三種以上的類型組成的情況。當級數的一般項更加複雜時, 級數收斂性可能就無法直接抓等級最大的量快速預判。比方說這裡介紹一個很經典的 史特林公式 (Stirling's formula), 它是在描述階乘 $n!$ 當 n 很大的時候之漸近表達式:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n\mathrm{e}^{-n} \text{ 當 } n\to\infty;\ \text{或者說 } \lim_{n\to\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}n^n} = \sqrt{2\pi}。$$

各位可以看到史特林公式是說明當 n 很大的時候, $n^{\frac{1}{2}}, \mathrm{e}^n, n!, n^n$ 這四種類型之間的等級竟然可以達成一種平衡! 若從這個結果出發, 比方說想要判斷級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n\mathrm{e}^n n!}$ 的收斂性時, 因爲 $\frac{n^n}{n\mathrm{e}^n n!}$ 這個量在 n 很大的時候與 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{\frac{3}{2}}}$ 相當, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{\frac{3}{2}}}$ 是收斂的級數, 所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n\mathrm{e}^n n!}$ 收斂。換言之, 分母

$ne^n n!$ 這三個等級較小的量相乘將壓過分子的 n^n 甚至是會多出 $n^{\frac{3}{2}}$ 這麼多的等級以致級數收斂。所以各位利用等級的原理做一些級數收斂性的預判時, 可能要再多花一點心思體會每個等級之間的微妙關係。

PuzN2B54in4

至於史特林公式的證明, 在此也做一個補充。令 $a_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}n^n}$, 首先想要證明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 於是計算

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}n^n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!\mathrm{e}^{n+1}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

欲證 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 即證 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1$ 即可。此時先把想要證明的不等式做一個等價的改寫:

$$\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \geq 1 \Leftrightarrow \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln n \geq \frac{1}{n+\frac{1}{2}}。$$

若要證明最後的不等式成立, 考慮函數 $f(x) = \frac{1}{x}$, 其中 $x > 0$, 則 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ 以及 $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, 這告知函數 $f(x)$ 爲凸函數 (convex function)。觀察函數 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在區間 $[n, n+1]$ 上的圖形關係, 如圖 8.1 所示。

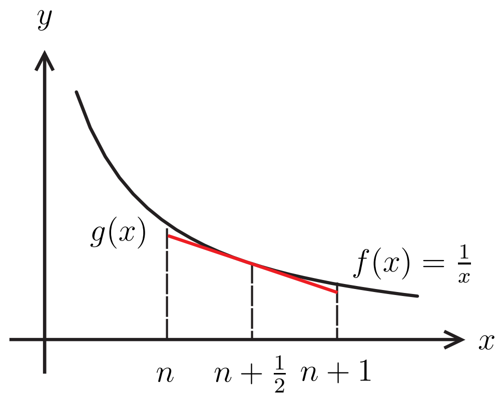

圖 8.1: 由 $f(x) = \frac{1}{x}$ 是凸函數的性質證明不等式 $\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n$。

因爲 $f(x)$ 爲凸函數, 所以函數 $f(x)$ 的圖形會在通過 $(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{n+\frac{1}{2}})$ 這點的切線之上方; 也就是說, 因爲 $y - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = f'(n+\frac{1}{2})\left(x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right)$ 是函數 $f(x)$ 的圖形在 $(n+\frac{1}{2}, \frac{1}{n+\frac{1}{2}})$ 的切線方程式, 記 $g(x) = f'(n+\frac{1}{2})\left(x - \left(n+\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$, 則凸函數的性質告知: $g(x) \leq f(x)$, 所以

$$\int_n^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{2}{2n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n,$$

其中 $\int_n^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x$ 可直接從梯形面積公式快速得知其結果爲中線長乘以梯形高 $= \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}$。至此我們完成了第一部份: 數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減。

eCuz_1aob8Q

因爲數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 遞減, 且 $a_n > 0$, 所以由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 存在。現在欲證明 $L = \sqrt{2\pi}$。首先, 從 $a_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}n^n}$ 出發, 得到

$$\frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{(n!)^2\mathrm{e}^{2n}}{n \cdot n^{2n}} \cdot \frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{(2n)!\mathrm{e}^{2n}} = \frac{\sqrt{2n}}{n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 2^{2n}。$$

另一方面, 回想第七章介紹過的定積分 $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, \mathrm{d}x$, 那時曾經推得兩個關係式:

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \quad 與 \quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

XKF2fLHQaUM

現將兩式相除得到

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{\pi},$$

再經過移項整理得到

$$\frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}。$$

在左式的分子與分母安插 $2n \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$ 之後得到

$$\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{(2n+1) \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$ (這也是第六章證明過的結果), 所以

$$L = \frac{L^2}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 2^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}}{n} \cdot \sqrt{(2n+1) \cdot \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \cdot \frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}。$$

再來要介紹的是根式判別法。

R6TiDQEKdZY

定理 8 (根式判別法, Root Test)**.**

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, 則級數收斂或發散無法下定論。

證明:

(A) 因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, 取 $\varepsilon = \frac{1-L}{2} > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - L \right| < \frac{1-L}{2} \Rightarrow \frac{3L-1}{2} < \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1+L}{2},$$

記 $r = \frac{1+L}{2} < 1$, 則上述不等式告知: 對所有 $n > N$ 都有 $|a_n| < r^n$。因爲 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} r^n = \frac{r^{N+1}}{1-r}$ 收斂, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, 則存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n > N$ 都有

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Leftrightarrow |a_n| > 1^n = 1,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 所以由發散判別法 (Test of Divergence) 得知無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散。

$\square$

M_P68aj-x1k

例 **9.** 試論級數 (A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ 與 (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n-1}3^{n+1}}$ 的收斂性。

解.

(A) 令 $a_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$, 計算

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\\&=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot 2}}=\frac{1}{\mathrm{e}^2}<1,\end{aligned}$$

故由根式判別法 (Root Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ 收斂。

(B) 令 $a_n=\frac{n^n}{2^{n-1}3^{n+1}}=\frac{2}{3}\left(\frac{n}{6}\right)^n$, 計算

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{6}\right)^{n\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{n}{6},$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$, 由根式判別法 (Root Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n-1}3^{n+1}}$ 發散。

9LAiV5SHON8

各位可以看到, 當級數的一般項最外面帶有 n 次方, 或是像上例 (A) 中帶有更高的次方時, 使用根式判別法或許是一個很好的選擇, 因爲根式判別法就是試圖將次方的因子消除或化簡, 理應有助於極限之計算。

關於比值判別法與根式判別法, 兩者的中心思想是和公比爲 r 的等比級數進行比較判別法。若將等比級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ 代入比值判別法的檢驗式中, 則在還沒有取極限之前, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\equiv|r|$ 表示公比的絕對值。至於根式判別法, 若觀察更單純的等比級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 代入根式判別法的檢驗式中, 則在還沒有取極限之前, $\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|r|^n}\equiv|r|$ 也是呈現公比的絕對值。所以面對一般的級數時, 我們可以把 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 以及 $\sqrt[n]{|a_n|}$ 想成是一個「類公比」的概念。

然而這兩個判別法在判別式的結果是 1 的時候並不適用, 理由也承如上一段的討論, 這是因爲判別法是以等比級數爲基準或出發點; 換言之, 等級比指數還要低的量其實是無法在這個判別法當中顯現出來。

若我們重新審視等級的列表

$$1\ll\ln n\ll n^p(p>0)\ll a^n(a>1)\ll n!\ll n^n\qquad\text{當 } n\to\infty,$$

比指數 a^n 的等級再低一階的就是多項式或冪次 $n^p, p>0$, 於是所有的 p-級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收斂或發散性都無法透過比值判別法解讀。換言之, 對所有 $p>0$ 都滿足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(n+1)^p}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^p=\left(\frac{1}{1+0}\right)^p=1,$$

然而我們很淸楚地知道 p-級數在 $p>1$ 的時候收斂, 在 $0<p\le 1$ 的時候發散。

所以接下來引發的一個問題是: 我們有沒有一種更精細的判別法再進一步了解當比值判別法或根式判別法失效的情況? 以下的拉比判別法就是回答了這個問題, 它提供一個級數當一般項之絕對值與公比為 1 的等比級數相近時, 那麼我們就要再觀察下一個等級的現象, 也就是和 p-級數的收斂或發散做比較。

定理 10 (拉比判別法, Raabe's Test)**.** 考慮無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, 假設 $r=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)$ 存在。若 $r>1$ 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 若 $r<1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 發散。若 $r=1$, 則 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 的收斂或發散無法判定。

00EFIKa93-Y

證明: 設 $1<p<q$, 考慮函數 $f(x)=1+qx-(1+x)^p$。因為 $f(0)=0, f'(0)=q-p>0$, 所以存在 $\delta>0$ 使得對所有 $0<x<\delta$ 都有

$$1+qx>(1+x)^p。$$

(A) <u>若 $r>1$</u>, 取 p,q 滿足 $1<p<q<r=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)$, 所以存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n>N$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|>1+\frac{q}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=\frac{(n+1)^p}{n^p}\Rightarrow|a_n|n^p>|a_{n+1}|(n+1)^p,$$

這說明數列 $\{|a_n|n^p\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n>N$ 時遞減, 所以數列有上界, 即存在 $M>0$ 使得對所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|a_n|n^p\le M$, 於是 $|a_n|\le\frac{M}{n^p}$。因為 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^p}$ 收斂, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 絕對收斂。

(B) <u>若 $r<1$</u>, 則存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得對所有 $n>N$ 都有

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}\Rightarrow|a_n|n<|a_{n+1}|(n+1),$$

這說明數列 $\{|a_n|n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $n>N$ 遞增, 所以數列有下界, 即存在 $m>0$ 使得對所有 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|a_n|n\ge m$, 於是 $|a_n|\ge\frac{m}{n}$。因為 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{m}{n}$ 發散, 故由比較判別法 (Comparison Test) 得知: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 發散。

□

這裡要注意的是: 拉比判別法之結論是推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 之收斂或發散的結果, 並非得到原級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收斂性。此外, 為什麼我們說拉比判別法對應到的是觀察它和 p-級數的關係呢? 當我們再看一次 p-級數代入比值判別法的計算時, 發現到

thkZLBH0tw0

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

若是反過來看前項比後項的結果, 則可以進一步整理成

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1,$$

而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^p$ 的二項式展開下的前兩項則為 $1+\frac{p}{n}$, 關於 $\frac{1}{n}$ 等級的係數即呈現 p 值, 故拉比判別法即在突顯它和哪一個 p-級數對應。

OuwR67Q0gd0

例 **11.** 判斷無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+1)(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 是收斂或是發散。

解. 記 $a_n=\frac{\sqrt{n!}}{(2+1)(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(2+1)(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n+1})}\cdot\frac{(2+1)(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{2+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{\sqrt{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\end{aligned}$$

所以比值判別法 (Ratio Test) 並不適用。現計算

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n+1}}=\infty,$$

所以由拉比判別法 (Raabe's Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+1)(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 收斂。

GsKepkZD4uM

在看完上述的討論後, 各位是否想問幾個問題: 首先, 上述的判別法總是有不適用的情況, 那有沒有一種最精確的判別法? 也就是有沒有一種如同柯西收斂準則那樣明確指出級數收斂的充分必要條件之判別式? 另外, 有沒有一種收斂最慢的級數? 上述的問題數學家爲此經過一番努力, 若要從拉比判別法再繼續深究的話, 高斯對此找到一個判別法, 現稱 高斯判別法 (Gauss Test): 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 滿足

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right), n\to\infty,$$

則當 $\beta>1$ 時級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收斂, $\beta<1$ 時級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 發散。這裡並不打算證明高斯判別法, 只是要給各位體會級數理論的特色, 它是一種從等級的觀點, 逐步往下一個等級的性質進行級數收斂或發散之判斷。

至於是否有收斂最慢的級數, 答案是否定的。我們可以證明: 對每個收斂的正項級數, 必存在一個比它收斂性更慢的級數。討論如下: 假設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂, 記 $r_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_k$ 表示級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的 n-階餘項 (n-th remainder), 由此建構 $b_n=\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}$, 則可證明級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也收斂, 而對應到的餘項 $r'_n=\sqrt{r_n}\to 0$ 當 $n\to\infty$, 而且因爲

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{r_{n-1}-r_n}{\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}}=\sqrt{r_{n-1}}+\sqrt{r_n}\to 0 \text{ 當 } n\to\infty,$$

所以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的收斂性比 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 還要慢。

關於上面兩段的討論已是更進階的數學理論, 在此只是做一個簡單的鋪陳。而這一節我們還想要討論另外一類重要的級數類型, 也就是討論兩組數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 逐項相乘後再求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的問題。它類比於瑕積分時曾經探討 $\int_a^{\infty}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 的情況, 這裡也有所謂的阿貝爾判別法與狄立克萊判別法。

定理 12 (阿貝爾判別法, Abel's Test). 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調有界, 則無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

v3FW5qaq5qE

在證明阿貝爾判別法之前, 先回想第 6 章曾經介紹過的阿貝爾變換 (Abel Transformation): 考慮 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$, 令 $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, 則有等式 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1})$。

證明: 因爲數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 故存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|a_n| \le M$。因爲級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收斂, 所以對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $m > n \ge N$ 都有 $|A_{m,n+1}| \overset{\text{記}}{=} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$, 利用阿貝爾變換 (Abel transformation), 得到

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|A_{m,n+1} b_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_{k,n+1}(b_k - b_{k+1})\right| \\
&\le |A_{m,n+1}||b_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_{k,n+1}||b_k - b_{k+1}| < \varepsilon \cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1} \varepsilon \cdot |b_k - b_{k+1}| \\
&= \varepsilon \cdot M + \varepsilon |b_{n+1} - b_m| \le M\varepsilon + \varepsilon(|b_{n+1}| + |b_m|) \le M\varepsilon + \varepsilon(M + M) = 3M\varepsilon,
\end{aligned}
$$

注意到上述估計有用到 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是單調這個條件, 所以才會有 $\sum\limits_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = |b_{n+1} - b_m|$。由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。 □

定理 13 (狄立克萊判別法, Dirichlet's Test). 若部份和 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。

r6_ROkmD7ic

證明: 因爲部份和 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 所以存在 $M > 0$ 使得對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $|s_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right| \le M$。記 $A_{m,n+1} = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k$, 則 $|A_{m,n+1}| = \left|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \le \left|\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\right| + \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \le 2M$。因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得對所有 $n \ge N$ 都有 $|b_n| < \varepsilon$。

利用阿貝爾變換 (Abel transformation), 得到對所有 $m > n \ge N$, 都有

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|A_{m,n+1} b_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_{k,n+1}(b_k - b_{k+1})\right| \\
&\le |A_{m,n+1}||b_m| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |A_{k,n+1}||b_k - b_{k+1}| \le \varepsilon \cdot 2M + \sum_{k=n+1}^{m-1} 2M|b_k - b_{k+1}| \\
&= \varepsilon \cdot 2M + 2M|b_{n+1} - b_m| \le 2M \cdot \varepsilon + 2M(|b_{n+1}| + |b_m|) \le 6M\varepsilon,
\end{aligned}
$$

注意到上述估計有用到 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是單調這個條件, 所以才會有 $\sum\limits_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| = |b_{n+1} - b_m|$。由柯西收斂準則 (Cauchy Convergence Criterion) 得知級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收斂。 □

ANAWdqM7Ws4

例 **14.** 若數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 對任何 $x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 都收斂。當 $x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 必須根據 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的性質進一步判定。

證明: 記 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx$。

(A) 若 $x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 則級數的收斂或發散完全由 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的性質決定。

(B) 若 $x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 由積化和差公式知道:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right),$$

得到

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

這表示部份和 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 又因爲 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 所以由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 收斂。

□

CCPB3SVjfA4

例 **15.** 若數列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 對任何 $x \in \mathbb{R}$ 都收斂。

證明: 記 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$。

(A) 若 $x = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 則 $s_n \equiv 0$, 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 收斂。

(B) 若 $x \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$, 由積化和差公式知道:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)(\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right),$$

得到

$$|s_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{2}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

這表示部份和 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 又因爲 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 單調趨近於零, 所以由狄立克萊判別法 (Dirichlet's Test) 得知: 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 收斂。

□

上面兩個例子在近代數學的發展有其重要性, 它牽涉到的是傅立葉級數理論 (Fourier Series Theory), 這是一種將函數 $f(x)$ 分解成三角級數的理論; 也就是設法將函數表示成

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的樣貌。而上面兩個例子提供一個確立等式右邊收斂 (有意義) 的方法。傅立葉級數理論非常龐大, 光是要把這個理論做一個重點介紹就需要一學期甚至是一年的課程, 這裡只是提出來點綴一下, 告知高等微積分課程與其它進階課程或理論之相關性。

8.4　無窮級數的加法交換律與乘法分配律

對有限個數字而言, 加法的交換律以及乘法分配律好像就是天經地義的事, 甚至不太會被看重這些規律的重要性。然而, 在無窮級數的情況下, 加法交換律以及乘法分配律的成立就不是那麼顯而易見的事了。這裡不妨先舉一個例子告訴大家爲什麼這件事情並不顯然。

YCt9f9QBmqE

例 **1.** 考慮

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

由單元 8.1 的 例 **10** 知道這個級數收斂。記部份和爲 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 而級數和記爲 s。注意到由單元 8.3 的 定理 **2** 之證明過程中知道: 部份和之偶數項子數列遞增至級數和 s, 即

$$\frac{1}{2}=s_2\le s_4\le\cdots\le s\Rightarrow s>0。$$

現考慮一種順序互換的方法:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a'_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+\cdots,$$

這個級數的特色是: 依序列出一個分母是奇數的項之後減去兩個分母是偶數的項。現討論此級數和。記部份和 $s'_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a'_k$, 現觀察一種部份和子數列:

$$s'_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}s_{2n},$$

得到 $\lim\limits_{n\to\infty}s'_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}s_{2n}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=\frac{1}{2}s$。此外, 因爲

$$s'_{3n-1}=s'_{3n}+\frac{1}{4n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s'_{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(s'_{3n}+\frac{1}{4n}\right)=\lim_{n\to\infty}s'_{3n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=\frac{1}{2}s$$

$$s'_{3n+1}=s'_{3n}+\frac{1}{2n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}s'_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(s'_{3n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}s'_{3n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}s,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s'_n=\frac{1}{2}s$。

gi-OCRqocEM

所以由上面例子知道: 任給一個收斂的級數, 加法交換律不見得成立。那麼到底什麼樣的級數才有這些代數上熟悉而常用的規則呢? 爲說明此事, 首先引進記號:

$$
\begin{aligned}
a_n^+ &\overset{\text{定義}}{=\!=} \max(a_n, 0) = \frac{|a_n| + a_n}{2} \geq 0 \\
a_n^- &\overset{\text{定義}}{=\!=} \max(-a_n, 0) = \frac{|a_n| - a_n}{2} \geq 0,
\end{aligned}
$$

在這樣的註記之下, 則有 $a_n = a_n^+ - a_n^-$ 以及 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$。於是給定級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 則會對應到兩個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$。爲讓各位感受這些記號之意義與關聯, 現以級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 爲例, 則有

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ &= \frac{1}{1} + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \cdots \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- &= 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + \cdots。
\end{aligned}
$$

將級數的一般項分解之目的可由以下定理展現出來:

desjyjbHZuQ

定理 2.

(A) 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂若且唯若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收斂。

(B) 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都發散。若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 至少一個發散, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散, 至於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收斂或發散無法下定論。

證明:

(A) ($\Rightarrow$) 因爲對所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ 且 $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, 而級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收斂, 由比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 皆收斂。

($\Leftarrow$) 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收斂, 而且 $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, 所以

$$
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-
$$

收斂, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂。

(B) 因爲級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 假設 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 收斂, 則

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\mp} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\pm} \mp a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm} \mp \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收斂, 於是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{+} + a_n^{-}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$$

也收斂, 這與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是條件收斂矛盾。因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 發散。

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 至少一個發散, 則將發散的級數取出, 透過 $0 \le a_n^{+} \le |a_n|$ 或是 $0 \le a_n^{-} \le |a_n|$ 以及比較判別法 (Comparison Test) 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 發散。

至於原級數的收斂或發散無法由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 的發散決定。比方說 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 對應到的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 皆發散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收斂。又如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 對應到的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 皆發散, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 發散。

□

做這樣的級數分解有助於分析加法交換律的問題, 現引進置換的概念以說明一般交換律之意義。

定義 3. 給定級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 記 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是一種 置換 (permutation), 稱級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 是級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一種 重排 (rearrangement) 或稱爲 更序級數。

以下定理表明絕對收斂的級數才有加法交換律, 而條件收斂的級數沒有加法交換律。

定理 4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 絕對收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的任何一種重排後的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 都收斂, 並且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

證明: 首先證明當 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正項級數的情況。記更序級數的部份和數列爲 $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$, 其中 $t_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)}$ 是一個遞增數列, 並且對所有 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $t_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_{\sigma(n)} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 即 $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ 有上界, 於是由單調有界定理 (Monotonic Sequence Theorem) 得知: 更序級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 收斂, 並且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n。$$

另一方面, 我們也可以將 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 的一種更序級數, 所以有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$。將兩結果合併則得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。

WTxOpcpTFpY

pNJsbWTPTv4

現考慮 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是絕對收斂的級數, 由 定理 **2** 得知: 正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收斂, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \quad \text{以及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-。$$

對於更序級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, 同樣也有對應的兩個正項級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$, 由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 的更序級數, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的更序級數, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{以及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

於是

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^-,$$

收斂, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 絕對收斂, 並且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$。 □

tqpi83-IC0g

定理 **5.** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 任給實數 $L \in \mathbb{R}$, 則存在一種重排後的級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ 收斂至 L。

證明: 因爲 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 條件收斂, 由 定理 **2** 得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$ 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$。對於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 的部份和, 必存在 $n_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ \le L \le \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+,$$

再依次計算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 的部份和, 必存在 $m_1 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- \le L \le \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^-,$$

同理, 可找正整數 $n_2 > n_1$ 與 $m_2 > m_1$ 滿足

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} a_k^+ \le L \le \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+$$

以及

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} a_k^+ - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k^- \le L \le \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^+ - \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} a_k^-,$$

依此方法則可得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的一個更序級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$, 它的部份和介於 $L + a_{n_k}^+$ 與 $L - a_{m_k}^-$ 之間。由於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^+ = 0$ 以及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^- = 0$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L$。 □

現在考慮兩個無窮級數的相乘。先從兩個有限項的級數 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 與 $\sum\limits_{k=1}^{m} b_k$ 看起, 此時將兩級數相乘後則爲 $a_i b_j$ 之和, 其中 $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$。對於兩個收斂的無窮級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 所有形如 $a_i b_j$, 其中 $i, j \in \mathbb{N}$ 的項有無限多個, 這裡先將它們排列成二維陣列的形式:

CHKUkApmaIo

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \cdots \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

然而, 由前面的討論知道: 級數一般來說並不滿足交換律, 所以若要將上述這些項相加的話也會出現排列順序的問題, 而且順序的選擇不僅影響級數和, 甚至會影響收斂性。在兩級數相乘的理論中, 具有應用價值的排列順序有以下兩種:

(1) 正方形法加總: 考慮 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$, 其中 $d_1 = a_1b_1, d_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1$, 而一般項可記爲

$$d_n = a_1b_n + a_2b_n + \cdots + a_{n-1}b_n + a_nb_n + a_nb_{n-1} + \cdots + a_nb_2 + a_nb_1,$$

此時部份和爲 $\sum\limits_{k=1}^{n} d_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right)$, 正好爲兩部份和之相乘。

(2) 對角線法加總: 考慮 柯西乘積 (Cauchy product) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, 其中 $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$。

針對這兩種情況, 正方形法的加總結果較爲單純, 在此先提出來討論。

定理 6. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收斂, 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 收斂, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$。

qQmKWnCr5Lc

證明: 分別記 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部份和數列爲 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 與 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, 級數和分別記爲 s 與 t, 而關於 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 的部份和數列記爲 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$。因爲 $u_n = s_n \cdot t_n$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n \cdot t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} t_n = s \cdot t = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)。$$

□

例 7. 級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的收斂性不見得可以保證柯西乘積 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收斂性。

vqwCkxcdU3s

解. 考慮 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, 首先證明此級數是條件收斂的。由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 所成的柯西乘積之一般項爲

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{i}} \cdot \frac{(-1)^{j+1}}{\sqrt{j}} = (-1)^{n+3} \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}} = (-1)^{n+1} \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}}$$

注意到上面 c_n 的表達式當中總共有 n 項, 而每一項中, $i+j=n+1$。由算幾不等式 (Arithmetic-Geometric Mean Inequality) 得到

$$\sqrt{ij} \leq \frac{i+j}{2} = \frac{n+1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{ij}} \geq \frac{2}{n+1},$$

於是得到

$$|c_n| = \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{ij}} \geq \frac{2n}{n+1} \geq 1,$$

因爲 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的柯西乘積 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 發散。

當 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是絕對收斂時, 則不會有上述的情況發生。

rDIxrxd_MiQ

定理 8. 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是絕對收斂的, 則將 $a_i b_j, i, j \in \mathbb{N}$ 按任意方式排列而成的級數也絕對收斂, 並且級數和等於 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right)$。

證明: 假設 $a_{i_1}b_{j_1}, a_{i_2}b_{j_2}, \ldots, a_{i_k}b_{j_k}, \ldots$ 是所有 $a_i b_j, i, j \in \mathbb{N}$ 的任意一種排列。對任意的 n, 取 $N = \max\limits_{1\leq k\leq n}\{i_k, j_k\}$, 則

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{i_k}b_{j_k}| \leq \left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right),$$

得到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{i_k}b_{j_k}|$ 的部份和是遞增有上界的數列, 因此 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}b_{j_k}$ 絕對收斂。由 定理 4 得知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{i_k}b_{j_k}$ 的任意更序級數也絕對收斂, 並且級數和不變。 □

所以 定理 8 表明絕對收斂級數滿足乘法對加法的分配律。